Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY
University of
MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Dreifsigster Band.

In vier Heften.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Berlin, 1846.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des dreifsigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
1.	Mémoire sur les Hyperdéterminants. Par M. *A. Cayley* à Cambridge. (Traduction d'un Mémoire anglais inséré dans le „Cambridge Mathematical Journal" avec quelques additions de l'auteur.)	I.	1
2.	Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hülfe man die seculären Störungen der Planeten bestimmt. Von Herrn Dr. *Carl Wilhelm Borchardt*.	I.	38
4.	Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen. Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi*.	I.	51
7.	Über die Divisoren gewisser Formen der Zahlen, welche aus der Theorie der Kreistheilung entstehen. Von Herrn Dr. *E. E. Kummer*, Professor an der Universität zu Breslau.	II.	107
9.	Über die Additionstheoreme der Abelschen Integrale zweiter und dritter Gattung. Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi*.	II.	121
10.	Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function. Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.	II.	127
11.	Neue Darstellung der Resultante der Elimination von z aus zwei algebraischen Gleichungen $f(z) = 0$ und $\varphi(z) = 0$ vermittelst der Werthe welche die Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ für gegebne Werthe von z annehmen. Von Dr. *G. Rosenhain*, Privatdocenten in Breslau.	II.	157
12.	Über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. Auszug eines Schreibens an die Berliner Akad. d. W. von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin. (Abgedruckt aus den Monatsberichten der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin vom Jahre 1837.)	II.	166
13.	Note sur les fonctions Abéliennes, par M. *C. G. J. Jacobi*, lue le 29 mai 1843. (Tiré du Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Acad. Imp. des sciences de St. Pétersbourg Tome II. No. 7.)	II.	183
14.	Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. Von Herrn Dr. phil. *G. Eisenstein* zu Berlin.		
	I. Ableitung des biquadratischen Fundamentaltheorems aus der Theorie der Lemniscatenfunctionen, nebst Bemerkungen zu den Multiplications- und Transformationsformeln.	III.	185
	II. Neuer Beweis der Summationsformeln.	III.	211
15.	Démonstration d'un théorème de Mr. *Slonimsky* sur les nombres, avec une application de ce théorème au calcul de chiffres. Par l'éditeur. . . .	III.	215
17.	Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Herrn Dr. *Öttinger*, Prof. ord. an der Universität zu Freiburg im Br. (Fortsetzung des Aufsatzes No. 16. im dritten und No. 21. im vierten Heft 26ten Bandes.)	III.	232
22.	Fortsetzung derselben.	IV.	296
18.	Über einige, die elliptischen Functionen betreffenden Formeln. Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.	III.	269
21.	De integrali $-\int_0^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha$. Auctore Dr. *Schaeffer* Berol. . . .	IV.	277

Nr. der Abhandlung. Heft. Seite.

2. Geometrie.

3. Sulla condizione di uguaglianza di due radici dell'equazione cubica, dalla quale dipendono gli assi principali di una superficie del second'ordine. Dal Sig. Profess. *C. G. J. Jacobi.* (Estratto dal giornale arcadico Tomo XCVIX.) . . . . . I. 46
5. Ein Lehrsatz von Kegelschnitten. Von Herrn Prof. *Umpfenbach* zu Gieſsen. I. 95
6. Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte. Del sig. cav. *J. Steiner,* professore nell'Università e membro dell'Academia di Berlino. (Estratto dal giornale arcadico di Roma tomo XCVIX.) . . . . . II. 97
12. Über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. Auszug eines Schreibens an die Berliner Akad. d. W. von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin. (Abgedruckt aus den Monatsberichten der Königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin vom Jahre 1837.) . . . . . II. 166
16. Über die gleichseitigen Dreiecke, welche um ein gegebenes Dreieck gelegt werden können. Von dem Herrn Conrector *Fasbender* zu Iserlohn. III. 230
19. Über eine Eigenschaft der Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte. Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin. . . . . III. 271
20. Lehrsätze und Aufgaben. Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin. . . . III. 273
23. Über eine Eigenschaft der Leitstrahlen der Kegelschnitte. Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin. . . . . IV. 337
25. Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium. Auctore *F. Joachimsthal,* doct. phil. . . . . IV. 347

3. Mechanik.

8. Neues Theorem der analytischen Mechanik. Von Herrn *C. G. J. Jacobi,* Prof. und Akademiker zu Berlin. (Aus den Monatsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1838.) . . . . . II. 117

II. Angewandte Mathematik.

2. Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hülfe man die seculären Störungen der Planeten bestimmt. Von Herrn Dr. *Carl Wilhelm Borchardt.* I. 38
4. Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen. Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi.* . . . . . I. 51
24. Intorno agl'intimi movimenti osservati nei muri dell'Osservatorio di Modena. Memoria del Sgr. Dottor *Antonio Bernardi.* . . . . . IV. 341

Fac-simile einer Handschrift von *Leibnitz.* . . . . . I.
– – – – – – *Monge.* . . . . . II.
– – – – – – *Kästner.* . . . . . III.
– – – – – – *Fermat.* . . . . . IV.

Druckfehler-Verzeichnifs. . . . . IV. 351
26. Inhalts-Verzeichnifs I. der *dritten zehn* Bände dieses Journals, 21 bis 30, herausgegeben in den Jahren 1841 bis 1845; nach alphabetischer Ordnung der Namen der Verfasser. . . . . IV. 353
27. Inhalts-Verzeichnifs II. der *ersten dreifsig* Bände dieses Journals; nach den Gegenständen. . . . . IV. 365

1.

Mémoire sur les Hyperdéterminants.

(Par M. *A. Cayley* à Cambridge.)

(Traduction d'un Mémoire anglais inséré dans le „Cambridge Mathematical Journal" avec quelques additions de l'auteur.)

I.

On trouve dans les N°s XIII et XV du Journal de Cambridge des recherches très élégantes sur les transformations linéaires par M. ***G. Boole,*** de Lincoln. En particulier l'auteur établit ce beau théorème „Soit U une fonction homogène de l'ordre n des m variables x, y, etc. Y ce que devient cette fonction, en écrivant au lieu de x, y, etc., de nouvelles variables ξ, η, ... chacune de la forme $\lambda x+\mu y+....$ Soit encore $\Theta U=0$ l'équation obtenue en éliminant x, y, ... entre $\frac{dU}{dx}=0$, $\frac{dU}{dy}=0$, etc. de manière que ΘU représente une certaine fonction des constantes de U, ΘY la fonction analogue des constantes de Y, et enfin soit E le déterminant de l'ordre m formé avec les coëfficiens λ, μ, etc. On a cette équation $\Theta Y=E^{n\alpha}\Theta U$ (où $\alpha=(n-1)^{m-1}$)."

En cherchant à démontrer cette formule de M. ***Boole,*** il m'a paru qu'on pourrait substituer au lieu d'une fonction homogène de l'ordre n de m variables, une fonction de ce même ordre, de n groupes de m variables (donc de nm variables, en tout), mais linéaire à l'égard des variables de chaque groupe séparé. Le théorème de M. ***Boole*** prend ainsi la forme $\Theta Y=E_1^\alpha E_2^\alpha ..... E_n^\alpha . \Theta U$. Il était facile de voir que cette formule serait vraie, si la fonction ΘU satisfaisait à un certain système d'équations, aux différences partielles prises à l'égard des constantes de U. Je m'imaginais d'abord que la fonction ΘU était nécessairement telle que $\Theta U=0$ fût le résultat de l'élimination des variables entre les équations $\frac{dU}{dx_1}=0$, $\frac{dU}{dx_2}=0$, ... $\frac{dU}{dy_1}=0$, etc., mais j'ai vu bientôt que cette supposition n'était pas fondée, que les équations différentielles ne suffisaient pas, pour ***déterminer*** la fonction ΘU, et qu'ainsi au lieu d'une seule fonction il y en avait plusieurs douées de cette propriété fondamentale. Puis j'ai remplacé les équations différentielles, par un autre système de for-

mules, sur lesquelles, posées comme définitions, j'établis d'une manière directe la propriété fondamentale de ces nouvelles fonctions ΘU; lesquelles à cause de leur analogie avec les déterminants, qui en sont un cas particulier, je me propose de nommer „Hyperdéterminants."

Je me suis déjà servi de la notation

$$1. \quad \left|\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots. \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \ldots. \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \end{matrix}\right|$$

(où il y a autant de lignes horizontales que de verticales) pour représenter un déterminant ordinaire, et de cette autre notation

$$2. \quad \left\|\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots. \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \end{matrix}\right\|$$

(où le nombre des lignes verticales est plus grand que celui des lignes horizontales) pour représenter la suite des déterminants que l'on obtient en choisissant d'une manière quelconque, un nombre suffisant de lignes verticales, pour en former un déterminant. Les termes de cette suite sont regardés, non pas comme liés par les signes $\pm$ ou d'aucune autre manière, mais comme parfaitement isolés.

En appliquant à cette suite, le théorème fondamental pour la multiplication des déterminants démontré par presque tous ceux qui ont écrit sur ce sujet, on obtient une formule de cette forme

$$3. \quad \left\|\begin{matrix} A, & B, & C, & D, & \ldots. \\ A', & B', & C', & D', & \ldots. \\ A'', & B'', & C'', & D'', & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{matrix}\right\| = E \left\|\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \ldots. \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \delta', & \ldots. \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \delta'', & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{matrix}\right\|$$

dans laquelle

$$4. \quad \begin{cases} A = \lambda\alpha + \lambda'\alpha' + \lambda''\alpha'' + \ldots., \\ B = \lambda\beta + \lambda'\beta' + \lambda''\beta'' + \ldots., \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A' = \mu\alpha + \mu'\alpha' + \mu''\alpha'' + \ldots., \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

5. $$E = \begin{vmatrix} \lambda, & \mu, & \ldots. \\ \lambda', & \mu', & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

(la signification de l'équation (3.) étant évidemment que les termes des deux côtés du signe d'égalité, sont respectivement égaux).

Cela posé, considérons un nombre m^n de coëfficiens arbitraires, représentés par cette formule générale symbolique

$$rst\ldots.$$

où il y a n lettres r, s, etc., chacune desquelles peut recevoir les valeurs $1, 2, \ldots. m$.

Représentons par

$$\alpha s' t', \ldots., \quad \alpha s'' t'', \ldots., \quad \ldots.$$

tous les termes de cette suite qui ont α pour première lettre symbolique; de même par $r'' \alpha t'', \ldots., \; r'' \alpha t'', \ldots., \; \ldots.$ tous les termes qui ont α pour seconde lettre symbolique et ainsi du reste, les termes de ces diverses suites étant rangés dans un ordre quelconque.

Imaginons une fonction u de ces coëfficiens qui soit à la fois des formes

$$(A.) \qquad u = H_p \left(\left\| \begin{matrix} 1s' t', \ldots., & 1s'' t'', \ldots., & 1s''' t''', \ldots., & \ldots. \\ 2s' t', \ldots., & 2s'' t'', \ldots., & 2s''' t''', \ldots., & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\| \right)$$

$$u = H_p \left(\left\| \begin{matrix} r'' 1t'', \ldots., & r'' 1t'', \ldots., & r''' 1t''', \ldots., & \ldots. \\ r'' 2t'', \ldots., & r'' 2t'', \ldots., & r''' 2t''', \ldots., & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\| \right)$$

etc. dans lesquelles H_p représente une fonction homogène de l'ordre p, qui en général est différente dans les différentes équations. Le nombre des différentes formes est n.

Une fonction quelconque u, qui satisfait aux équations (*A.*), sera nommée „Hyperdéterminant." Les fonctions qui satisfont a un certain nombre seulement de ces équations seront nommées hyperdéterminants incomplets. Mais considérons d'abord les hyperdéterminants complets. — Soient $\overset{*}{r}st\ldots.$ de nouveaux coëfficiens liés avec $rst\ldots.$ par des équations de cette forme

$$\overset{*}{r}st\ldots. = \lambda_1^r 1st\ldots. + \lambda_2^r 2st\ldots. + \ldots. + \lambda_m^r mst\ldots.$$

(où le r en $\lambda_1^r \ldots.$ etc. est indice et non pas exposant); et soit $\overset{*}{u}$ ce que devient u en faisant la substitution de ces nouveaux coëfficiens. Choisissant

la première des formes (*A.*), faisant attention aux équations générales (3.), et posant pour abréger

$$L = \begin{vmatrix} \lambda_1^1, & \lambda_1^2, & \ldots. \\ \lambda_2^1, & \lambda_2^2, & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

on obtient tout de suite l'équation très simple

$$\overset{*}{u} = L^p . u.$$

Soient de même $\overset{**}{r}st....$ de nouveaux coëfficiens liés avec $\overset{*}{r}st....$ par des équations d'une forme pareille

$$\overset{**}{r}st.... = \mu_1^s \overset{*}{1}st.... + \mu_2^s \overset{*}{2}st.... + \mu_m^s \overset{*}{m}st....$$

et $\overset{**}{u}$ ce que devient $\overset{*}{u}$ en faisant cette substitution. On obtient comme auparavant, mais en considérant la seconde des formes (*A.*) et posant

$$M = \begin{vmatrix} \mu_1^1, & \mu_1^2, & \ldots. \\ \mu_2^1, & \mu_2^2, & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

cette équation

$$\overset{**}{u} = M^p . \overset{*}{u}$$

et de là

$$\overset{**}{u} = L^p M^p . u.$$

En continuant toujours de cette manière, on a après n substitutions, une équation parfaitement pareille

$$(B.\ 1.) \qquad \overset{***\ldots}{u} = L^p M^p N^p \ldots . u.$$

Considérons maintenant cette fonction

$$\Sigma\Sigma\Sigma(rst.... x_r y_s z_t ....),$$

où les Σ se rapportent successivement aux n lettres r, s, t, ... qui comme auparavant doivent s'étendre chacune depuis 1 jusqu'à m. En regardant u comme un Dérivé de cette fonction, j'écrirai

$$u = \Theta . \Sigma\Sigma\Sigma .... (rst.... x_r y_s z_t ....)$$

en posant

$$x_r = \lambda_r^1 \overset{*}{x}_1 + \lambda_r^2 \overset{*}{x}_2 .... + \lambda_r^m \overset{*}{x}_m ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_s = \mu_s^1 \overset{*}{y}_1 + \mu_s^2 \overset{*}{y}_2 .... + \mu_s^m \overset{*}{y}_m .$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il est facile d'obtenir,

$$\Sigma\Sigma\Sigma\ldots.(rst\ldots.x_r y_s z_t\ldots.) = \Sigma\Sigma\Sigma(\overset{*}{r}st\ldots.\overset{*}{x}_r y_s z_t\ldots.) = \text{etc.}$$

et ainsi enfin

$$\Sigma\Sigma\Sigma\ldots.(rst\ldots.x_r y_s z_t\ldots.) = \Sigma\Sigma\Sigma(\overset{*}{r}\overset{*}{s}\overset{*}{t}\ldots.\overset{*}{x}_r \overset{*}{y}_s \overset{*}{z}_t),$$

de manière que l'équation (*B.* 1.) peut aussi s'écrire sous cette autre forme

(*B.* 2.) $$\Theta\Sigma\Sigma\Sigma(\overset{*}{r}\overset{*}{s}\overset{*}{t}\ldots.\overset{*}{x}_r\overset{*}{y}_s\overset{*}{z}_t\ldots.) = L^p M^p N^p\ldots.\Theta\Sigma\Sigma\Sigma(rst\ldots.x_r y_s z_t\ldots.).$$

Remarquons encore cette formule qui s'obtient sans la moindre difficulté

(*C.*) $$\overset{*}{r}\overset{*}{s}\overset{*}{t}\ldots. = \Sigma\Sigma\Sigma(\lambda^r_f \mu^s_g \nu^t_h\ldots.fgh\ldots.),$$

où les signes sommatoires se rapportent aux lettres *f, g, h,* .... qui doivent s'étendre depuis 1 jusqu'à *m*. — Cette formule obtenue, il convient peut-être de retenir l'équation (*B.* 1.) au lieu de (*B.* 2.): la première étant jointe à (*C.*) est proprement l'équation fondamentale des hyperdéterminants, la seconde sert à faire voir la relation qu'ont ces fonctions avec la question des transformations lineaires.

Il est évident que dans les équations (*B.*), (*C.*) on peut, si l'on veut, omettre une combinaison quelconque des signes de variation (*) en omettant en même temps les signes sommatoires, et les facteurs du produit $LMN\ldots.$ qui y correspondent. Dans le cas des déterminants incomplets, pour lesquels quelques unes des équations (*A.*) ne sont pas satisfaites, *il faut* faire l'omission des signes de variation (*) etc. qui correspondent aux équations non satisfaites, et l'on peut en omettre encore autant que l'on veut. Le même s'applique au système d'équations, que je vais maintenant démontrer, savoir

(*D.*) $$\Sigma\Sigma\ldots.\left(\alpha st\ldots.\frac{d}{d.\beta st\ldots.}\right)u = 0 \quad \text{ou} \quad pu,$$

$$\Sigma\Sigma\ldots.\left(r\alpha t\ldots.\frac{d}{d.r\beta t\ldots.}\right)u = 0 \quad \text{ou} \quad pu, \quad \text{etc. etc.}$$

Selon que $\alpha \neq \beta$ ou $\alpha = \beta$; les signes Σ se rapportent d'abord à *s, t,* ...., puis à *r, t,* .... et ainsi de suite. Pour cela considérons la forme générale de *u,* savoir celle qui est donnée par la première des équations (*A.*). La fonction est composée d'une suite de termes, chacun de la forme $CPQR\ldots.$ (*p* facteurs) et dans cette expression on a par exemple

$$P = \left|\begin{array}{l} 1s'_{,}t'_{,}\ldots.\ 1s''_{,}t''_{,}\ldots., \text{ (m termes)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha s'_{,}t'_{,}\ldots.\ \alpha s''_{,}t''_{,}\ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta s'_{,}t'_{,}\ldots.\ \beta s''_{,}t''_{,}\ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right|$$

et de même pour Q, R etc. .... Puis, pour le terme en question,

$$\Sigma\Sigma\ldots.\left(\alpha st\ldots.\frac{d}{d.\beta st\ldots.}\right)u = CQR\ldots.\,\Sigma\Sigma\ldots.\left(\alpha st\ldots.\frac{d}{d.\beta st\ldots.}\right)P + \text{etc.}$$

Mais $\Sigma\Sigma\ldots.\left(\alpha st\ldots.\frac{d}{d.\beta st\ldots.}\right)P$, est précisément ce que devient P en écrivant α au lieu de β, ce qui rend identiques deux lignes du déterminant et par conséquent fait évanouir le déterminant. Le même a lieu pour les autres termes, donc les équations (*D.*) sont démontrées pour le cas général $\alpha \neq \beta$. Si au contraire $\alpha = \beta$, on a $\Sigma\Sigma\ldots.\left(\alpha st\ldots.\frac{d}{d.\alpha st\ldots.}\right)P = P$, ce qui donne $\Sigma\Sigma\left(\alpha st\ldots.\frac{d}{d.\beta st\ldots.}\right)u = CQR\ldots.\,P + CPR\ldots.\,Q + \text{etc.}$ $= p.CPQR + \text{etc.} = pU$.

Le système (*D.*) est précisément celui aux différences partielles, dont il était question dans l'introduction à ce mémoire. Il est facile de s'assurer qu'il remplace entièrement les équations (*A.*) de manière que chaque fonction qui satisfait à ces équations, est des formes données par le système (*A.*). Et c'est au moyen de ces équations (*D.*) qu'il faut chercher les hyperdéterminants.

Un cas très important de la théorie générale est celui de M. *Boole*, savoir celui dans lequel les coëfficiens $rst\ldots.$ ont cette propriété $rst\ldots. = r's't'\ldots.$ chaque fois que $r, s, t, \ldots.$ et $r', s', t', \ldots.$ sont la même *combinaison* de nombres, et dans lequel les coëfficiens $\lambda, \mu,$ etc. sont respectivement égaux. Dans ce cas on a aussi $\overset{***}{rst}\ldots. = \overset{***}{r's't'}\ldots.$ chaque fois que $r, s, t, \ldots.$ et $r', s', t', \ldots.$ sont la même combinaison de nombres. Voilà pourquoi on peut distinguer ce cas comme „cas symmétrique." Les formules (*B.* 1.), (*B.* 2.), (*C.*) deviennent

$$(B'.\ 1.)\qquad \overset{***\ldots.}{u} = L^{np}u,$$

$$(B'.\ 2.)\qquad \Theta\,\Sigma\Sigma\Sigma\ldots.\left\{\frac{[n]^n}{[\alpha]^\alpha[\beta]^\beta\ldots.}\overset{***}{rst}\ldots.\overset{*}{x}_r\overset{*}{x}_s\overset{*}{x}_t\ldots.\right\}$$
$$= L^{np}\,\Theta\,\Sigma\Sigma\Sigma\ldots.\left\{\frac{[n]^n}{[\alpha]^\alpha[\beta]^\beta\ldots.}rst\ldots.x_rx_sx_t\ldots.\right\},$$

où il faut prendre pour $r, s, t, \ldots$ seulement des *combinaisons* distinctes de valeurs. $\alpha, \beta, \ldots$ expriment combien de fois le même nombre se présente dans ces combinaisons

$$(C.) \qquad \overset{\alpha}{r}\overset{\beta}{s}\overset{\gamma}{t}\ldots = \Sigma\Sigma\Sigma\ldots(\lambda_f^r \lambda_g^s \lambda_h^t \ldots fgh\ldots),$$

où $f, g, h, \ldots$ doivent s'étendre comme auparavant depuis 1 jusqu'à m. Mais cette formule se réduit au cas où différentes combinaisons des lettres $r, s, t, \ldots$ deviennent identiques.

Les équations (*A.*) se réduisent à une seule, mais celle-ci n'est plus suffisante, pour déterminer les fonctions cherchées. Aussi, il ne peut pas y avoir d'hyperdéterminants incomplets. Les équations (*D.*) ne sont plus satisfaites. Ainsi le cas symmétrique, traité à part est plus difficile que le cas général, mais les formules de celui-ci une fois établies on passe tout de suite à celles pour les hyperdéterminants symmétriques. Cependant il y a des hyperdéterminants symmétriques qui n'ont pas d'hyperdéterminants généraux, qui leur soient analogues (voyez plus loin l'exemple III.), de manière qu'il faut se livrer à une investigation séparée pour compléter la théorie du cas symmétrique; j'y reviendrai bientôt en suivant la route tracée par M. ***Boole.*** A présent, ne pouvant pas intégrer en général les équations (*D.*), je vais passer en revue les cas particuliers pour lesquels j'ai réussi à le faire: I. $p = 1$, n un nombre pair (pour n impair, il n'y a que des hyperdéterminants incomplets), II. $p = 2$, $m = 2$, n un nombre pair, III. $p = 3$, $m = 2$, $n = 4$.

I. Ce cas est celui que j'ai examiné dans la seconde partie d'un mémoire inséré dans les „Cambridge Philosophical Transactions T. VIII." Considérons en effet un symbole de cette forme

$$\left\{\begin{matrix} 1\,1\ldots. \text{ (n termes)} \\ 2\,2\ldots. \\ \ldots\ldots \\ m\,m\ldots. \end{matrix}\right\}$$

employé pour désigner la somme d'une suite de termes tels que

$$\pm_r \pm_s \ldots. r_1 s_1 \ldots. \cdot r_2 s_2 \ldots. \cdot r_m s_m \ldots.$$

où $r_1, r_2, \ldots. r_m$: $s_1, s_2, \ldots. s_m$: etc. sont des permutations quelconques, les mêmes ou différentes, des nombres 1, 2, ... m. Le signe $\pm_r$ sera déterminé en prenant le signe (—) autant de fois que la suite $r_1, r_2, \ldots. r_m$ contient d'inversions, et de la même manière se déterminent les signes $\pm_s$ etc.

Cela posé on démontre que dans le cas de n impair, tous ces termes se détruisent entièrement: que dans le cas de n pair, au contraire, il y a un certain nombre de termes, repétés $(1.2 \ldots m)$ fois, que l'on obtient en prenant les nombres $r_1, r_2, \ldots r_m$ ou $s_1, s_2, \ldots s_m$, etc. (n'importe lesquels) dans un ordre déterminé. Je marque d'un (†) la colonne, dont les nombres ne doivent pas être permutés, de manière que $\left\{\begin{matrix}\dagger \\ 1\ 1 \ldots (n) \\ 2\ 2 \ldots \\ \ldots\ldots \\ m\,m \ldots\end{matrix}\right\}$ est la somme de tous les termes de la forme $\pm_s \ldots 1s_1 \ldots . 2s_2 \ldots \ldots$ Les théorèmes énoncés reviennent donc à

$$\left\{\begin{matrix}1\ 1 \ldots (n) \\ 2\ 2 \ldots \\ \ldots\ldots \\ m\,m \ldots\end{matrix}\right\} = 0 \quad (n \text{ impair}),$$

$$\left\{\begin{matrix}1\ 1 \ldots n \\ 2\ 2 \ldots \\ \ldots\ldots \\ m\,m \ldots\end{matrix}\right\} = (1.2 \ldots m).\left\{\begin{matrix}\dagger \\ 1\ 1 \ldots (n) \\ 2\ 2 \ldots \\ \ldots\ldots \\ m\,m \ldots\end{matrix}\right\} = (1.2 \ldots m).\left\{\begin{matrix}\dagger \\ 1\ 1 \ldots (n) \\ 2\ 2 \ldots \\ \ldots\ldots \\ m\,m \ldots\end{matrix}\right\}$$

$$= \ldots\ldots = (1.2 \ldots m).\left\{\begin{matrix}1\ 1 \ldots n \\ 2\ 2 \ldots \\ \ldots\ldots \\ m\,m \ldots\end{matrix}\right\}^{\dagger} \quad (n \text{ pair})$$

(dans le dernier terme le (†) est placé en dehors, pour marquer qu'il peut être placé indifféremment au dessus d'une colonne quelconque).

Il faut remarquer que les quantités

$$\left\{\begin{matrix}\dagger \\ 1\ 1 \ldots (n) \\ 2\ 2 \ldots \\ \ldots\ldots \\ m\,m \ldots\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}\dagger \\ 1\ 1 \ldots (n) \\ 2\ 2 \ldots \\ \ldots\ldots \\ m\,m \ldots\end{matrix}\right\} \text{ etc.}$$

ne sont pas équivalentes dans le cas de n impair, et qu'ainsi dans ce cas on

ne peut pas avoir de notation telle que

$$\left\{\begin{matrix} 1\,1 \ldots (n) \\ 2\,2 \ldots \\ \ldots\ldots \\ m\,m \ldots \end{matrix}\right\}^{\dagger}$$

Il est à peine nécessaire d'observer que pour $n = 2$ la fonction

$$\left\{\begin{matrix} 1\,1 \\ 2\,2 \\ \ldots \\ m\,m \end{matrix}\right\}^{\dagger}$$

devient un déterminant ordinaire, savoir celui que l'on peut autrement représenter par

$$\begin{vmatrix} 11, & 12, & \ldots & 1m \\ 21, & 22, & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m1, & \ldots & & \end{vmatrix}$$

Ces nouvelles fonctions, en particulier pour des n pair, ont beaucoup d'analogie avec les déterminants; par exemple il y a un théorème sur la multiplication de deux fonctions, analogue à celui pour les déterminants (que j'ai donné à l'endroit cité) etc. Je dis de plus que pour un n pair, la fonction

$$\left\{\begin{matrix} 1\,1 \ldots (n) \\ 2\,2 \ldots \\ \ldots\ldots \\ m\,m \ldots \end{matrix}\right\}^{\dagger}$$

est hyperdéterminant complet, et que pour un n impair, les fonctions

$$\left\{\begin{matrix} \dagger \\ 1\,1 \ldots (n) \\ 2\,2 \ldots \\ \ldots\ldots \\ m\,m \ldots \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} \dagger \\ 1\,1 \ldots (n) \\ 2\,2 \ldots \\ \ldots\ldots \\ m\,m \ldots \end{matrix}\right\}, \quad \ldots\ldots$$

sont des hyperdéterminants incomplets (qui satisfont à toutes les équations (*A.*), une seule exceptée; la première forme ne satisfait pas à la première équation, et ainsi de suite).

Ce qu'il peut ici être d'obscur, à cause d'une notation inusitée, deviendra clair en prenant quelques exemples particuliers.

A. Soit $n = 2$. En résumant tout ce qui a été supposé, on a ce théorème qui est je crois connu (au moins il est connu dans le cas symmétrique).

„Si la fonction

$$U = \Sigma\Sigma(rs \ldots . x_r y_s) \quad [r, s \text{ depuis } 1 \text{ jusqu'à } m]$$

se transforme en $\Sigma\Sigma(\overset{*}{r}\overset{*}{s} \ldots . \overset{*}{x}_r \overset{*}{y}_s)$, au moyen des substitutions

$$x_r = \lambda_r^1 \overset{*}{x}_1 + \lambda_r^2 \overset{*}{x}_2 \ldots . + \lambda_r^m \overset{*}{x}_m,$$

. . . . . .

$$y_s = \mu_s^1 \overset{*}{y}_1 + \mu_s^2 \overset{*}{y}_2 \ldots . + \mu_s^m \overset{*}{y}_m$$

on a cette équation

$$\begin{vmatrix} \overset{*}{1}\overset{*}{1}, & \overset{*}{1}\overset{*}{2}, & \ldots . \\ \overset{*}{2}\overset{*}{1}, & \overset{*}{2}\overset{*}{2}, & \ldots . \\ \ldots . & \ldots . & \ldots . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1^1, & \lambda_2^1, & \ldots . \\ \lambda_1^2, & \lambda_2^2, & \ldots . \\ \ldots . & \ldots . & \ldots . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mu_1^1, & \mu_2^1, & \ldots . \\ \mu_1^2, & \mu_2^2, & \ldots . \\ \ldots . & \ldots . & \ldots . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 11, & 12, & \ldots . \\ 21, & 22, & \ldots . \\ \ldots . & \ldots . & \ldots . \end{vmatrix}$$

dans laquelle aussi

$$\overset{*}{r}\overset{*}{s} = \Sigma\Sigma(\lambda_f' \mu_g^s \ldots . fg) \quad [f, g \text{ depuis } 1 \text{ jusqu'à } m],"$$

de manière que le théorème peut s'énoncer ainsi: „Le déterminant de l'ordre m, dont les termes ont cette forme générale $\Sigma_r \Sigma_s (rs . x_{r\varrho} y_{s\sigma})$ [r, s depuis 1 jusqu'à m] se réduit au produit de trois déterminants, le premier formé des coëfficiens rs, le second des x, le troisième des y."

C'est un cas particulier d'une théorème qui fait partie d'un mémoire qui va paraître dans le Journal de Cambridge, théorème qui peut s'énoncer ainsi: „Le déterminant de l'ordre k, formé de cette même manière, est de la même forme que chacun de ses termes, savoir $\Sigma_R \Sigma_S RS . X_R . Y_S$, les coëfficiens RS étant des déterminants formés des coëfficiens rs; les variables X_R, des déterminants formés des variables x; et les variables Y_S des déterminants formés des variables y. R, S s'étendent depuis 1 jusqu'à α, si α représente le nombre de combinaisons de m lettres prises k et k ensemble (si $k = m$, $\alpha = 1$, si $k > m$, la fonction se réduit à zéro)."

Ce théorème s'applique à la théorie des maxima et minima, et à celle des coordonnées sphériques; à son aide j'obtiens des formules très symmétriques pour la transformation entre deux systèmes obliques de ces coordonnées.

Avant de quitter ce cas, écrivons encore ce qu'on obtient dans le cas symmétrique, et pour trois variables.

„Si $U = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gxz + 2Hxy$, se transforme en

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 + 2\mathfrak{F}\eta\zeta + 2\mathfrak{G}\xi\zeta + 2\mathfrak{H}\xi\eta$$

au moyen de

$$\begin{aligned} x &= \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta, \\ y &= \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta, \\ z &= \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta, \end{aligned}$$

on a cette formule connue

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{B}\mathfrak{G}^2 - \mathfrak{C}\mathfrak{H}^2 + 2\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{H} =$$
$$(\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma)^2(ABC - AF^2 - BG^2 - CH^2 + 2FGH).$$"

B. Soit $n = 3$, posons pour plus de simplicité $m = 2$, et prenons

$$\begin{aligned} 111 &= a, & 112 &= e, \\ 211 &= b, & 212 &= f, \\ 121 &= c, & 122 &= g, \\ 221 &= d, & 222 &= h, \end{aligned}$$

de manière que la fonction à considérer est

$$\begin{aligned} U = {} & ax_1y_1z_1 + bx_2y_1z_1 + cx_1y_2z_1 + dx_2y_2z_1 \\ & + ex_1y_1z_2 + fx_2y_1z_2 + gx_1y_2z_2 + hx_2y_2z_2. \end{aligned}$$

Il n'y a pas d'hyperdéterminant complet (c'est-à-dire pour $p = 1$), et les hyperdéterminants incomplets sont

$$\begin{aligned} ah - bg - cf + de &= u_1, \\ ah - de - bg + cf &= u_2, \\ ah - cf - de + bg &= u_3. \end{aligned}$$

Les équations pour la transformation sont

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1^1 \overset{*}{x}_1 + \lambda_1^2 \overset{*}{x}_2, \\ x_2 &= \lambda_2^1 \overset{*}{x}_1 + \lambda_2^2 \overset{*}{x}_2, \\ y_1 &= \mu_1^1 \overset{*}{y}_1 + \mu_1^2 \overset{*}{y}_2, \\ y_2 &= \mu_2^1 \overset{*}{y}_1 + \mu_2^2 \overset{*}{y}_2, \\ z_1 &= \nu_1^1 \overset{*}{z}_1 + \nu_1^2 \overset{*}{z}_2, \\ z_2 &= \nu_2^1 \overset{*}{z}_1 + \nu_2^2 \overset{*}{z}_2, \end{aligned}$$

et l'on obtient les formules

$$\begin{aligned} \overset{**}{u}_1 &= (\mu_1^1\mu_2^2 - \mu_2^1\mu_1^2)(\nu_1^1\nu_2^2 - \nu_2^1\nu_1^2)u_1 \quad \text{en changeant les } y,\ z, \\ \overset{*,*}{u}_2 &= (\nu_1^1\nu_2^2 - \nu_2^1\nu_1^2)(\lambda_1^1\lambda_2^2 - \lambda_2^1\lambda_1^2)u_2 \quad - \quad - \quad - \quad - \ z,\ x, \\ \overset{**,}{u}_3 &= (\lambda_1^1\lambda_2^2 - \lambda_2^1\lambda_1^2)(\mu_1^1\mu_2^2 - \mu_1^2\mu_2^1)u_3 \quad - \quad - \quad - \quad - \ x,\ y. \end{aligned}$$

On aurait pu poser

$$u_1 = ad - bc \quad \text{ou} \quad eh - gf,$$
$$u_2 = af - be \quad \text{ou} \quad ch - dg,$$
$$u_3 = ag - ce \quad \text{ou} \quad bh - df,$$

mais ce sont des déterminants ordinaires. Les formes symboliques correspondantes sont

$$\left\{\begin{matrix}\dagger \\ 111 \\ 122\end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix}\dagger \\ 211 \\ 222\end{matrix}\right\} \quad \text{etc.}$$

et cette remarque s'applique au cas général; dans la colonne non permutée, on peut rendre identiques autant de combinaisons des nombres que l'on veut; on a toujours un hyperdéterminant incomplet. (Si deux nombres sont identiques dans une colonne permutée, la fonction s'évanouit.)

C. $n = 4,\ m = 2.$

$$a = 1111, \quad i = 1112,$$
$$b = 2111, \quad j = 2112,$$
$$c = 1211, \quad k = 1212,$$
$$d = 2211, \quad l = 2212,$$
$$e = 1121, \quad m = 1122,$$
$$f = 2121, \quad n = 2122,$$
$$g = 1221, \quad o = 1222,$$
$$h = 2221, \quad p = 2222.$$

$$\begin{aligned} U = {} & a x_1 y_1 z_1 w_1 + b x_2 y_1 z_1 w_1 + c x_1 y_2 z_1 w_1 + d x_2 y_2 z_1 w_1 \\ & + e x_1 y_1 z_2 w_1 + f x_2 y_1 z_2 w_1 + g x_1 y_2 z_2 w_1 + h x_2 y_2 z_2 w_1 \\ & + i x_1 y_1 z_1 w_2 + j x_2 y_1 z_1 w_2 + k x_1 y_2 z_1 w_2 + l x_2 y_2 z_1 w_2 \\ & + m x_1 y_1 z_2 w_2 + n x_2 y_1 z_2 w_2 + o x_1 y_2 z_2 w_2 + p x_2 y_2 z_2 w_2. \end{aligned}$$

L'hyperdéterminant complet $\left\{\begin{matrix}1111 \\ 2222\end{matrix}\right\}^{\dagger}$ prend cette forme assez simple

$$u = ap - bo - cn + dm - el + fk + gj - hi,$$

de manière que pour cette valeur de u, en ajoutant aux équations de transformation du cas précedent les deux suivantes:

$$w_1 = \varrho_1^1 \overset{*}{w}_1 + \varrho_1^2 \overset{*}{w}_2,$$
$$w_2 = \varrho_2^1 \overset{*}{w}_1 + \varrho_2^2 \overset{*}{w}_2,$$

on a la formule

$$\overset{****}{u} = (\lambda_1^1 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^1)(\mu_1^1 \mu_2^2 - \mu_2^1 \mu_1^2)(\nu_1^1 \nu_2^2 - \nu_2^1 \nu_1^2)(\varrho_1^1 \varrho_2^2 - \varrho_2^1 \varrho_1^2).u.$$

Pour le cas symmétrique, on a

$$U = \alpha x^4 + 4\beta x^3 y + 6\gamma x^2 y^2 + 4\delta x y^3 + \varepsilon y^4,$$

transformé en

$$U' = \alpha' x'^4 + 4\beta' x'^3 y' + 6\gamma' x'^2 y'^2 + 4\delta' x' y'^3 + \varepsilon' y'^4$$

au moyen de

$$x = \lambda x' + \mu y',$$
$$y = \lambda' x' + \mu' y',$$

et alors

$$u = \alpha\varepsilon - 4\beta\delta + 3\gamma^2,$$
$$u' = \alpha'\varepsilon' - 4\beta'\delta' + 3\gamma'^2,$$
$$u' = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^4 u.$$

(On doit remarquer cette fonction $\alpha\varepsilon - 4\beta\delta + 3\gamma^2$, qui joue un rôle important dans la résolution des équations du quatrième ordre; et qui est la même sur laquelle je suis tombé dans ma note sur l'élégante formule de M. *Hesse* (*Crelle* Journ. tome XXIX p. 54). Voyez plus loin Ex. III. pour l'autre fonction qui y parait.)

Passons au second cas général.

II. $p = 2$, n impair, $m = 2$.

On a cette expression pour un hyperdéterminant complet:

$$u = \begin{vmatrix} \left\{\begin{matrix}\dagger \\ 111\ldots.(n) \\ 122\ldots.\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}\dagger \\ 111\ldots.(n) \\ 222\ldots.\end{matrix}\right\} \\ \left\{\begin{matrix}\dagger \\ 111\ldots.(n) \\ 222\ldots.\end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix}\dagger \\ 211\ldots.(n) \\ 222\ldots.\end{matrix}\right\} \end{vmatrix}$$

c'est à dire un déterminant symmétrique du second ordre, dont les termes sont les hyperdéterminants incomplets, qui satisfont à toutes les équations (*A*.) excepté la première. On peut placer la marque de non-permutation (†) au dessus d'une colonne quelconque, mais les différentes fonctions qu'on obtient ainsi ne sont pas toutes indépendantes. Dans l'exemple qui suit elles sont au contraire absolument les mêmes. Je supprime la démonstration de cette forme générale, qui ne présente pas beaucoup de difficulté; il s'agit seulement de faire voir que la première des équations (*A*.) est satisfaite, car les autres, étant satisfaites par chaque terme du déterminant, sont satisfaites par le déterminant même.

A. $n = 3$, notation comme en I. (*B.*),

$$u = a^2h^2 + b^2g^2 + c^2f^2 + d^2e^2 - 2ahbg - 2ahcf - 2ahde - 2bgcf - 2bgde - 2cfde + 4adfg + 4becf,$$

on a la formule

$$\overset{***}{u} = (\lambda_1^1\lambda_2^2 - \lambda_2^1\lambda_1^2)^2(\mu_1^1\mu_2^2 - \mu_2^1\mu_1^2)^2(\nu_1^1\nu_2^2 - \nu_2^1\nu_1^2)^2 u$$

(ce qui est le théorème cité: *Crelle* Journ. tome XXIX p. 54 où j'en ai déduit une propriété singulière de cette fonction).

Ceci est, je crois, l'exemple le plus élégant qu'on puisse donner de la théorie. Remarquons que u peut s'écrire sous les diverses formes

$$u = (ah - bg - cf + de)^2 + 4(ad - bc)(fg - eh),$$
$$u = (ah - bg - de + cf)^2 + 4(af - be)(dg - ch),$$
$$u = (ah - cf - de + bg)^2 + 4(ag - ce)(df - bh),$$

lesquelles sont en effet ce qu'on déduit de l'expression générale de u, qui vient d'être donnée; et on voit que ces formes sont telles qu'elles satisfont aux équations (*A*), qui deviennent pour ce cas particulier

$$1. \quad u = H_2\left(\begin{Vmatrix} a, b, c, d \\ e, f, g, h \end{Vmatrix}\right),$$

$$2. \quad u = H_2\left(\begin{Vmatrix} a, b, e, f \\ c, d, g, h \end{Vmatrix}\right),$$

$$3. \quad u = H_2\left(\begin{Vmatrix} a, c, e, g \\ b, d, f, h \end{Vmatrix}\right),$$

savoir la première forme satisfait aux équations (2.), (3.), la seconde forme aux équations (3.), (1.), la troisième aux équations (1.), (2.). Il est à peine nécessaire de dire que les équations (*D.*) deviennent

$$a\frac{du}{da} + b\frac{du}{db} + c\frac{du}{dc} + d\frac{du}{dd} = 2u, \qquad e\frac{du}{de} + f\frac{du}{df} + g\frac{du}{dg} + h\frac{du}{dh} = 2u,$$

$$a\frac{du}{dc} + b\frac{du}{df} + c\frac{du}{dg} + d\frac{du}{dh} = 0, \qquad e\frac{du}{da} + f\frac{du}{db} + g\frac{du}{dc} + h\frac{du}{dd} = 0$$

etc. etc.

Observons aussi, ce que l'on sait par d'autres considérations, mais ce que j'ai vérifié directement, que l'équation $u = 0$ est celle que l'on obtiendrait en éliminant les variables entre $\frac{dU}{dx_1} = 0$, $\frac{dU}{dx_2} = 0$, $\frac{dU}{dy_1} = 0$, $\frac{dU}{dy_2} = 0$, $\frac{dU}{dz_1} = 0$, $\frac{dU}{dz_2} = 0$. Pour le cas symmétrique,

$$U = \alpha x^3 + 3\beta x^3 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3,$$
$$u = \alpha^2\delta^2 - 6\alpha\delta\beta\gamma - 3\beta^2\gamma^2 + 4\beta^3\delta + 4\alpha^3\gamma,$$
$$u' = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^6 \cdot u.$$

B. $n = 5$.

$$U = a x_1 y_1 z_1 w_1 + b x_2 y_1 z_1 w_1$$
$$+ \text{etc.}(c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P)$$

en posant

$$a = 1111,$$
$$b = 2111,$$
$$\text{etc.}$$

La fonction u doit être à la fois des formes

1. $u = H_2 \left\| \begin{matrix} a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P \end{matrix} \right\|$

2. $u = H_2 \left\| \begin{matrix} a, b, c, d, e, f, g, h, A, B, C, D, E, F, G, H \\ i, j, k, l, m, n, o, p, I, J, K, L, M, N, O, P \end{matrix} \right\|$

3. $u = H_2 \left\| \begin{matrix} a, b, c, d, i, j, k, l, A, B, C, D, I, J, K, L \\ e, f, g, h, m, n, o, p, E, F, G, H, M, N, O, P \end{matrix} \right\|$

4. $u = H_2 \left\| \begin{matrix} a, b, e, f, i, j, m, n, A, B, E, F, I, J, M, N \\ c, d, g, h, k, l, o, p, C, D, G, H, K, L, O, P \end{matrix} \right\|$

5. $u = H_2 \left\| \begin{matrix} a, c, e, g, i, k, m, o, A, C, E, G, I, K, M, O \\ b, d, f, h, j, l, n, p, B, D, F, H, J, L, N, P \end{matrix} \right\|$

(où H_2 n'est pas cependant la même fonction dans les cinq formules). La forme générale de u donnée ci-dessus devient

$$u_1 =$$
$$4 \cdot (ap - bo - cn - dm - el + fk + gj - hi)(AP - BO - CN + DM - EL + FK + GJ - HI)$$
$$- (aP - bO - cN + dM - eL + fK + gJ - hI - iH + jG + kF - lE + mD - nC - oB + pA)^2$$

qui est évidemment des formes (2.), (3.), (4.), (5.) mais non pas évidemment de la forme (1.). On obtiendrait de la même formule générale, mais en plaçant le (+) au dessus des autres colonnes, quatre autres valeurs de u — u_2, u_3, u_4, u_5, dont u_2 serait évidemment des formes (1.), (3.), (4.), (5.) mais non pas évidemment de la forme (2.), et ainsi de suite. Toutes les valeurs u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 sont diverses; quoique je crois qu'elles ne sont pas toutes indépendantes je n'ai pas pu encore m'en assurer. J'ai vérifié a posteriori que u_1 était en effet de la forme (1.), en réduisant la différence $u_1 - u_2$ à la somme d'une suite

de termes dont chacun était le produit de deux déterminants, ces déterminants étant compris dans la suite

$$\left\| \begin{matrix} a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p \\ A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P \end{matrix} \right\|$$

III. $p = 3$, $m = 2$, $n = 4$. Notation comme en I. (*C.*).

$$u = A(\mathfrak{A} + 3\mathfrak{B} + 3\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D} + 6\mathfrak{E}) - B(\mathfrak{C} + \mathfrak{D} - 3\mathfrak{E} - \mathfrak{F} + 2\mathfrak{G} + 3\mathfrak{H}),$$

où A, B sont des constantes arbitraires et $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ des fonctions données par les équations

$$\mathfrak{A} = a^3p^3 - b^3o^3 - c^3n^3 + d^3m^3 - e^3l^3 + f^3k^3 + g^3j^3 - h^3i^3,$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B} = &- a^2p^2bo + b^2o^2ap + c^2n^2dm - d^2m^2cn + e^2l^2fk - elf^2k^2 - g^2j^2hi + gjh^2i^2 \\ &- a^2p^2cn + b^2o^2dm + c^2n^2ap - d^2m^2bo + e^2l^2gj - f^2k^2hi - g^2j^2el + h^2i^2fk \\ &- a^2p^2el + b^2o^2fk + c^2n^2gj - d^2m^2hi + e^2l^2ap - f^2k^2bo - g^2j^2cn + h^2i^2dm \\ &- a^2p^2hi + b^2o^2gj + c^2n^2fk - d^2m^2el + e^2l^2dm - f^2k^2cn - g^2j^2bo + h^2i^2ap,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} = &\ a^2p^2dm - b^2o^2cn - c^2n^2bo + d^2m^2ap - e^2l^2hi + f^2k^2gj + fkg^2j^2 - h^2i^2el \\ &+ a^2p^2fk - b^2o^2el - c^2n^2hi + d^2m^2gj - e^2l^2bo + f^2k^2ap + g^2j^2dm - h^2i^2cn \\ &+ a^2p^2gj - b^2o^2hi - c^2n^2el + d^2m^2fk - e^2l^2cn + f^2k^2dm + g^2j^2ap - h^2i^2bo,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} = &\ apbocn - apbodm - apcndm + bocndm - elfkgj + elfkhi + elgjhi - higjfk \\ &+ apboel - apbofk - cndmgj + dmcnhi - elfkap + elfkbo + gjhicn - higjdm \\ &- apbogj + apbohi + cndmel - dmcnkf + elfkcn - elfkdm - gjhiap + higjbo \\ &+ apcnel - bodmfk - cnapgj + dmbohi - elgjap + fkhibo + gjelcn - hifkdm \\ &- apcnfk + bodmel + cnaphi - dmboel + elgjbo - fkhiap - gjeldm + hifkcn \\ &- apdmel + bocnkf + cmbogj - dmaphi + elhiap - fkgjbo - gjfkcn + hidmel,\end{aligned}$$

$$\mathfrak{E} = apdmfk - bocnel - bocnhi + dmapgj - elhibo + fkapgj + gjfkdm - hielcn,$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = &\ a^2phjo - b^2goip - c^2nflm + d^2emkn - e^2dlkn + f^2ckml + g^2bjpi - h^2aijo \\ &- i^2phbg + j^2ogah + k^2nfde - l^2mecf + m^2ldcf - n^2ckde - o^2bjah + p^2aibg \\ &+ a^2phkn - b^2golm - c^2nfip + d^2mejo - e^2dljo + f^2ckip + g^2bjml - h^2aink \\ &- i^2phcf + j^2ogde + k^2nfah - l^2mebg + m^2ldbg - n^2ckah - o^2bjde + p^2aicf \\ &+ a^2phlm - b^2gokn - c^2nfjo + d^2emip - e^2ldip + f^2ckjo + g^2bjnk - h^2aiml \\ &- i^2phde + j^2gocf + k^2nfbg - l^2meah + m^2dlah - n^2ckbg - o^2bjcf + p^2aide \\ &+ a^2pdno - b^2cmpo - c^2bpmn + d^2aomn - e^2hjkl + f^2gilk + g^2flij - h^2ekji \\ &- i^2lfgh + j^2kegh + k^2jhef - l^2igfe + m^2pbcd - h^2aocd - o^2ndab + p^2mbca \\ &+ a^2plng - b^2hkmo - c^2ejpn + d^2fiom - e^2cpjl + f^2doik + g^2anlj - h^2bmki \\ &- i^2odfh + j^2pceg + k^2mhbf - l^2nage + m^2khbd - n^2lgue - o^2ifbd + p^2jeca \\ &+ a^2plfo - b^2ekpo - c^2hjmn + d^2gimn - e^2bpkl + f^2aolk + g^2dnij - h^2cmji \\ &- i^2ndgh + j^2mhcg + k^2pbef - l^2oafe + m^2jhcd - n^2igcd - o^2lfab + p^2keba,\end{aligned}$$

$$\mathfrak{G} = apbgkn - boalhm - cndiep + dmcjfo - elfocj + fkpied + gjhmla - hignbk$$
$$- ihjocf + gjidep + kflamh - lekbng + mdnbkg - ncmhal - obpied + paofjc$$
$$+ apbglm - boahkn - cndejo + dmcfip - elcfip + fkedoj + gjhakn - hibgml$$
$$- ihjode + gjipcf + kflmbg - leknah + mdknah - ncmlbg - obpicf + paojde$$
$$+ apcflg - bojehk - cnjehk + dmilgf - elmpbc + fkadno + gjadno - hipmcb$$
$$- ihadno + gjbmcp + kfcbpm - eladno + mdjehk - ncilfg - obilfg + pahejk$$
$$+ apcflm - bodkne - cnahjo + dmbgip - elbgip + fkahjo + gjednk - hicfml$$
$$- ihknde + mdahjo + kfipbg - bocfml + gjcfml - ncpigb - leahjo + paknde$$
$$+ apidng - bojcmh - cnbkpe + dmaflo - elmhjc - fkidng + gjaflo - ihbkpe$$
$$- ihaflo + gjbkpe + fkcjhm - elidng + mdbkpe - cnaflo - boidng + pahmcj$$
$$+ apidfo - bojcep - cnbkhm + dmalng - elmnbk - fkalng + gjidfo - ihpecj$$
$$- ihalng + gjkbmh + fkcjpe - elidfo + mdjcep - ncidfo - obalng + pahmbk,$$

$$\mathfrak{H} = a^2honl - b^2pgmk - c^2pfmj + d^2onie - e^2dpkj + f^2ilco + g^2blni - h^2amkj$$
$$- i^2pdfg + j^2oech + k^2nbeh - l^2mafg + m^2blch - n^2kadg - o^2jadf + p^2ibec.$$

Pour expliquer la manière d'obtenir cette expression, observons d'abord que tous les termes de u se forment du type:

1111
1111
1111
2222
2222
2222

En permutant d'une manière quelconque les nombres dans les colonnes verticales, et prenant ensuite le produit des coëfficiens représentés par les lignes horizontales (par exemple, en prenant la combinaison qui vient d'être écrite, on a le terme 111, 111, 111, 222, 222, 222 savoir a^3p^3). D'un terme quelconque on obtient un certain groupe de termes, en échangeant entre eux dans une colonne ou dans plusieurs colonnes tous les '1' et les '2' et en transposant ensuite d'une manière quelconque les colonnes entières. Prenant un terme non compris dans ce groupe, on obtient un autre groupe, et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les termes soient obtenus (il faut aussi changer le signe chaque fois qu'on échange entre eux les '1' et les '2' dans une colonne). De cette manière on forme les huit fonctions $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$. Mais pour les coëfficiens, j'ai été forcé de me servir d'une substitution actuelle dans une des équations (*D*.).

On a ensuite l'équation ordinaire

$$\overset{****}{u} = (\lambda_1^1\lambda_2^2 - \lambda_2^1\lambda_1^2)^3(\mu_1^1\mu_2^2 - \mu_2^1\mu_1^2)^3(\nu_1^1\nu_2^2 - \nu_2^1\nu_1^2)^3(\varrho_1^1\varrho_2^2 - \varrho_2^1\varrho_1^2)^3 \cdot u.$$

Si en particulier $A = 1$, $B = 0$, on a

$$u = \mathfrak{A} + 3\mathfrak{B} + 3\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D} + 6\mathfrak{E}$$
$$= (ap - bo - cn + dm - el + fk + gj - hi)^3, \text{ ce que nous poserons} = \Pi^3.$$

Si $A = 1$, $B = 9$, on a

$u = \mathfrak{A} + 3\mathfrak{B} - 6\mathfrak{C} - 3\mathfrak{D} + 33\mathfrak{E} + 9\mathfrak{F} - 18\mathfrak{G} - 27\mathfrak{H}$, ce que nous poserons $= \Theta U$,

où $\Theta U = 0$ est ce que l'on obtiendrait en éliminant les variables entre les équations $\frac{dU}{dx_1} = 0$, $\frac{dU}{dy_1} = 0$, $\frac{dU}{dz_1} = 0$, $\frac{dU}{dw_1} = 0$, $\frac{dU}{dx_2} = 0$, $\frac{dU}{dy_2} = 0$, $\frac{dU}{dz_2} = 0$, $\frac{dU}{dw_2} = 0$. En effet on sait que le résultat de cette élimination est une équation de la forme $u = 0$, en déterminant convenablement la constante arbitraire, ce que j'ai fait pour le cas symmétrique, pour lequel j'ai trouvé

$$\frac{B}{A} = 9.$$

On a ainsi en général

$$u = \alpha\Pi^3 + \beta\Theta U,$$

et de là

$$\alpha\overset{****}{\Pi}^3 + \beta\overset{****}{\Theta U} = M(\alpha\Pi^3 + \beta\Theta U),$$

en représentant par M le facteur qui multiplie le second côté de l'équation: cela donne les deux formules

$$\overset{****}{\Pi}^3 = M\Pi^3, \qquad \overset{****}{\Theta U} = M.\Theta U,$$

dont la première a été trouvée auparavant: en éliminant M,

$$\frac{\overset{****}{\Theta U}}{\overset{****}{\Pi}^3} = \frac{\Theta U}{\Pi^3},$$

équation remarquable, en ce qu'elle ne contient que les coëfficiens des deux fonctions U et $\overset{****}{U}$; c'est une équation de condition entre ces quantités, pour que les deux fonctions puissent se transformer l'une dans l'autre par les substitutions linéaires. Pour le cas symmétrique

$$U = \alpha x^4 + 4\beta x^3 y + 6\gamma x^2 y^2 + 4\delta x y^3 + \varepsilon y^4,$$
$$\Pi = \alpha\varepsilon - 4\beta\delta + 3\gamma^2 \text{ comme auparavant}$$
$$\Theta U = \alpha^3\varepsilon^3 - 6\alpha\beta^2\delta^2\varepsilon - 12\alpha^2\beta\delta\varepsilon^2 - 18\alpha^2\gamma^2\varepsilon^2 - 27\alpha^2\delta^4 - 27\beta^4\varepsilon^2$$
$$+ 36\beta^2\gamma^2\delta^2 + 54\alpha^2\gamma\delta^2\varepsilon + 54\alpha\beta^2\gamma\varepsilon^2 - 54\alpha\gamma^3\delta^2 - 54\beta^2\gamma^3\varepsilon$$
$$- 64\beta^3\delta^3 + 81\alpha\gamma^4\varepsilon + 108\alpha\beta\gamma\delta^3 + 108\beta^3\gamma\delta\varepsilon - 180\alpha\beta\gamma^2\delta\varepsilon.$$

Or en prenant pour ΘU cette forme moins réduite

$$\Pi^3 - 9.(\mathfrak{C} + \mathfrak{D} - 3\mathfrak{E} - \mathfrak{F} + 2\mathfrak{G} + 3\mathfrak{H}),$$

on reconnait que $\frac{1}{3}(\mathfrak{C} + \mathfrak{D} - 3\mathfrak{E} - \mathfrak{F} + 2\mathfrak{G} + 3\mathfrak{H})$ est un quarré parfait, de manière que

$$\Theta U = \Pi^3 - 27\, T^2$$

où

$$T = (\alpha\gamma\varepsilon - \alpha\delta^2 - \varepsilon\beta^2 - \gamma^3 + 2\beta\gamma\delta) = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \beta, & \gamma, & \delta \\ \delta, & \gamma, & \varepsilon \end{vmatrix}$$

de manière que l'on a

$$T' = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)^9 . T,$$

c'est-à-dire pour le cas symmétrique, il y a une fonction T qui jouit de la propriété charactéristique des hyperdéterminants, mais qui n'a pas d'analogue dans le cas général. C'est une remarque importante que je dois à M. *Boole* et qui fait une différence essentielle entre les deux théories. La liaison des constantes de U et U', nécessaire pour que ces fonctions puissent se réduire l'une à l'autre, s'exprime dans la forme très simple

$$\frac{\Pi'^3}{T'^2} = \frac{\Pi^3}{T^2}.$$

II.

En continuant mes recherches sur ce sujet, je suis parvenu à une nouvelle manière d'envisager le problème, qui en même temps qu'elle est beaucoup plus générale, a l'avantage de s'appliquer directement au seul cas que l'on peut espérer de développer, celui des fonctions à deux variables. On peut en effet se proposer la question: „Trouver toutes les dérivées d'un nombre quelconque de fonctions, qui aient la propriété de ne pas changer de forme, en faisant subir aux variables des transformations linéaires quelconques." J'entends par „Dérivée" une fonction qui se dérive d'une manière quelconque des fonctions données, et j'appelle dérivée hyperdéterminante, ou simplement hyperdéterminant, les dérivées douées de la propriété qui vient d'être énoncée. Or, ces dérivées s'expriment très facilement d'une manière explicite, en se servant de la méthode connue de la séparation des symboles. On obtient ainsi l'expression la plus générale d'un hyperdéterminant quelconque. Il reste cependant une question

à résoudre, laquelle à ce qu'il parait présente les plus grandes difficultés, celle de déterminer les dérivées ***indépendantes*** et la liaison entre celles-ci et les autres. Je n'ai reussi qu'à traiter un cas très particulier qui fait voir cependant de quelle manière on devrait aborder le problème général.

Imaginons p suites chacune d'un nombre m de variables

$x_1, y_1, \ldots$ etc., $x_2, y_2, \ldots$ etc., $\ldots\ldots$ $x_p, y_p, \ldots$ etc.

(le nombre p au moins aussi grand que m).

De même p' suites, chacune d'un nombre m' de variables

$x'_1, y'_1, \ldots$ etc., $x'_2, y'_2, \ldots$ etc., $\ldots$ $x'_{p'}, y'_{p'}, \ldots$ etc.

(le nombre p' au moins aussi grand que m') et ainsi de suite. Soient de plus, des variables analogues $\dot{x}, \dot{y}$ etc. liées avec celles-ci par les équations

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \lambda\dot{x} + \mu\dot{y} + \ldots \\
\dot{y} &= \lambda'\dot{x} + \mu'\dot{y} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{x}' &= \lambda''\dot{x}' + \mu''\dot{y}' + \ldots \\
\dot{y}' &= \lambda'''\dot{x}' + \mu'''\dot{y}' + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

où par $x, y, \ldots$ on peut entendre $x_1, y_1, \ldots$ ou $x_2, y_2, \ldots$ ou $x_p, y_p, \ldots$ — par $x', y', \ldots$ on peut entendre $x'_1, y'_1, \ldots$ ou $x'_2, y'_2, \ldots$ ou $x'_{p'}, y'_{p'}, \ldots$ etc. Les coëfficiens $\lambda, \mu, \ldots, \lambda', \mu', \ldots$ etc.; $\lambda'', \mu'', \ldots, \lambda''', \mu''', \ldots$ etc. restent les mêmes dans tous ces systèmes. Soit en général

$$\xi = \partial_x, \quad \eta = \partial_y, \quad \ldots\ldots$$

c'est-à-dire

$$\xi_1 = \partial_{x_1}, \quad \dot{\xi}_1 = \partial_{\dot{x}_1}, \quad \ldots\ldots$$

(en se servant de ∂_x etc. pour les symboles de différentiation relative à x etc.). On a évidemment,

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \lambda\xi + \lambda'\eta + \ldots \\
\dot{\eta} &= \mu\xi + \mu'\eta + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

avec des équations semblables pour $\dot{\xi}', \dot{\eta}', \ldots$. Écrivons

$$\|\Omega\| = \begin{Vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \ldots & \xi_p \\ \eta_1, & \eta_2, & \ldots & \eta_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}, \qquad \|\Omega'\| = \begin{Vmatrix} \xi'_1, & \xi'_2, & \ldots & \xi'_{p'} \\ \eta'_1, & \eta'_2, & \ldots & \eta'_{p'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix};$$

c'est-à-dire $\|\Omega\|$ désigne la suite des Déterminants formés en choisissant m colonnes verticales quelconques pour en composer un déterminant, et ainsi pour $\|\Omega`\|$ etc. Soient encore

$$E = \left\| \begin{matrix} \lambda, & \mu, & \ldots \\ \lambda', & \mu', & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|, \quad E` = \left\| \begin{matrix} \lambda`, & \mu`, & \ldots \\ \lambda'`, & \mu'`, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|$$

On a par les propriétés connues des déterminants

$$\|\dot{\Omega}\| = E\|\Omega\|, \quad \|\dot{\Omega}`\| = E`\|\Omega`\| \text{ etc.},$$

c'est-à-dire les termes d'un côté de l'équation sont respectivement égaux à ceux de l'autre côté. Donc en posant

$$\square = F(\|\Omega\|^f, \|\Omega`\|^{f`}, \ldots.),$$

c'est-à-dire $\square$ une fonction rationelle et entière, homogène de l'ordre f pour les quantités de la suite $\|\Omega\|$, homogène de l'ordre $f`$ pour les quantités de la suite $\|\Omega`\|$ etc., on obtient tout de suite

$$\dot{\square} = E^f . E`^{f`} \ldots . \square.$$

Soit enfin U une fonction quelconque des variables $x, y, \ldots.$ qui se transforme en $\dot{U}$, fonction des variables $\dot{x}, \dot{y}, \ldots.$ En appliquant $\square$, $\dot{\square}$ à U, $\dot{U}$,

$$\dot{\square}\dot{U} = E^f . E`^{f`} \ldots . \square U.$$

Donc la fonction

$$\square U$$

est ce que nous avons nommé Dérivée hyperdéterminante. On peut dire que l'expression $\square$ est symbole de dérivation hyperdéterminante, ou symbole hyperdéterminant.

Représentons par $A, B, \ldots.$ les différentes quantités de la suite $\|\Omega\|$, par $A`, B`$ celles de la suite $\|\Omega`\|$ etc. On peut réduire $\square$ à un seul terme et écrire

$$\square = A^\alpha B^\beta \ldots . A`^{\alpha`} B`^{\beta`} \ldots .$$

Nous supposerons aussi que U se réduit au produit

$$\Theta . \Phi \ldots .$$

où Θ, Φ etc. .... sont des fonctions des variables de l'une des suites $x, y, \ldots.$, de l'une des suites $x`, y`, \ldots.$ etc. Par exemple Θ est de la forme

$$F(x_1, y_1, \ldots . x_1`, y_1`, \ldots.),$$

et ainsi pour les autres. Les fonctions Θ, Φ etc. peuvent être les mêmes ou différentes. On peut enfin après les différentiations supposer qu'un nombre quelconque des suites $x, y, \ldots.$ ou des suites $x`, y`, \ldots.$ deviennent identiques; nous supposerons ordinairement que les fonctions Θ etc. où entrent ces

suites identiques, soient des fonctions semblables, de manière qu'en faisant identiques les variables elles deviennent absolument les mêmes. L'expression générale d'un hyperdéterminant est donc

$$\square U = A^{\alpha} B^{\beta} \ldots . A'^{\alpha'} B'^{\beta'} \ldots . \Theta \Phi \ldots .$$

en faisant égales, après les différentiations, un nombre quelconques des suites. Par exemple, si toutes les suites $x, y, \ldots .$ et toutes les suites $x', y', \ldots .$ etc. deviennent identiques, cet hyperdéterminant se rapporte à la seule fonction $\Theta = F(x, y, \ldots . x', y', \ldots .)$. Dans tout autre cas, elle se rapporte non plus à une seule fonction, mais à plusieurs.

Voilà la théorie générale J'ai taché de l'expliquer avec la plus grande généralité possible, mais il faut avouer qu'elle aurait été plus facile à comprendre, si je m'étais borné à un cas particulier; cependant en appliquant les raisonnemens dès le commencement à un tel cas, on verra qu'il n'y a rien de réellement difficile là dedans. Passons à présent à quelques développements. Pour cela, je néglige entièrement les suites $x', y', \ldots .$ et je suppose que le nombre m des variables dans chaque suite $x, y, \ldots .$ se réduit à deux; de manière que je considère seulement les fonctions à deux variables x, y. Les fonctions $\Theta, \Phi, \ldots .$ se réduisent à des fonctions $V_1, V_2, \ldots . V_p$ des variables $x_1, y_1, \ldots .$ ou $x_2, y_2, \ldots .$ ou x_p, x_p. En écrivant aussi

$$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = \overline{12} \text{ etc. } \ldots .$$

les symboles $A, B, \ldots .$ se réduisent à $\overline{12}, \overline{13}$ etc. $\ldots .$ On a donc pour les fonctions à deux variables, cette formule, encore assez générale

$$\square U = \overline{12}^{\alpha} . \overline{13}^{\beta} . \overline{14}^{\gamma} \ldots . \overline{23}^{\beta'} . \overline{24}^{\gamma'} \ldots . \overline{34}^{\gamma''} \ldots . V_1 . V_2 . V_3 . V_4 \ldots .$$

Les fonctions $V_1, V_2, V_3, V_4, \ldots .$ peuvent être les mêmes ou différentes: mais nous supposons qu'elles sont les mêmes chaque fois que nous faisons égales les variables correspondantes. On marquera cette égalité en écrivant par exemple

$$\square V V' V V_4 \ldots .$$

qui représente ce que devient

$$\square V_1 V_2 V_3 V_4,$$

en supposant après les différentiations

$$x_1, y_1 = x_3, y_3 = x_4, y_4 = x, y,$$
$$x_2, y_2 = x', y'$$
$$\text{etc.}$$

Il est facile de trouver le terme général de $\square U$. Pour cela mettons pour abréger

$$\alpha + \beta + \gamma \ldots = f_1,$$
$$\alpha + \beta' + \gamma' \ldots = f_2,$$
$$\beta + \beta' + \gamma'' \ldots = f_3$$
etc.

$$N = (-)^{r+s+t+\ldots r'+s'+\ldots t'} \cdot \frac{[\alpha]^r}{[r]^r} \cdot \frac{[\beta]^s}{[s]^s} \cdot \frac{[\gamma]^t}{[t]^t} \ldots \frac{[\beta']^{s'}}{[s]^{s'}} \cdot \frac{[\gamma']^{t'}}{[t']^{t'}} \ldots \frac{[\gamma'']^{t''}}{[t'']^{t''}} \ldots$$

$$\xi^{f-r} \eta^r V = \partial_x^{f-r} \partial_y^r V = \overset{f}{V}_{,r} \quad \text{ou} \quad V_{,r}.$$

Le terme général devient

$$N \overset{f_1}{V}_{1,r+s+t\ldots} \overset{f_2}{V}_{2,\alpha-r+s'+t'\ldots} \overset{f_3}{V}_{3,\beta-s+\beta'-s'+t'\ldots} \ldots,$$

où $r, s, t, \ldots s', t', \ldots t'', \ldots$ s'étendent depuis 0 jusqu'à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ $\beta', \gamma', \ldots \gamma'', \ldots$ respectivement. Il serait facile de changer la forme de ce terme général, de la même manière dont nous ferons cela un peu plus loin, pour le cas particulier $\square V_1 . V_2 . V_3$.

On voit delà en supposant que plusieurs des fonctions deviennent identiques et que pour ces fonctions identiques quelques unes des lettres f soient les mêmes, que la dérivée $\square U$ se rapporte à un certain nombre de fonctions $V_2, V_2, \ldots$ les mêmes ou différentes de $x, y : x', y', \ldots$ et de plus que cette dérivée est homogène des degrés $\theta_1, \theta_1', \ldots$ par rapport aux coëfficiens différentiels de V_1 des ordres $f_1, f_1', \ldots$ (donc homogène du degré $\theta_1 + \theta' + \ldots$ par rapport à tous ces coëfficiens ensemble), homogène des degrés $\theta_2, \theta', \ldots$ par rapport aux coëfficiens différentiels de V_2 des ordres $f_2, f_2', \ldots$ respectivement (donc du degré $\theta_2 + \theta_2' + \ldots$ par rapport à tous ces coëfficiens ensemble), et ainsi de suite. Le degré par rapport à toutes les fonctions ensemble est $\theta_1 + \theta_1' + \ldots \theta_2 + \theta_2' +$ etc. $= p$. Ordinairement nous ne considérons qu'une seule fonction, et nous supposerons que $\square U$ ne contient que les coëfficiens de l'ordre. La dérivée en ce cas est „du degré p et de l'ordre f." Il convient de classer les dérivées par les degrés, plutôt que par les ordres.

Prenons le cas le plus simple; celui des dérivées du second degré. En écrivant V, W au lieu de V_1, V_2 cela donne

$$\square VW = \overline{12}^{\alpha} VW$$

(où ξ_1, η_1 s'appliquent à V, et ξ_2, η_2 à W). Nous allons dans la suite représenter cela par la notation constante

$$\overline{12}^{\alpha} . VW = B_{\alpha}(V, W).$$

On a donc, en supposant

$$\partial_x^\alpha V = V^{,0}, \quad \partial_x^{\alpha-1}\partial_y V = V^{,1}, \quad \ldots,$$

$$B_\alpha(V,W) = V^{,0}V^{,\alpha} - \frac{[\alpha]^1}{1} V^{,1}W^{,\alpha-1} \ldots + (-)^\alpha . V^{,\alpha}W^{0},$$

ou en particulier pour les deux cas de α impair et α pair,

$$B_\alpha(V,V) = 0,$$

$$B_\alpha(V,V) = 2\left\{V^{,0}V^{,\alpha} - \frac{[\alpha]^1}{1} V^{,1}V^{,\alpha-1} + \ldots\right\}$$

continué jusqu'au terme qui contient $V^{,\frac{1}{2}\alpha}V^{,\frac{1}{2}\alpha}$.

Considérons en particulier les fonctions $\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)$, $\frac{1}{2^1 4}(ax^4+4bx^3y+6cx^2y^2+4dxy^3+ey^4)$, ... En faisant successivement $\alpha = 2, 4, \ldots$ on obtient les dérivées constantes

$$\begin{array}{l} ac-b^2 \\ ae-4bd+3c^2 \\ ag-6bf+15ce-10d^2 \\ ai-8bh+28cg-56df+35e^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

qui ont toutes la propriété de rester les mêmes, à un facteur près qui est une puissance de $\lambda\mu' - \lambda'\mu$, en transformant les variables au moyen de $x = \lambda\dot{x} + \mu\dot{y}$, $y = \lambda'\dot{x} + \mu'\dot{y}$. Par exemple si ces équations donnent

$$ax^2+2bxy+cy^2 = \dot{a}\dot{x}^2+2\dot{b}\dot{x}\dot{y}+\dot{c}\dot{y}^2$$

on a

$$\dot{a}\dot{c}-\dot{b}^2 = (\lambda\mu'-\lambda\mu')^2.(ac-b^2),$$

et ainsi par les autres. C'est la propriété générale, que nous rappelons à la mémoire, pour ces dérivées constantes.

On peut transformer les dérivées au moyen de l'équation identique

$$B_\alpha(V,W) = \overline{12}^{\alpha-k} B_k(V,W)$$

en remarquant la formule générale

$$\xi_1^\lambda \eta_1^\mu \xi_2^\varrho \eta_2^\sigma B_k(V,W) = B_k(\xi^\lambda\eta^\mu . V, \xi^\varrho\eta^\sigma W).$$

Soit par exemple $k=1$, on obtient ces nouvelles formes des dérivées constantes

$$\begin{array}{l} ac-b^2 \\ (ae-bd)-3(bd-c^2) \\ (ag-bf)-5(bf-ce)+10(ce-d^2) \\ (ai-bh)-7(bh-cg)+21(cg-df)-35(df-e^2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

dont la loi est évidente. Cela fait voir que ces fonctions peuvent s'exprimer linéairement au moyen des suites des déterminants

$$\left\| \begin{matrix} a, b \\ b, c \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} a, b, c \\ b, c, d \end{matrix} \right\| \quad \text{etc.}$$

On déduit facilement de ces formes, les dérivées B relatives à deux fonctions. Par exemple, pour des fonctions du sixième ordre, cette dérivée est

$$ag' + a'g - 6(bf' + b'f) + 15(ce' + c'e) - 20dd'$$

qui a une relation évidente à

$$ag - 6bf + 15ce - 10d^2.$$

Cette remarque s'étend aux dérivées de tous les degrés.

Il est facile de vérifier le théorème suivant; mais cela doit se rattacher à quelque théorie générale que j'ignore:

Soient U, V des fonctions du second ordre et $W = \lambda U + \mu V$: l'équation

$$B_2'[B_2(W, W), B_2(W, W)] = 0$$

(où l'opération B_2' se rapporte aux variables λ, μ) sera la même que l'on obtiendrait en éliminant x, y entre les équations $U = 0$, $V = 0$.

En effet cette équation se réduit à

$$4(ac - b^2)(a'c' - b'^2) - (ac' + a'c - 2bb')^2 = 0$$

qui est une des formes sous lesquelles peut s'écrire l'équation obtenue en éliminant x, y entre deux équations quadratiques. C'est un remarque que je dois à M. ***Boole***.

Passons au troisième degré, et considérons en particulier, les dérivées

$$\square UVW = \overline{23}^{\alpha}\, \overline{31}^{\alpha}\, \overline{12}^{\alpha}\, UVW = C_\alpha(U, V, W).$$

En mettant pour abréger

$$A_p = \frac{[\alpha]^r}{[r]^r}, \qquad \partial_x^{2\alpha - r}\, \partial_y^r = U^{,r}$$

on obtient le terme général

$$C_\alpha(U, V, W) = \Sigma\{(-)^{r+s+t} A_r A_s A_t U^{,\alpha+t-s} V^{,\alpha+r-t} W^{,\alpha+s-r}\},$$

où r, s, t s'étendent depuis 0 jusqu'à α. En changeant les suffixes r, s on obtient cette formule plus commode

$$C_\alpha(U, V, W) = \Sigma\Sigma\{(-)^{\sigma+\varrho} U^{,\varrho} V^{,\sigma} W^{,3\alpha-\varrho-\sigma} \Sigma[(-)^t A_{\varrho-t} A_{\sigma+t-\alpha} A_t]\}$$

dans laquelle t s'étend depuis 0 jusqu'à α; ϱ, σ, $3\alpha - \varrho - \sigma$ doivent être positifs et non pas plus grands que 2α.

En particulier pour α impair et α pair on a

$$C_\alpha(U, U, U) = 0,$$

$$C_\alpha(U, U, U) = 6\Sigma\Sigma\{(-)^{\varrho+\sigma} U^{,\varrho} U^{,\sigma} U^{,3\alpha-\varrho-\sigma} \Sigma[(-)^t A_{\varrho-t} A_{\sigma+t-\alpha} A_t]\},$$

en omettant les valeurs de ϱ, σ pour lesquelles $\varrho > \sigma$ ou $\sigma > 3\alpha - \varrho - \sigma$, et ayant soin de diviser par 2, les termes pour lesquels $\varrho = \sigma$ ou $\sigma = 3\alpha - \varrho - \sigma$, et par 6 celui pour lequel ces deux équations existent à la fois (c'est-à-dire $\varrho = \sigma = \alpha$).

En particulier pour les fonctions du quatrième ou du huitième ordre, on obtient les dérivées constantes

$$ace - ad^2 - eb^2 - c^3 + 2bdc$$

$$aei - 4ibd - 4afh + 3ag^2 + 3ic^2 + 12beh - 8chd - 8bgf - 22ceg + 24cf^2 + 24d^2g - 36def + 15e^3$$

etc. dont la première est un déterminant simple. Ainsi nous sommes retombés sur les deux fonctions $ae - 4bd + 3c^2$, $ace - ad^2 - eb^2 - c^3 + 2bdc$ qui se trouvent dans mon „Note sur quelques formules etc." et dans les formes que M. *Eisenstein* a données pour la solution des équations des premiers quatre degrés.

Soit U une fonction de l'ordre 4α: on peut exprimer la dérivée C_α au moyen des dérivées B.

En effet considérons cette fonction

$$B_{4\alpha}[U, B_{2\alpha}(V, W)]$$

en se souvenant de la signification de $B_{4\alpha}$, cela pourra s'écrire sous la forme

$$\overline{1\theta}^{4\alpha} . \overline{23}^{2\alpha} . UVW,$$

où les symboles ξ_θ, η_θ se rapportent aux deux systèmes $x_2, y_2 : x_3, y_3$. On voit facilement qu'il faut écrire

$$\xi_\theta = \xi_2 + \xi_3, \quad \eta_\theta = \eta_2 + \eta_3 \quad \text{ou} \quad \overline{1\theta} = \overline{12} + \overline{13} = \overline{12} - \overline{31}.$$

Delà cette transformation

$$(\overline{12} - \overline{31})^{4\alpha} \overline{23}^{2\alpha} UVW$$

dont tous les termes s'évanouissent excepté

$$\frac{[4\alpha]^{2\alpha}}{[2\alpha]^{2\alpha}} \overline{12}^{2\alpha} \overline{23}^{2\alpha} \overline{31}^{2\alpha} UVW.$$

Donc en écrivant

$$K = \frac{[4\alpha]^{2\alpha}}{[2\alpha]^{2\alpha}} = \frac{2^{4\alpha} 1.3.... \overline{4\alpha - 1}}{2.4.... 4\alpha}, \text{ on a}$$

$$B_{4\alpha}[U, B_{2\alpha}(V, W)] = K C_\alpha(U, V, W),$$

ou en particulier

$$B_{4\alpha}[U, B_{2\alpha}(U, U)] = K\, C_\alpha(U, U, U).$$

Par exemple, aux facteurs numériques près, on a

$$(ax^2+2bxy+cy^2)(cx^2+2dxy+ey^2)-(bx^2+2cxy+dy^2)^2 =$$
$$(ac-b^2)x^4+2(ad-bc)x^3y+(ae+2bd-3c^2)x^2y^2+2(be-cd)xy^3+(ce-d^2)y^4$$

et puis

$$c(ac-b^2)-4d.\tfrac{2}{4}(ad-bc)+bc.\tfrac{1}{6}(ae+2bd-3c^2)-4b.\tfrac{2}{4}(be-cd)+a(ce-d^2)$$
$$= 3(ace-ad^2-be^2-c^3+2bcd).$$

On a aussi cette expression singulière

$$B_{2\alpha}(V, W) = K\left(x^{4\alpha}\frac{d}{da_{4\alpha}} - x^{4\alpha-1}y\frac{d}{da_{4\alpha-1}} \ldots + y^{4\alpha}\frac{d}{da_0}\right).C_{2\alpha}(U, V, W),$$

dans laquelle

$$U = \frac{1}{[4\alpha]^{4\alpha}}\left(a_0x^{4\alpha} - \frac{[4\alpha]^1}{1}a_1x^{4\alpha-1}y \ldots + a_{4\alpha}y^{4\alpha}\right) \text{ etc.}$$

Si les fonctions deviennent identiques, il faut cependant écrire

$$B_{2\alpha}(U, U) = \tfrac{1}{3}K\left(x^{4\alpha}\frac{d}{da_{4\alpha}} - x^{4\alpha-1}y\frac{d}{da_{4\alpha-1}} \ldots + y^{4\alpha}\frac{d}{da_0}\right)C_{2\alpha}(U, U, U),$$

il est facile d'en voir la raison. Nous reviendrons plus loin sur ces formules.

On transforme les fonctions C, de la même manière comme nous avons transformé les B. En effet

$$C_\alpha(U, V, W) = \overline{12}^{\alpha-k}\,\overline{23}^{\alpha-k}\,\overline{31}^{\alpha-k}.C_k(U, V, W).$$

Soit en particulier $k=1$, on a

$$C_1(U, V, W) = \begin{vmatrix} U^{,0}, & U^{,1}, & U^{,2} \\ V^{,0}, & V^{,1}, & V^{,2} \\ W^{,0}, & W^{,1}, & W^{,2} \end{vmatrix}, \quad U^{,0} \text{ pour } \overset{2}{U}{}^{,0} \text{ etc.},$$

mais en général

$$\xi_1^{\varrho'}\eta_1^{\varrho}.\xi_2^{\sigma'}\eta_2^{\sigma}.\xi_3^{\tau'}\eta_3^{\tau}.C_1(U, V, W) \quad \text{où} \quad \varrho+\varrho'=\sigma+\sigma'=\tau+\tau'=2\alpha-2,$$
$$= C_1(\overset{2\alpha-2}{U}{}^{,\varrho}, \overset{2\alpha-2}{V}{}^{,\sigma}, \overset{2\alpha-2}{W}{}^{,\tau}) = \begin{vmatrix} U^{,\varrho}, & U^{,\varrho+1}, & U^{,\varrho+2} \\ V^{,\sigma}, & V^{,\sigma+1}, & V^{,\sigma+2} \\ W^{,\tau}, & W^{,\tau+1}, & W^{,\tau+2} \end{vmatrix}, \quad U^{,\varrho} \text{ pour } \overset{2\alpha}{U}{}^{,\varrho} \text{ etc.}$$

et delà on déduit

$$C_\alpha(U, V, W) = \Sigma\Sigma\{(-)^{\varrho+\sigma}\begin{vmatrix} U^{,\varrho}, & V^{,\sigma-1}, & W^{,3\alpha-\varrho-\sigma-2} \\ U^{,\varrho+1}, & V^{,\sigma}, & W^{,3\alpha-\varrho-\sigma-1} \\ U^{,\varrho+2}, & V^{,\sigma+1}, & W^{,3\alpha-\varrho-\sigma} \end{vmatrix}\Sigma[(-)^t A'_t A'_{\varrho-t} A'_{\sigma-\alpha+t}]\},$$

où $A'_t = \frac{[\alpha-1]^t}{[t]^t}$; t s'étend depuis 0 jusqu'à $\alpha-1$; ϱ, $\sigma-1$, $3\alpha-\varrho-\sigma-2$ doivent être des nombres positifs non pas plus grands que $2\alpha-2$.

En particulier

$$C_\alpha(U,U,U) = 6\Sigma\Sigma\{(-)^{\varrho+\sigma}\begin{vmatrix} U^{,\varrho}, & U^{,\sigma-1}, & U^{,3\alpha-\varrho-\sigma-2} \\ U^{,\varrho+1}, & U^{,\sigma}, & U^{,3\alpha-\varrho-\sigma-1} \\ U^{,\varrho+2}, & U^{,\sigma+1}, & U^{,3\alpha-\varrho-\sigma} \end{vmatrix} \Sigma[(-)^t A'_t A'_{\varrho-t} A'_{\sigma-\alpha+t}]\}$$

en donnant à ϱ, σ seulement les valeurs qui satisfont aux conditions $\varrho < \sigma-1$, $\sigma-1 < 3\alpha-\varrho-\sigma-2$.

En particulier, la dérivée constante pour le huitième ordre $aei - \ldots + 15e^3$ peut s'écrire sous cette forme

$$\begin{vmatrix} a, d, g \\ b, e, h \\ c, f, i \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} a, e, f \\ b, f, g \\ c, g, h \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} b, c, g \\ c, d, h \\ d, e, i \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} b, d, f \\ c, e, g \\ d, f, h \end{vmatrix} - 15\begin{vmatrix} c, d, e \\ d, e, f \\ e, f, g \end{vmatrix}$$

où l'on voit que cette dérivée est une fonction linéaire des déterminants

$$\left\|\begin{matrix} a, & b, & c, & d, & e, & f, & g \\ b, & c, & d, & e, & f, & g, & h \\ c, & d, & e, & f, & g, & h, & i \end{matrix}\right\|$$

ce qui est vrai pour toutes les dérivées du troisième degré.

En omettant pour le moment la théorie des dérivées de la forme

$$\square UVW = \overline{12}^\gamma \overline{23}^\alpha \overline{31}^\beta UVW$$

nous allons passer maintenant aux dérivées du quatrième degré, en considérant les formes dans lesquelles tous les coëfficiens différentiels sont du même ordre. Il est facile de voir que l'on peut écrire

$$\square UVWX = (\overline{12}.\overline{34})^\alpha (\overline{13}.\overline{42})^\beta (\overline{14}.\overline{23})^\gamma UVWX$$
$$= D_{\alpha,\beta,\gamma}(U,V,W,X) \quad \text{ou} \quad D_{\alpha,\beta,\gamma}.$$

En mettant pour abréger

$$\overline{12}.\overline{34} = \mathfrak{A}, \quad \overline{13}.\overline{42} = \mathfrak{B}, \quad \overline{14}.\overline{23} = \mathfrak{C}$$

on aura

$$D_{\alpha,\beta,\gamma} = \mathfrak{A}^\alpha \mathfrak{B}^\beta \mathfrak{C}^\gamma . UVWX.$$

Supposons $U = V = W = X$, et considérons les dérivées qui correspondent à une même valeur f de $\alpha+\beta+\gamma$. Il s'agit de trouver combien de ces dérivées sont indépendantes, et d'exprimer les autres au moyen de celles-ci. Puisque les fonctions sont égales après les différentiations, on peut avant la différen-

tiation, échanger d'une manière quelconque les nombres symboliques 1, 2, 3, 4. Cela donne

$$D_{\alpha,\beta,\gamma} = D_{\beta,\gamma,\alpha} = D_{\gamma,\alpha,\beta} = (-)^f D_{\alpha,\gamma,\beta} = (-)^f D_{\gamma,\beta,\alpha} = (-)^f D_{\beta,\alpha,\gamma}.$$

Puis on a identiquement

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C} = 0;$$

multipliant cela par $\mathfrak{A}^a \mathfrak{B}^b \mathfrak{C}^c$, et l'appliquant au produit U, V, W, X, on obtient

$$D_{a+1,b,c} + D_{a,b+1,c} + D_{a,b,c+1} = 0,$$

ce qui donne en mettant $a+b+c=f-1$, une suite d'équations entre les dérivées $D_{\alpha,\beta,\gamma}$ pour lesquelles $\alpha+\beta+\gamma=f$. En réduisant celles-ci par les conditions qui viennent d'être trouvées, supposons que $\Theta(f)$ représente le nombre de manières de diviser un entier f en trois parties, zéro y compris, et en ne tenant compte des permutations de ces parties, on aura un nombre Θf de dérivées $D_{\alpha,\beta,\gamma}$ et un nombre $\Theta(f-1)$ d'équations linéaires entre ces mêmes dérivées. Il faut donc qu'il reste un nombre $\Theta f - \Theta(f-1)$ de dérivées indépendantes; seulement pour f un nombre pair, on comprend dans ce nombre la fonction $D_{f,0,0}$, c'est à dire $\overline{12}^f . \overline{34}^f UVWX$ qui se réduit évidemment à $\overline{12}^f UV . \overline{34}^f WX$ où à $B_f(U,V) . B_f(W,X)$, c'est à dire au carré de $B_f(U,U)$. Il faut donc diminuer de l'unité, ce nombre $\Theta f - \Theta(f-1)$, quand f est pair. Soit $E\frac{a}{b}$, l'entier le plus grand que contient la fraction $\frac{a}{b}$, on démontre que le nombre cherché est égal à

$$E\frac{f}{6}, \quad \text{ou} \quad E\frac{f+3}{6},$$

selon que f est pair ou impair. En donnant à f les six formes

$$6g, \quad 6g+1, \quad 6g+2, \quad 6g+3, \quad 6g+4, \quad 6g+5,$$

on obtient les nombres correspondants de dérivées indépendantes du quatrième degré

$$g, \quad g, \quad g, \quad g+1, \quad g, \quad g+1.$$

Il y a par exemple une seule dérivée pour les ordres 3, 5, 6, 7, 8, 10, deux pour les ordres 9, 11, 12, 13, 14, 16 etc.

On peut prendre pour dérivées indépendantes, pour f pair, les termes de la suite $D_{f-3,3,0}$, $D_{f-6,6,0}$, ... et pour f impair celles de la suite $D_{f-1,1,0}$, $D_{f-4,4,0}$, $D_{f-7,7,0}$, ... En continuant ces deux suites jusqu'au dernier terme pour lequel la première suffixe est plus grande que la seconde, ou que les deux suffixes sont égales, on a en tout cas, le nombre nécessaire des termes. Par exemple pour $f=9$, on prend pour dérivées indépendantes les deux fonctions $D_{8,1,0}$, D_{540}, et l'on forme les équations

$$D_{900}+D_{810}+D_{801}=0, \qquad D_{621}+D_{531}+D_{522}=0,$$
$$D_{810}+D_{720}+D_{711}=0, \qquad D_{540}+D_{450}+D_{441}=0,$$
$$D_{720}+D_{630}+D_{621}=0, \qquad D_{531}+D_{441}+D_{432}=0,$$
$$D_{711}+D_{621}+D_{612}=0, \qquad D_{522}+D_{432}+D_{423}=0,$$
$$D_{630}+D_{540}+D_{531}=0, \qquad D_{432}+D_{342}+D_{333}=0,$$

lesquelles se réduisent après au moyen des formules

$$D_{900}=-D_{900}=0, \quad D_{810}=-D_{801}, \quad \text{etc.}$$

Nous donnerons toute à l'heure la solution de ces équations, mais en commençant avec le second ordre, et allant successivement au neuvième, on forme facilement la table que voici:

$$D_{200}=B_2^2,$$
$$D_{110}=-\tfrac{1}{2}B_2^2;$$

$$D_{300}=0,$$
$$D_{210},$$
$$D_{111}=0;$$

$$D_{400}=B_4^2.$$
$$D_{310}=-\tfrac{1}{2}B_4^2,$$
$$D_{220}=\tfrac{1}{2}B_4^2,$$
$$D_{211}=0;$$

$$D_{500}=0,$$
$$D_{410},$$
$$D_{320}=-D_{410},$$
$$D_{311}=0,$$
$$D_{221}=0;$$

$$D_{600}=B_6^2,$$
$$D_{510}=-\tfrac{1}{2}B_6^2,$$
$$D_{420}=-\tfrac{2}{3}D_{330}+\tfrac{1}{6}B_6^2,$$
$$D_{411}=\tfrac{2}{3}D_{330}+\tfrac{1}{3}B_6^2,$$
$$D_{330},$$
$$D_{321}=-\tfrac{1}{3}D_{330}-\tfrac{1}{6}B_6^2,$$
$$D_{222}=\tfrac{2}{3}D_{330}+\tfrac{1}{3}B_6^2;$$

$$D_{700}=0,$$
$$D_{610},$$
$$D_{520}=-D_{610},$$
$$D_{511}=0,$$
$$D_{430}=D_{610},$$
$$D_{421}=0,$$
$$D_{331}=0,$$
$$D_{322}=0;$$

$$D_{800}=B_8^2,$$
$$D_{710}=-\tfrac{1}{2}B_8^2,$$
$$D_{620}=-\tfrac{2}{3}D_{530}+\tfrac{1}{6}B_8^2,$$
$$D_{611}=\tfrac{2}{3}D_{530}+\tfrac{1}{3}B_8^2,$$
$$D_{530},$$
$$D_{521}=-\tfrac{1}{3}D_{530}-\tfrac{1}{12}B_8^2,$$
$$D_{440}=-\tfrac{16}{15}D_{530}-\tfrac{1}{30}B_8^2,$$
$$D_{431}=\tfrac{1}{15}D_{530}+\tfrac{1}{30}B_8^2,$$
$$D_{422}=\tfrac{4}{15}D_{530}+\tfrac{2}{15}B_8^2,$$
$$D_{332}=-\tfrac{2}{15}D_{530}-\tfrac{1}{15}B_8^2;$$

$$D_{900}=0,$$
$$D_{810},$$
$$D_{720}=-D_{810},$$
$$D_{711}=0,$$
$$D_{630}=\tfrac{1}{2}D_{810}-\tfrac{1}{2}D_{540},$$
$$D_{621}=\tfrac{1}{2}D_{810}+\tfrac{1}{2}D_{540},$$
$$D_{540},$$
$$D_{531}=-\tfrac{1}{2}D_{810}-\tfrac{1}{2}D_{540},$$
$$D_{522}=0,$$
$$D_{441}=0,$$
$$D_{432}=\tfrac{1}{2}D_{810}+\tfrac{1}{2}D_{540},$$
$$D_{333}=0.$$

Quel que soit f, excepté $f=2$, $f=3$ ou $f=4$, la table commence, pour f pair et f impair, de cette manière

$$\begin{aligned} D_{f,0,0} &= B_f^2. & D_{f,0,0} &= 0,\\ D_{f-1,1,0} &= -\tfrac{1}{2}B_f^2, & D_{f-1,1,0} &,\\ D_{f-2,2,0} &= -\tfrac{2}{3}D_{f-3,3,0}+\tfrac{1}{6}D_f^2, & D_{f-2,2,0} &= -D_{f-1,1,0},\\ D_{f-2,1,1} &= \tfrac{2}{3}D_{f-3,3,0}+\tfrac{1}{3}B_f^2, & D_{f-2,1,1} &= 0, \end{aligned}$$

mais après cela je ne connais pas la loi des suites.

Donnons quelques formules pour la transformation des dérivées D. On a par exemple

$$\begin{aligned} D_{f-1,1,0} &= (\overline{12}.\overline{34})^{f-1}\,\overline{13}.\overline{42}.U,U,U,U\\ &= \overline{13}.\overline{42}.B_{f-1}(U,U)B_{f-1}(U,U). \end{aligned}$$

Mais

$$\overline{13}.\overline{42} = \xi_1\eta_2\eta_3\xi_4-\xi_1\xi_2\eta_3\eta_4-\eta_1\eta_2\xi_3\xi_4+\eta_1\xi_2\xi_3\eta_4$$

et

$$\begin{aligned} \xi_1\eta_2\eta_3\xi_4\,B_{f-1}(U,U).B_{f-1}(U,U) &= B_{f-1}(\xi U,\eta U).B_{f-1}(\eta U,\xi U)\\ &= B_{f-1}(U'^0U'^1)B_{f-1}(U'^1U'^0), \end{aligned}$$

en écrivant U'^0 pour $\dot{U}'^0=\partial_x U$, $\dot{U}'^1$ pour $\dot{U}'^1=\partial_y U$. On a ainsi

$$D_{f-1,1,0}=-2\{B_{f-1}(U'^0U'^0).B_{f-1}(U'^1U'^1)-B_{f-1}(U'^0U'^1)B_f(U'^1U'^0)\},$$

ce qui se réduit pour les deux cas de f pair et f impair à

$$\begin{aligned} D_{f-1,1,0} &= -2\{B_{f-1}(U'^0U'^1)\}^2,\\ D_{f-1,1,0} &= -2\{B_{f-1}(U'^0U'^0).B_{f-1}(U'^1U'^1)-[B_{f-1}(U'^0U'^1)]^2\}. \end{aligned}$$

Par exemple pour les ordres 3, 5, 7, 9 on obtient

$$\begin{aligned} D_{210} &= -2[4(ac-b^2)(bd-c^2)-(ad-bc)^2],\\ D_{410} &= -2[4(ae-4bd+3e^2)(bf-4ce+3d^2)-(af-3be+2cd)^2],\\ D_{610} &= -2[4(ag-6bf+15ce-10d^2)(bh-6cg+15df-10e^2)\\ &\qquad -(ah-5bg+9cf-5de)^2],\\ D_{810} &= -2[4(ai-8bh+28cg-56df+35e^2)(bj-8ci+28dh-56eg+35f^2)\\ &\qquad -(aj-7bi+20ch-28dg+14ef)^2]. \end{aligned}$$

Nous allons calculer ces dérivées comme nous l'avons fait pour les dérivées B, C jusqu'au neuvième ordre. Il reste donc à trouver la dérivée du sixième ordre, celle du huitième, et encore une dérivée du neuvième ordre. Pour le sixième ordre ce qu'il y a de plus simple c'est de chercher D_{222} que l'on

démontre facilement être égal à

$$24\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ b, & c, & d, & e \\ c, & d, & e, & f \\ d, & e, & f, & g \end{vmatrix}$$

Pour trouver les deux autres, je commence par les formules générales,

$$D_{f-2,2,0} = 2\{B_{f-2}(U'^0U'^0)B_{f-2}(U'^2U'^2) - 4B_{f-2}(U'^0U'^1)B_{f-2}(U'^2U'^1) + B_{f-2}(U'^0U'^2)B_{f-2}(U'^2U'^0) + 2[B_{f-2}(U'^1U'^1)]^2\}$$

(où l'on a écrit $U'^0U'^1U'^2$ pour $\overset{2}{U}{}'^0\overset{2}{U}{}'^1\overset{2}{U}{}'^2$. On démontre cette formule précisément de la même manière dont nous avons prouvé celle pour $D_{f-1,1,0}$),

$$\begin{aligned} D_{f-3,3,0} = -2\{&B_{f-3}(U'^0U'^3)B_{f-3}(U'^3U'^0) - 6B_{f-3}(U'^0U'^1)B_{f-3}(U'^3U'^2) \\ &+ 6B_{f-3}(U'^0U'^2)B_{f-3}(U'^3U'^1) + 9B_{f-3}(U'^1U'^1)B_{f-3}(U'^2U'^2) \\ &- 9B_{f-3}(U'^1U'^2)B_{f-3}(U'^2U'^1) - B_{f-3}(U'^0U'^3)B_{f-3}(U'^3U'^0)\} \end{aligned}$$

(dans laquelle on a écrit U'^0 etc. pour $\overset{3}{U}$ etc.).

En particulier

$$\begin{aligned} D_{620} = \quad &2\{4(ag-6bf+15ce-10d^2)(ci-6dh+15eg-10f^2) \\ &-4(ah-5bg+9cf-5de)(bi-5ch+9dg-5ef) \\ &+(ai-6bh+16cg-26df+15e^2)^2+8(bh-6cg+15df-10e^2)^2\}, \\ D_{630} = -2\{&4(ag-6bf+15ce-10d^2)(dj-6ei+15fh-10g^2) \\ &-6(ah-5bg+9cf-5de)(cj-5di+9eh-5fg) \\ &+6(ai-6bh+16cg-26df+15e^2)(bj-6ci+16dh-26eg+15f^2) \\ &+36(bh-6cg+15df-10e^2)(ci-6dh+15eg-10f^2) \\ &-9(bi-5ch+9dg-5ef)^2-(aj-6bi+15ch-19dg+9ef)^2\}. \end{aligned}$$

On a donc tous les élémens nécessaires pour calculer cette table des dérivées constantes indépendantes du quatrième ordre jusqu'au neuvième degré:

$$D_{210} = -2\{6abcd-4ac^3-4b^3d+3b^2c^2-a^2d^2\}$$

$$\begin{aligned} D_{410} = -2\{&10aebf-16ae^2c-16b^2df+12aed^2+12c^2bf-48c^3e-48d^3b \\ &+76bcde+32c^2d^2-a^2f^2-4acdf-9b^2e^2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^*D_{222} = \quad 24\{&aceg+2adef+2gdbc-agd^2-ae^3-gc^3-acf^2-geb^2-2bd^2f \\ &-2bcef+bde^2+fdc^2+b^2f^2+e^2c^2-3ecd^2+bde^2+fdc^2+d^4\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{610} = -2\{&14agbh+234bgcf+990cedf-375d^2e^2-a^2h^2-25b^2g^2-81c^2f^2 \\ &-18ahcf+10ahde-50bgde-24acg^2-24b^2fh+60agdf+60cebh \\ &-40age^2-40d^2bh-360bdf^2-36c^2eg+240bfe^2+240d^2cg \\ &-600ce^3-600d^2bf\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
**D_{620} = \; & 2\{36agci + 696bfdh + 2340cge^2 + 2876d^2f^2 + 40b^2h^2 + 544c^2g^2 \\
& + 1025e^4 - 388bgch - 340bhe^2 - 2596cgdf - 4180dfe^2 - 16ahbi \\
& + a^2i^2 - 52aidf + 30aie^2 - 60agdh - 60bfci + 60aeg^2 + 60iec^2 \\
& - 360befg - 360cdeh - 40agf^2 - 40d^2ci + 240bf^3 + 240hd^3 \\
& - 420cef^2 - 420egd^2 + 20ach^2 + 20gib^2 + 20ahef + 20debi \\
& + 180bdg^2 + 180fhc^2 - 100bgef - 100dech\}, \\
D_{810} = \; & -2\{18aibj + 536bhci + 4256cgdh + 13328defg + 4704e^2f^2 - a^2j^2 \\
& - 49b^2i^2 - 400c^2h^2 - 784d^2g^2 - 40ajch + 56ajdg - 28ajef - 392bidg \\
& + 196bief - 560chef - 32aci^2 - 32b^2hj + 112aidh + 112cgbj \\
& - 224aieg - 224dfbj + 140aif^2 + 140e^2bj - 896bdh^2 - 896c^2gi \\
& + 1792bheg + 1792dfci - 1120bhf^2 - 1120e^2ci - 6272ceg^2 \\
& - 6272d^2fh + 3920cgf^2 + 3920e^2dh - 7840df^3 - 7840ge^3\}, \\
\dagger D_{621} = \; & -4\{7bhci + 22cgdh + 39defg + 30e^2f^2 - 2b^2i^2 + 25c^2h^2 - 47d^2g^2 \\
& - 2ajch + 7ajdg - 5ajef + 74bgdi - 73befi - 127chef + 2aci^2 \\
& + 2b^2hj - 7aidh - 7cgbj - 22aieg - 22dfbj + 25aif^2 + 25bje^2 \\
& - 52bdh^2 - 52c^2gi + 23bgeh + 23cfdi + 70bhf^2 + 70ce^2i + 32ceg^2 \\
& + 32d^2fh + 25cgf^2 + 25dhe^2 - 50df^3 - 50ge^3 - 45agfh - 45cedj \\
& - 45bfg^2 - 45eid^2 + 27aeh^2 + 27c^2fj - 20ag^3 - 20jd^3\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
*D_{330} &= \tfrac{3}{2}D_{222} + \tfrac{1}{2}B_6^2, \\
**D_{530} &= -\tfrac{3}{2}D_{620} + \tfrac{1}{4}B_8^2, \\
\dagger D_{540} &= 2D_{621} + D_{810}
\end{aligned}$$

équations qui donnent les fonctions D_{330}, D_{530}, D_{540} au moyen desquelles les autres ont été exprimées.

Nous allons à présent démontrer une propriété importante des dérivées du quatrième degré, analogue à celle qui existe pour le troisième degré. Soient U, V, W, X des fonctions d'un ordre quelconque f, et cherchons la valeur de l'expression

$$B_{2f-2\alpha}[B_\alpha(U, V), B_\alpha(W, X)],$$

qui se réduit d'abord à

$$\overline{\theta\varphi}^{2f-2\alpha}\,\overline{12}^{\alpha}\,.\,\overline{34}^{\alpha}\,.\,UVWX,$$

en supposant que ξ_θ, η_θ se rapportent à U, V et ξ_φ, η_φ à W, X: cela revient à changer ξ_θ, η_θ en $\overline{\xi_1 + \xi_2}$, $\overline{\eta_1 + \eta_2}$, ξ_φ, η_φ en $\xi_3 + \xi_4$, $\eta_3 + \eta_4$ ou $\overline{\theta\varphi}$ en

$$\overline{13} + \overline{14} + \overline{23} + \overline{24},$$

ce qui donne l'expression

$$(\overline{13} + \overline{14} + \overline{23} + \overline{24})^{2f-2\alpha}\,\overline{12}\,.\,\overline{34}^{\alpha}\,.\,UVWX.$$

Mais tous les termes de ceci, dans lesquels la somme des indices de ξ_1, η_1 ou ξ_2, η_2 ou ξ_3, η_3 ou ξ_4, η_4 surpasse f, s'évanouissent, et il est facile de voir que l'on a seulement à considérer ceux de la forme

$$K_r(\overline{13}.\overline{42})^r(\overline{14}.\overline{23})^{f-\alpha-r}(\overline{12}.\overline{34})^\alpha.UVWX,$$

où K_r représente le coëfficient numérique

$$\frac{(-)^r[2f-2\alpha]^{2f-2\alpha}}{[r]^r[r]^r[f-\alpha-r]^{f-\alpha-r}[f-\alpha-r]^{f-\alpha-r}}.$$

On a donc l'équation

$$B_{2f-2\alpha}[B_\alpha(U,V),B_\alpha(W,X)] = \Sigma\{K_r D_{\alpha,r,f-\alpha-r}(U,V,W,X)\}.$$

En particulier en écrivant $U=V=W=X$, et mettant B_α au lieu de $B_\alpha(U,U)$

$$B_{2f-2\alpha}(B_\alpha,B_\alpha) = \Sigma(K_r D_{\alpha,r,f-\alpha-r}).$$

Pour α impair, cela donne

$$0 = \Sigma(K_r D_{\alpha,r,f-\alpha-r}):$$

équation qui est satisfaite identiquement par les relations qui existent entre les quantités D. Pour α pair on voit qu'il y a autant de fonctions indépendantes de la forme

$$B_{2f-2\alpha}(B_\alpha,B_\alpha),$$

qu'il y en a des fonctions D, et que ces deux systèmes s'expriment linéairement, l'un au moyen de l'autre. Par exemple pour les ordres 3, 5, 7, les quantités D sont respectivement égales, à un facteur près, à

$$B_6(U^2,U^2),\quad B_{10}(U^2,U^2),\quad B_{14}(U^2,U^2).$$

Pour le sixième ordre elles s'expriment linéairement au moyen de

$$B_{12}(U^2,U^2),\quad B_6^2,$$

et ainsi de suite. Il ne reste pour compléter la théorie du quatrième degré, qu'à trouver la solution générale des équations entre les dérivées D, et du système dont nous venons de parler.

Passons à une propriété plus générale: soient $U_1, U_2, \ldots U_p$ des fonctions des ordres $f_1, f_2, \ldots f_p$, et mettons

$$\Theta(U_2,\ldots U_p) = \square U_2 \ldots U_p$$

une fonction du degré f_1; supposons que $\Theta(U_2,\ldots U_p)$ contienne les coëfficiens différentiels de l'ordre r_2 pour U_2, de l'ordre r_3 pour U_3 etc. on aura donc $f_1=(f_2-r_2)+\ldots+(f_p-r_p)$. Considérons l'expression

$$B_{f_1}(U_1,\Theta(U_2,\ldots U_p)),$$

qui se réduit d'abord à

$$(\overline{12}+\overline{13}\ldots.+\overline{1p})^{f_1}.\square U_1 U_2 \ldots. U_p,$$

puis à

$$K\,\overline{12}^{f_2-r_2}\,\overline{13}^{f_3-r_3}\ldots.\,\overline{1p}^{f_p-r_p}.\square U_1 U_2 \ldots. U_p$$

en mettant pour abréger

$$K = \frac{[f_1]^{f_1}}{[f_2-r_2]^{f_2-r_2}\ldots.[f_p-r_p]^{f_p-r_p}},$$

car si l'un des indices était plus petit, un autre serait plus grand, par exemple celui de $\overline{12}$: donc les symboles ξ_2, η_2 dans $\overline{12}^{f_2-r_2+\lambda}.\square$ monteraient ensemble à un ordre plus haut que f_2, ou le terme s'évanouirait. En écrivant donc

$$\square' = \overline{12}^{f_2-r_2}\,\overline{13}^{f_3-r_3}\ldots.\,\overline{1p}^{f_p-r_p}\square,$$

$$\Theta'(U_1 \ldots. U_p) = \square' U_1 \ldots. U_p,$$

on a

$$B'_{f_1}(U_1, \Theta(U_2 \ldots. U_p)) = K'\,\Theta(U_1 \ldots. U_p),$$

c'est-à-dire une dérivée constante des fonctions $U_1 \ldots. U_p$.

Soit

$$U = \frac{1}{[f_1]^{f_1}}(a_0 x^{f_1} + \ldots.),$$

$$\Theta(U_2 \ldots. U_p) = \frac{1}{[f_1]^{f_1}}(A_0 x^{f_1} + \ldots.),$$

on obtient

$$K\,\Theta'_0(U_1 \ldots. U_p) = a_0 A_f - \frac{f}{1} a_1 A_{f-1} + \ldots.,$$

c'est-à-dire

$$A_f = K\frac{d}{da_0}\Theta'(U_1 \ldots. U_p), \quad \frac{f}{1}A_{f-1} = K\frac{d}{da_1}\Theta(U_1 \ldots. U_p), \quad \ldots.,$$

ou enfin

$$\Theta(U_2 \ldots. U_p) = \frac{K}{[f_1]^{f_1}}\left(x^f \frac{d}{da_f} - x^{f-1}y\frac{d}{da_{f-1}} + \ldots.\right)\Theta'(U_1 \ldots. U_p)$$

équation qui existe, en changeant cependant le facteur numérique, dans le cas où plusieurs des fonctions $U_1 \ldots. U_p$ deviennent identiques. On a donc ce théorème.

Soit Θ une dérivée constante quelconque de U, la fonction

$$\left(x^f \frac{d}{da_f} - x^{f-1}y\frac{d}{da_{f-1}} + \ldots.\right)\Theta$$

est dérivée de U, et on en trouve la valeur, à un facteur numérique près, en omettant dans le symbole $\square$ qui correspond à Θ, les facteurs qui contiennent un quelconque des nombres symboliques.

Soit par exemple $-\frac{1}{2}D_{210} = \Theta$

$$= 6abcd - 4ac^3 - 4bd^3 + 3b^2c^2 - a^2d^2,$$

ce qui donne

$$\square = \overline{12}^2 . \overline{34}^2 . \overline{13} . \overline{42}.$$

La fonction

$$\left(x^3\frac{d}{dd} - x^3y\frac{d}{dc} + xy^2\frac{d}{db} - y^3\frac{d}{da}\right)\Theta$$

se réduit, à un facteur près, à

$$\overline{12}^2 . \overline{13} . UUU = -\tfrac{1}{2}B_1(U . B_2(U, U)).$$

On peut comparer cela avec quelques formules de M. *Eisenstein*. En adoptant sa notation, on a

$$\Phi = ax^3 + 3bx^2y + 4cxy^2 + dy^3,$$

$$F = \tfrac{1}{36}B_2(\Phi, \Phi) = (ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2,$$

$$\Phi_1 = -\tfrac{1}{2}\left(x^3\frac{d}{dd} - x^2y\frac{d}{dc} + xy^2\frac{d}{db} - y^3\frac{d}{da}\right)D,$$

D étant la même chose que Θ. On doit donc ajouter à ses formules ces deux-ci

$$\Phi_1 = \tfrac{1}{3}\left(\frac{d\Phi}{dx}\cdot\frac{dF}{dy} - \frac{d\Phi}{dy}\cdot\frac{dF}{dx}\right),$$

$$\Phi_1 = -\tfrac{1}{216}\left\{\frac{d^3\Phi}{dx^3}\cdot\frac{d^2\Phi}{dy^2}\cdot\frac{d\Phi}{dy} - \frac{d^3\Phi}{dx^2dy}\left(2\frac{d^2\Phi}{dx\,dy}\cdot\frac{d\Phi}{dy} + \frac{d^2\Phi}{dy^2}\cdot\frac{d\Phi}{dx}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{d^3\Phi}{dx\,dy^2}\left(2\frac{d^2\Phi}{dx\,dy}\cdot\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d^2\Phi}{dx^2}\cdot\frac{d\Phi}{dy}\right) - \frac{d^3\Phi}{dy^3}\cdot\frac{d^2\Phi}{dx^2}\cdot\frac{d\Phi}{dx}\right\},$$

dont la première explique de la manière la plus simple l'origine de la fonction Φ_1.

Nous indiquerons seulement les réductions que l'on peut appliquer à des dérivées de la forme

$$C_{\alpha,\beta,\gamma}(U, V, W) = \overline{23}^{\alpha} . \overline{31}^{\beta} . \overline{12}^{\gamma} . UVW$$

dans le cas où U, V, W sont des fonctions homogènes. En effet, en écrivant

$$\xi x + \eta y = \Xi,$$

cette fonction se réduit, à un facteur près, à

$$(\Xi_1\overline{23})^{\alpha}(\Xi_2\overline{31})^{\beta}(\Xi_3\overline{12})^{\gamma} . UVW$$

en supposant que les symboles ξ, η n'affectent pas les x, y qui entrent dans les symboles Ξ. On a aussi identiquement

$$\Xi_1\overline{23} + \Xi_2\overline{31} + \Xi_3\overline{12} = 0,$$

ce qui donne lieu à des réductions analogues à celles que nous avons trouvées pour les fonctions $D_{\alpha,\beta,\gamma}$, mais il faut les faire avec une attention particulière pour éviter des méprises relatives aux facteurs numériques. On peut

conclure cependant tout de suite, qu'il y a autant de fonctions indépendantes $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ qu'il y en a des fonctions $D_{\alpha,\beta,\gamma}$ pour la même valeur de $\alpha+\beta+\gamma$.

On conclut des raisonnemens par lesquels nous avons trouvé $B[U, B(U, U)]$ etc. ce théorème général.

„Toute dérivée d'un nombre quelconque de dérivées d'une ou de plusieurs fonctions, ou même d'une seule de fonctions quelconques des dérivées des fonctions originales est elle même dérivée."

Pour la réduction complète de ces dérivées doubles, il suffirait, théoriquement, de savoir réduire au moindre nombre possible les dérivées d'un degré donné quelconque. Nous avons fait cela pour le troisième degré ($C_{\alpha,\beta,\gamma}$) et pour le quatrième degré, dans le cas ou toutes les différentiations montent au même ordre ($D_{\alpha,\beta,\gamma}$): il parait cependant très difficile d'étendre ces méthodes même aux cas les plus faciles après ceux-ci, il faudrait pour cela des recherches très étendues sur la théorie de la division de nombres. On serait probablement conduit à des résultats importans en cherchant d'établir une connexion entre la théorie des hyperdéterminants et celle de l'élimination, je n'ai rien trouvé encore de satisfaisant sur ce sujet. Je finirai avec cette remarque. Nous avons déjà trouvé des hyperdéterminants qui n'étaient que des déterminants, et, il est facile de trouver une suite, ou plutôt une suite de suites d'hyperdéterminants de cette forme. On a en effet

$$\begin{vmatrix} a, b \\ b, c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a, b, c \\ b, c, d \\ c, d, e \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a, b, c, d \\ b, c, d, e \\ c, d, e, f \\ d, e, f, g \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

$$\begin{vmatrix} . & a, b, c \\ . & b, c, d \\ a, b, c & . \\ b, c, d & \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} . & a, b, c, d, e \\ . & b, c, d, e, f \\ . & c, d, e, f, g \\ a, b, c, d, e & . \\ b, c, d, e, f & . \\ c, d, e, f, g & . \end{vmatrix} \quad \text{etc. etc.} \quad \begin{vmatrix} . & . & a, b, c, d \\ . & . & b, c, d, e \\ . & a, b, c, d & . \\ . & b, c, d, e & . \\ a, b, c, d & . & . \\ b, c, d, e & . & . \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

Cependant ces fonctions ne sont pas toutes indépendantes. La dernière par exemple s'exprime linéairement au moyen du carré de la seconde et du cube de $(ae - 4bd + 3c^2)$. On ne connait pas en général les expressions symboliques de ces hyperdéterminants déterminants.

Cambridge, 25 Mai 1845.

2.

Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hülfe man die seculären Störungen der Planeten bestimmt.

(Von Herrn Dr. *Carl Wilhelm Borchardt.*)

Herr Professor ***Kummer*** hat im 26ten Bande dieses Journals ein äufserst merkwürdiges Resultat in Beziehung auf die bekannte Gleichung dritten Grades, von welcher die Bestimmung der Axen einer Fläche zweiter Ordnung abhängt, publicirt. Es ist demselben nemlich durch eine Combination geschickter Versuche und scharfsinniger Vermuthungen gelungen, den Ausdruck, dessen Zeichen die Realität der Wurzeln jener Gleichung bedingt, und welcher bekanntlich gleich dem Quadrat des Products der Differenzen der Wurzeln ist, als Summe von Quadraten darzustellen. Dieses schon an sich überraschende Resultat hat später Hr. Professor ***Jacobi*** in dem in Rom erscheinenden ***Giornale Arcadico*** Tom. XCVIII. in seiner Bedeutung für die analytische Geometrie weiter verfolgt und aus demselben ein merkwürdiges und bisher unbekanntes System von Formeln entwickelt, welches selbstständig bewiesen und dann zur Verificirung des ***Kummer***schen Resultats gebraucht werden kann. Der Gegenstand dieser Note ist es nun, die wahre analytische Quelle anzugeben, welche sowohl das ***Kummer***sche auf die Gleichung dritten Grades bezügliche Resultat ohne Kunstgriff ergiebt, als auch eine Ausdehnung dieses Resultats auf die allgemeine Gleichung $n$ter Ordnung, mit deren Hülfe man die seculären Störungen der Planeten findet.

Die Gleichung von welcher die Bestimmung der seculären Störungen der Planeten abhängt, und auf welche man bei anderen Gelegenheiten in der Analysis stöfst, ist das Resultat der Elimination der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ aus den Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} gx_1 = a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots + a_{n,1}x_n, \\ gx_2 = a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{n,2}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ gx_n = a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n, \end{cases}$$

wo die n^2 Coëfficienten $a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots a_{n,n}$ als bekannt angenommen werden

und die Eigenschaft haben, dafs

$$a_{i,k} = a_{k,i}.$$

Bezeichnen wir die Finalgleichung der Elimination mit

$$(a.) \qquad I' = 0,$$

so enthält I' die einzige Unbekannte g und zwar diese bis zum $n$ten Grade, die Gleichung $(a.)$ hat also n Wurzeln: $g_1, g_2, \ldots . g_n$. Nun sei

$$(b.) \qquad \begin{aligned} M = {} & (g_1-g_2)^2(g_1-g_3)^2 \ldots . (g_1-g_{n-1})^2(g_1-g_n)^2 \times \\ & (g_2-g_3)^2 \ldots . (g_2-g_{n-1})^2(g_2-g_n)^2 \times \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & (g_{n-1}-g_n)^2, \end{aligned}$$

welcher Ausdruck bekanntlich bei allen Gleichungen eine ganze rationale Function der Coëfficienten ist, so soll im Folgenden bewiesen werden, dafs für die Gleichung $I'=0$ sich M als Summe von Quadraten darstellen läfst; wodurch zu den bekannten merkwürdigen Eigenschaften der Gleichung $I'=0$ eine neue hinzugefügt wird.

Da wir es mit den Algorithmen zu thun haben werden, welche bei der Auflösung eines Systems lineärer Gleichungen vorkommen, so ist es nöthig, die Ausdrücke und Bezeichnungen anzuwenden, welche in dieser Theorie gebräuchlich sind. Es seien:

$$\begin{aligned} & \alpha_{1,1}, \ \alpha_{2,1}, \ \ldots . \ \alpha_{n,1}, \\ & \alpha_{1,2}, \ \alpha_{2,2}, \ \ldots . \ \alpha_{n,2}, \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & \alpha_{1,n}, \ \alpha_{2,n}, \ \ldots . \ \alpha_{n,n} \end{aligned}$$

die Coëfficienten eines Systems von n lineären Gleichungen mit n Unbekannten, so haben die aus der Auflösung dieser Gleichungen hervorgehenden Werthe der Unbekannten einen gemeinschaftlichen Nenner, welcher die Determinante des Systems von Gleichungen oder auch die Determinante aus den Gröfsen $\alpha_{i,k}$ genannt und durch die symbolische Form

$$\Sigma \pm \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} \ldots . \alpha_{n,n}$$

bezeichnet wird.

In dem Folgenden werden drei Sätze über Determinanten gebraucht, welche ich nicht beweisen, sondern nur historisch anführen will.

Der erste Satz, welcher von *Vandermonde* herrührt, findet sich in einer Abhandlung des Herrn Prof. *Jacobi* „de funct. altern." im 22ten Bande dieses Journals S. 360; er lautet:

Satz I. Die Determinante

$$\Sigma \pm \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} \ldots . \alpha_{n,n}$$

geht, wenn man

$$\alpha_{i,k} = \alpha_i^{k-1}$$

setzt, in das Product aus allen Differenzen der Gröfsen α_i über, d. h.

$$\begin{aligned}\Sigma \pm \alpha_1^0 \alpha_2^1 \alpha_3^2 \ldots . \alpha_n^{n-1} = \pm (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \ldots . (\alpha_1 - \alpha_{n-1})(\alpha_1 - \alpha_n) \times \\ (\alpha_2 - \alpha_3) \ldots . (\alpha_2 - \alpha_{n-1})(\alpha_2 - \alpha_n) \times \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ (\alpha_{n-1} - \alpha_n).\end{aligned}$$

Der zweite Satz ist ein allgemein bekannter, er findet sich in der Abhandlung des Herrn Prof. *Jacobi* „de format. et propr. Determ." im 22ten Bande dieses Journals S. 312 und lautet:

Satz II. Das Quadrat einer Determinante läfst sich wiederum als Determinante darstellen, und zwar so, dafs die Elemente der neuen Determinante ganze rationale Functionen der Elemente der alten Determinante sind. Nemlich

$$\{\Sigma \pm \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} \ldots . \alpha_{n,n}\}^2 = \Sigma \pm \beta_{1,1}\beta_{2,2} \ldots . \beta_{n,n},$$

wo

$$\beta_{i,k} = \alpha_{1,i}\alpha_{1,k} + \alpha_{2,i}\alpha_{2,k} + \ldots . + \alpha_{n,i}\alpha_{n,k}.$$

Der dritte Satz findet sich an dem nemlichen Ort und rührt von *Cauchy* her (Journal de l'école polytechnique Tome X.), er lautet:

Satz III. Ist $p > n$ und

$$\beta_{i,k} = \alpha_{1,i}\alpha_{1,k} + \alpha_{2,i}\alpha_{2,k} + \ldots . + \alpha_{p,i}\alpha_{p,k},$$

so ist

$$\Sigma \pm \beta_{1,1}\beta_{2,2} \ldots . \beta_{n,n} = S\{\Sigma \pm \alpha_{r',1}\alpha_{r'',2} \ldots . \alpha_{r^{(n)},n}\}^2,$$

wo r', r'', ... $r^{(n)}$ irgend eine Combination der Indices 1 bis p zu n ist, und das Summenzeichen S auf alle Combinationen dieser Art auszudehnen ist.

Wenden wir nun den Satz I. auf die Gleichung (*b.*) an, so ergiebt sich

$$M = \{\Sigma \pm g_1^0 g_2^1 g_3^2 \ldots . g_n^{n-1}\}^2$$

und diese Gleichung transformirt sich nach Satz II. in

$$M = \Sigma \pm \beta_{1,1}\beta_{2,2} \ldots . \beta_{n,n},$$

wo

$$\begin{aligned}\beta_{i,k} &= g_1^{i-1} g_1^{k-1} + g_2^{i-1} g_2^{k-1} + \ldots . + g_n^{i-1} g_n^{k-1} \\ &= g_1^{i+k-2} + g_2^{i+k-2} + \ldots . + g_n^{i+k-2},\end{aligned}$$

also, wenn wir

$$s_m = g_1^m + g_2^m + \ldots . + g_n^m$$

setzen,

$$\beta_{i,k} = s_{i+k-2}.$$

Es wird also M die Determinante aus dem System

$$(c.)\quad \begin{cases} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots. & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots. & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots. & s_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots. & s_{2n-2}, \end{cases}$$

wo

$$(d.)\quad s_m = g_1^m + g_2^m + \ldots. + g_n^m.$$

Dies vorausgesetzt, was natürlich ganz allgemein gültig ist, welche Gleichung auch $I' = 0$ sein mag, kehren wir zu unserer besonderen Aufgabe zurück. Das System der Gleichungen (1.) war

$$(1.)\quad \begin{cases} gx_1 = a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots. + a_{n,1}x_n, \\ gx_2 = a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots. + a_{n,2}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ gx_n = a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots. + a_{n,n}x_n, \end{cases}$$

wo

$$a_{i,k} = a_{k,i}.$$

Multipliciren wir jede dieser Gleichungen mit g und setzen im Resultat auf der rechten Seite für $gx_1, gx_2, \ldots. gx_n$ ihre Werthe aus (1.) ein, so ergiebt sich

$$(2.)\quad \begin{cases} g^2x_1 = a''_{1,1}x_1 + a''_{2,1}x_2 + \ldots. + a''_{n,1}x_n, \\ g^2x_2 = a''_{1,2}x_1 + a''_{2,2}x_2 + \ldots. + a''_{n,2}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^2x_n = a''_{1,n}x_1 + a''_{2,n}x_2 + \ldots. + a''_{n,n}x_n, \end{cases}$$

wo

$$a''_{i,k} = a''_{k,i} = \sum_{s=1}^{s=n} a_{i,s}a_{s,k}.$$

Ähnliche Systeme von Gleichungen findet man für die dritten und höheren Potenzen von g, allgemein

$$(m.)\quad \begin{cases} g^m x_1 = a_{1,1}^{(m)}x_1 + a_{2,1}^{(m)}x_2 + \ldots. + a_{n,1}^{(m)}x_n, \\ g^m x_2 = a_{1,2}^{(m)}x_1 + a_{2,2}^{(m)}x_2 + \ldots. + a_{n,2}^{(m)}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^m x_n = a_{1,n}^{(m)}x_1 + a_{2,n}^{(m)}x_2 + \ldots. + a_{n,n}^{(m)}x_n, \end{cases}$$

wo

$$a_{i,k}^{(m)} = a_{k,i}^{(m)} = \sum_{s_1,\ s_2,\ \ldots.\ s_{m-1}} a_{i,s_1}a_{s_1,s_2}a_{s_2,s_3}\ldots. a_{s_{m-2},s_{m-1}}a_{s_{m-1},k}.$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Reihe von Systemen lineärer Gleichungen, welche den verschiedenen Potenzen von g entsprechen und deren Coëfficienten

mit $a''_{i,k}$, $a'''_{i,k}$, ... $a^{(m)}_{i,k}$, ... bezeichnet werden. Zwischen diesen Coëfficienten finden sehr wichtige Relationen statt, welche man erhält, wenn man die Gleichungen des Systems (m) mit $g^{m'}$ multiplicirt und aus dem analogen System (m') die Werthe von $g^{m'}x_1$, $g^{m'}x_2$, ... $g^{m'}x_n$ substituirt. Vergleicht man die Coëfficienten des Resultats mit den Coëfficienten des Systems $(m+m')$, so ergiebt sich

$$a^{(m+m')}_{i,k} = \sum_s a^{(m)}_{s,i} a^{(m')}_{s,k},$$

oder, wenn man für m und m' resp. r und $m-r$ setzt, wo $r<m$ angenommen wird,

$$(3.) \qquad a^{(m)}_{i,k} = \sum_s a^{(r)}_{s,i} a^{(m-r)}_{s,k}.$$

Diese Formel gilt für alle Werthe von r von $r=1$ bis $r=m-1$ und zwar inclusive dieser äufsersten Werthe, wenn man

$$a^{(1)}_{i,k} = a_{i,k}$$

setzt. Man hat daher

$$(4.) \qquad a^{(m)}_{i,k} = \sum_s a_{s,i} a^{(m-1)}_{s,k},$$

wodurch man von einem Systeme von Coëfficienten zu dem nächst höheren übergeht.

Der Ausdruck I', als linke Seite der Gleichung, welche durch Elimination der Unbekannten x_1, x_2, ... x_n aus dem System der Gleichungen (1.) hervorgegangen, ist nach der bekannten Theorie der lineären Gleichungen nichts anders als die Determinante

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots . a_{n,n},$$

wenn man die in der Diagonale stehenden Gröfsen $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, ... $a_{n,n}$ sämmtlich um g vermindert. Demnach ist, nach fallenden Potenzen von g geordnet,

$$\pm I' = g^n - (a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots . + a_{n,n}) g^{n-1} + \ldots .$$

Hieraus folgt

$$s_1 = g_1 + g_2 + \ldots . + g_n = a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots . + a_{n,n} = \sum_i a_{i,i}.$$

Ähnliche Betrachtungen auf das System (m) angewendet, geben

$$s_m = \sum_i a^{(m)}_{i,i}$$

oder, wenn man für $a_{i,i}$ seinen Werth aus (3.) substituirt

$$(5.) \qquad s_m = \Sigma\Sigma a^{(r)}_{i,s} a^{(m-r)}_{i,s}.$$

Diese Formel umfafst die Werthe $r=1$ bis $r=m-1$, wenn, wie schon oben bemerkt,

$$(6.) \qquad a^{(1)}_{i,k} = a_{i,k}$$

gesetzt wird. Sie umfafst aber auch die Werthe $r=0$ und $r=m$, wenn

$$(7.)\quad \begin{cases} a_{i,k}^{(0)} = 1, & \text{für } i = k \\ = 0, & \text{wenn } i \text{ von } k \text{ verschieden,} \end{cases}$$

angenommen wird.

Vermöge der Formeln (5.), (6.), (7.) lassen sich die in dem Schema (*c*.) enthaltenen Gröfsen jetzt so schreiben:

$$\begin{array}{llll}
s_0 = \Sigma a_{i,k}^{(0)} a_{i,k}^{(0)}; & s_1 = \Sigma a_{i,k}^{(0)} a_{i,k}'; & s_2 = \Sigma a_{i,k}^{(0)} a_{i,k}''; & \ldots\ldots s_{n-1} = \Sigma a_{i,k}^{(0)} a_{i,k}^{(n-1)}; \\
s_1 = \Sigma a_{i,k}' a_{i,k}^{(0)}; & s_2 = \Sigma a_{i,k}' a_{i,k}'; & s_3 = \Sigma a_{i,k}' a_{i,k}''; & \ldots\ldots s_n = \Sigma a_{i,k}' a_{i,k}^{(n-1)}; \\
s_2 = \Sigma a_{i,k}'' a_{i,k}^{(0)}; & s_3 = \Sigma a_{i,k}'' a_{i,k}'; & s_4 = \Sigma a_{i,k}'' a_{i,k}''; & \ldots\ldots s_{n+1} = \Sigma a_{i,k}'' a_{i,k}^{(n-1)}; \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
s_{n-1} = \Sigma a_{i,k}^{(n-1)} a_{i,k}^{(0)}; & s_n = \Sigma a_{i,k}^{(n-1)} a_{i,k}'; & s_{n+1} = \Sigma a_{i,k}^{(n-1)} a_{i,k}''; & \ldots\ldots s_{2n-2} = \Sigma a_{i,k}^{(n-1)} a_{i,k}^{(n-1)},
\end{array}$$

wo sämmtliche Summen Σ auf alle Werthe von i und k auszudehnen sind. Da nun, wie wir oben gefunden haben, M die Determinante aus diesem System von Gröfsen ist, so hat man

$$M = \sum_{i=n\ k=n} \pm \beta_{0,0}\beta_{1,1}\beta_{2,2}\ldots\ldots\beta_{n,n},$$

$$\beta_{t,u} = \sum_{i=1}^{} \sum_{k=1}^{} a_{i,k}^{(t)} a_{i,k}^{(u)}.$$

Hieraus geht hervor, dafs M in die Classe von Determinanten gehört, auf welche der Satz III. Anwendung findet, da hier $p = n^2$ also $> n$ ist. Die Anwendung dieses Satzes giebt

$$M = S\{\Sigma \pm a_{i,k}^{(0)} a_{i',k'}' a_{i'',k''}'' \ldots\ldots a_{i^{(n-1)}k^{(n-1)}}^{(n-1)}\}^2,$$

wo das Summenzeichen S auf je n von einander verschiedene Combinationen $i, k;\ i', k';\ \ldots\ldots\ i^{(n-1)}, k^{(n-1)}$ aus den n^2 möglichen Combinationen i, k auszudehnen ist.

Dies Resultat läfst sich in folgendes Theorem zusammenfassen:

„Es sei

$$I' = 0$$

das Resultat der Eliminition aus den Gleichungen

$$\begin{array}{l}
0 = (a_{1,1} - g)x_1 + a_{2,1}x_2 + \ldots\ldots + a_{n,1}x_n, \\
0 = a_{1,2}x_1 + (a_{2,2} - g)x_2 + \ldots\ldots + a_{n,2}x_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = a_{1,n}x_1 + a_{2,n}x_2 + \ldots\ldots + (a_{n,n} - g)x_n,
\end{array}$$

es seien $g_1, g_2, \ldots\ldots g_n$ die Wurzeln der Gleichung $I' = 0$ und

$$\begin{array}{r}
M = (g_1 - g_2)^2 (g_1 - g_3)^2 \ldots\ldots (g_1 - g_n)^2, \\
(g_2 - g_3)^2 \ldots\ldots (g_2 - g_n)^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(g_{n-1} - g_n)^2,
\end{array}$$

man setze ferner

$$a''_{i,k} = \sum_s a_{s,i} a_{s,k}, \quad a'''_{i,k} = \sum_s a_{s,i} a''_{s,k}, \quad \text{und allgemein} \quad a^{(m)}_{i,k} = \sum_s a_{s,i} a^{(m-1)}_{s,k}$$

und bilde folgendes Schema von Gröfsen:

$$(8.)\quad \begin{cases} 1 \quad 0 \ldots . \ 0; & 0 \quad 1 \ldots . \ 0; & \ldots . \ 0 \quad 0 \ldots . \ 1; \\ a_{1,1}\, a_{2,1} \ldots \ldots a_{n,1}; & a_{1,2}\, a_{2,2} \ldots . \ a_{n,2}; & \ldots . \ a_{1,n}\, a_{2,n} \ldots \ldots a_{n,n}; \\ a''_{1,1}\, a''_{2,1} \ldots \ldots a''_{n,1}; & a''_{1,2}\, a''_{2,2} \ldots . \ a''_{n,2}; & \ldots . \ a''_{1,n}\, a''_{2,n} \ldots \ldots a''_{n,n}; \\ \ldots \ldots \ldots

und erhalten nach dem allgemeinen oben aufgestellten Theorem folgendes Resultat

$$(10.) \quad M =$$
$$12\{M_1^2+M_2^2+M_3^2\}+2\{N_1^2+N_2^2+N_3^2+P_1^2+P_2^2+P_3^2+Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2\}+R^2,$$

wo

$$M_1 = EF'-FE', \quad M_2 = FD'-DF', \quad M_3 = DE'-ED';$$
$$N_1 = CD'-DC'-(BD'-DB'); \quad P_1 = CE'-EC'-(BE'-EB');$$
$$Q_1 = CF'-FC'-(BF'-FB');$$
$$N_2 = AD'-DA'-(CD'-DC'); \quad P_2 = AE'-EA'-(CE'-EC');$$
$$Q_2 = AF'-FA'-(CF'-FC');$$
$$N_3 = BD'-DB'-(AD'-DA'); \quad P_3 = BE'-EB'-(AE'-EA');$$
$$Q_3 = BF'-FB'-(AF'-FA');$$
$$R = BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA';$$

welches sich noch zusammenziehen läfst.

Man hat bekanntlich die Gleichungen

$$FE'+BD'+DC' = 0; \quad EA'+DF'+CE' = 0; \quad AF'+FB'+ED' = 0;$$
$$EF'+DB'+CD' = 0; \quad AE'+FD'+EC' = 0; \quad FA'+BF'+DE' = 0;$$

und hieraus folgt

$$M_1+N_1 = 0, \quad M_2+P_2 = 0, \quad M_3+Q_3 = 0,$$

ferner ergiebt der blofse Anblick der Werthe der Gröfsen N, P, Q die Relationen

$N_1+N_2+N_3 = 0$, $P_1+P_2+P_3 = 0$, $Q_1+Q_2+Q_3 = 0$, also ist

$N_2+N_3 = -N_1 = M_1$, $P_1+P_3 = -P_2 = M_2$, $Q_1+Q_2 = -Q_3 = M_3$.

Wendet man nun die Formel

$$2(a^2+b^2) = (a+b)^2+(a-b)^2$$

auf die drei Quadratsummen $2(N_2^2+N_3^2)$, $2(P_1^2+P_3^2)$, $2(Q_1^2+Q_2^2)$ an, so geht die Formel (10.) über in

$$M = 15\{M_1^2+M_2^2+M_3^2\}+(N_3-N_2)^2+(P_1-P_3)^2+(Q_2-Q_1)+R^2,$$

welches genau mit dem *Kummer*schen Resultat übereinstimmt, und zwar mit der Form, welche Hr. Professor *Jacobi* demselben im Giornale Arcadico gegeben hat.

Wendet man das oben entwickelte allgemeine Theorem auf den nächst höheren Fall an, wo die Gleichung $I' = 0$ vom 4ten Grade, so erhält man hier zunächst M als eine Summe von 135 verschiednen Quadraten, welche sich aber sogleich auf eine Summe von 84 Quadraten und dann auf eine noch bedeutend geringere Anzahl reduciren läfst. Ich werde auf das Detail dieser Entwicklung hier nicht eingehen, sondern mich begnügen, gezeigt zu haben, dafs sich in allen Fällen M als Summe von Quadraten darstellen läfst.

Berlin, im Januar 1845.

3.

Sulla condizione di uguaglianza di due radici dell'equazione cubica, dalla quale dipendono gli assi principali di una superficie del second'ordine.

(Dal Sign. Profess. *C. G. J. Jacobi.*)

(Estratto dal giornale arcadico Tomo XCVIX.)

I.

La ricerca degli assi principali di una superficie del second'ordine, riviene al problema di passare da tre coordinate rettangolari x, y, z a tre nuove coordinate rettangolari p, p', p'', in guisa che l'espressione

$$Axx+Byy+Czz+2Dyz+2Ezx+2Fxy$$

sia trasformata in questa più semplice

$$Gpp+G'p'p'+G''p''p''.$$

Il sig. *Kummer* è giunto a rappresentare il valore che ha il quadrato del prodotto delle differenze delle tre quantità G, G', G'' per la somma di sette quadrati, i quali possono mettersi sotto la forma seguente

$$1.\quad \left\{\begin{aligned} &15(EF''-FE'')^2+[BD'-DB'+CD'-DC'-2(AD'-DA')]^2\\ &+15(FD'-DF'')^2+[CE'-EC'+AE'-EA'-2(BE''-EB'')]^2\\ &+15(DE'-ED'')^2+[AF''-FA'+BF''-FB'-2(CF''-FC'')]^2\\ &+[BC'-CB'+CA'-AC'+AB''-BA'']^2\\ &=(G'-G'')^2(G''-G)^2(G-G')^2, \end{aligned}\right.$$

ove

$$2.\quad \left\{\begin{aligned} A'&=BC-DD, & D'&=EF-AD,\\ B'&=CA-EE, & E'&=FD-BE,\\ C'&=AB-FF, & F''&=DE-CF. \end{aligned}\right.$$

Per meglio conoscere la natura di questo bel risultato, esprimerò la radice di ciascuno de' sette quadrati in funzione delle quantità G, G', G'' e de'coëfficienti della sostituzione

$$3.\quad \left\{\begin{aligned} p&=\alpha x+\beta y+\gamma z,\\ p'&=\alpha' x+\beta' y+\gamma' z,\\ p''&=\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z, \end{aligned}\right.$$

la quale determina le nuove coordinate p, p', p'' per le coordinate x, y, z.

Le formule algebriche alle quali sono pervenuto in questa ricerca, forniscono una nuova dimostrazione della formula del sig. ***Kummer,*** e possono anche esser utili in altre occasioni.

II.

Fra i *nove* coëfficienti dell'equazioni (3.), si hanno le *ventidue* relazioni conosciute

$$4.\quad \begin{cases} \alpha\alpha+\alpha'\alpha'+\alpha''\alpha'' = 1, & \alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma = 1, \\ \beta\beta+\beta'\beta'+\beta''\beta'' = 1, & \alpha'\alpha'+\beta'\beta'+\gamma'\gamma' = 1, \\ \gamma\gamma+\gamma'\gamma'+\gamma''\gamma'' = 1, & \alpha''\alpha''+\beta''\beta''+\gamma''\gamma'' = 1; \\ \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma'' = 0, & \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' = 0, \\ \gamma\alpha+\gamma'\alpha'+\gamma''\alpha'' = 0, & \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma = 0, \\ \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'' = 0, & \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma' = 0; \\ \beta'\gamma''-\beta''\gamma' = \alpha, & \beta''\gamma-\beta\gamma'' = \alpha', \quad \beta\gamma'-\beta'\gamma = \alpha'', \\ \gamma'\alpha''-\gamma''\alpha' = \beta, & \gamma''\alpha-\gamma\alpha'' = \beta', \quad \gamma\alpha'-\gamma'\alpha = \beta'', \\ \alpha'\beta''-\alpha''\beta' = \gamma, & \alpha''\beta-\alpha\beta'' = \gamma', \quad \alpha\beta'-\alpha'\beta = \gamma''; \\ \alpha\beta'\gamma''+\alpha'\beta''\gamma+\alpha''\beta\gamma'-\alpha\beta''\gamma'-\alpha'\beta\gamma''-\alpha''\beta'\gamma = 1. \end{cases}$$

Ma, per l'uopo nostro, un'altra bisogna aggiungerne un po'più nascosta, la quale si può dedurre dalle formule precedenti nel modo che segue.

Si ha

$$\begin{aligned} \alpha^2\alpha'^2\alpha''^2 &= \alpha'\alpha''(\beta''\beta+\gamma''\gamma)(\beta\beta'+\gamma\gamma') \\ &= \alpha'\alpha''\beta'\beta''\cdot\beta^2+\alpha'\alpha''\gamma'\gamma''\cdot\gamma^2+\alpha'\beta''\gamma\cdot\alpha''\beta\gamma'+\alpha'\beta\gamma''\cdot\alpha''\beta'\gamma. \end{aligned}$$

Da questa formula se ne ricavano due altre, alternando tra loro le lettere α e β, e le lettere α e γ. Sommiamo le tre formule così ottenute; poi facciamo uso della formula

$$\alpha^2\alpha'\alpha''(\beta'\beta''+\gamma'\gamma'') = -\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2,$$

e delle due simili: otterremo finalmente

$$5.\quad \begin{cases} 2[\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2] \\ = \alpha'\beta''\gamma\cdot\alpha''\beta\gamma'+\alpha''\beta\gamma'\cdot\alpha\beta'\gamma''+\alpha\beta'\gamma''\cdot\alpha'\beta''\gamma \\ + \alpha'\beta\gamma''\cdot\alpha''\beta'\gamma+\alpha''\beta'\gamma\cdot\alpha\beta''\gamma'+\alpha\beta''\gamma'\cdot\alpha'\beta\gamma''. \end{cases}$$

Designerò questa quantità ne'calcoli seguenti colla lettera I'. La quantità I' non cangiando di valore, allorchè si alternano simultaneamente tra loro le quantità

$$\alpha' \text{ e } \beta, \quad \alpha'' \text{ e } \gamma, \quad \beta'' \text{ e } \gamma',$$

si deduce dalla formula (5.) quest'altra notabile

$$\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2+\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2+\alpha''^2\beta''^2\gamma''^2.$$

III.

Sostituendo le formule (3.) nell'equazione

6. $$Gpp+G'p'p'+G''p''p''=Axx+Byy+Czz+2Dyz+2Ezx+2Fxy,$$

trovasi

7. $$\begin{cases} A = G\alpha\alpha+G'\alpha'\alpha'+G''\alpha''\alpha'', \\ B = G\beta\beta+G'\beta'\beta'+G''\beta''\beta'', \\ C = G\gamma\gamma+G'\gamma'\gamma'+G''\gamma''\gamma'', \\ D = G\beta\gamma+G'\beta'\gamma'+G''\beta''\gamma'', \\ E = G\gamma\alpha+G'\gamma'\alpha'+G''\gamma''\alpha'', \\ F = G\alpha\beta+G'\alpha'\beta'+G''\alpha''\beta''. \end{cases}$$

Questi valori, sostituiti nelle formule (2.), forniscono le seguenti

8. $$\begin{cases} A' = G'G''\alpha\alpha+G''G\alpha'\alpha'+GG'\alpha''\alpha'', \\ B' = G'G''\beta\beta+G''G\beta'\beta'+GG'\beta''\beta'', \\ C' = G'G''\gamma\gamma+G''G\gamma'\gamma'+GG'\gamma''\gamma'', \\ D' = G'G''\beta\gamma+G''G\beta'\gamma'+GG'\beta''\gamma'', \\ E' = G'G''\gamma\alpha+G''G\gamma'\alpha'+GG'\gamma''\alpha'', \\ F' = G'G''\alpha\beta+G''G\alpha'\beta'+GG'\alpha''\beta''. \end{cases}$$

Combinando i due sistemi di formule (7.) e (8.), e ponendo, per maggior brevità,

9. $$\begin{cases} G(G''^2-G''^2)=m, \quad G'(G''^2-G^2)=m', \quad G''(G^2-G'^2)=m'', \\ (G'-G'')(G''-G)(G-G')=m+m'+m''=M, \end{cases}$$

trovansi le nuove formule seguenti

10. $$\begin{cases} FE'-EF'=M\alpha\alpha'\alpha''; \\ AD'-DA'=m(\alpha'\gamma''\gamma-\alpha''\beta\beta')+m'(\alpha''\gamma\gamma'-\alpha\beta'\beta'')+m''(\alpha\gamma'\gamma''-\alpha'\beta''\beta), \\ BD'-DB'=m\cdot\alpha\beta'\beta''+m'\cdot\alpha'\beta''\beta+m''\cdot\alpha''\beta\beta', \\ DC'-CD'=m\cdot\alpha\gamma'\gamma''+m'\cdot\alpha'\gamma''\gamma+m''\cdot\alpha''\gamma\gamma', \\ BC'-CB'=m\alpha(\beta'\gamma''+\beta''\gamma')+m'\alpha'(\beta''\gamma+\beta\gamma'')+m''\alpha''(\beta\gamma'+\beta'\gamma). \end{cases}$$

Per ottenere la seconda di queste cinque formule, bisogna operare qualche riduzione mercè della formula

$$\alpha'^2\beta''\gamma''-\alpha''^2\beta'\gamma' = \alpha'\gamma''(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')-\alpha''\beta'(\alpha''\gamma'-\alpha'\gamma'') = \alpha'\gamma''\gamma-\alpha''\beta\beta',$$

e delle sue simili.

Dalla seconda, terza e quarta delle formule (10.) può dedursi il valore della quantità

$$BD'-DB'+CD'-DC''-2(AD'-DA').$$

In questo valore, i termini moltiplicati per m, sono

$$\alpha\beta'\beta''+2\alpha''\beta\beta'-\alpha\gamma'\gamma''-2\alpha'\gamma''\gamma,$$

i quali, aggiungendo la quantità evanescente

$$\alpha'\beta''\beta - \alpha''\beta\beta' + \alpha'\gamma''\gamma - \alpha''\gamma\gamma' = \beta\gamma - \gamma\beta,$$

diventano i seguenti

$$\alpha\beta'\beta'' + \alpha'\beta''\beta + \alpha''\beta\beta' - (\alpha\gamma'\gamma'' + \alpha'\gamma''\gamma + \alpha''\gamma\gamma').$$

Questo coëfficiente di m, restando inalterato se gli accenti 0, 1, 2, si mutano rispettivamente negli accenti 1, 2, 0, *) si vede che le quantità m' ed m'' avranno il medesimo coëfficiente. Da qui la formula rimarchevole

$$11. \quad \begin{aligned} &BD' - DB' + CD' - DC' - 2(AD' - DA') \\ &= M[\alpha\beta'\beta'' + \alpha'\beta''\beta + \alpha''\beta\beta' - \alpha\gamma'\gamma'' - \alpha'\gamma''\gamma - \alpha''\gamma\gamma'] \end{aligned}.$$

Se coll'ultima delle formule (10.) sommiamo le due altre che da essa si derivano per analogia, si troverà che ciascuna delle tre quantità m, m', m'', è moltiplicata pel medesimo coëfficiente, e che però si ha quest'altra formula rimarchevole

$$\begin{aligned} &BC' - CB' + CA' - AC' + AB' - BA' \\ &= M[\alpha\beta'\gamma'' + \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' + \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta'\gamma]. \end{aligned}$$

Formate le formule analoghe alla prima delle formule (10.) e le tre altre analoghe alla formula (11.), ecco i valori delle radici de'sette quadrati, riportati di sopra:

$$12. \quad \left\{ \begin{aligned} M_1 &= FE' - EF' = M\cdot\alpha\alpha'\alpha'', \\ M_2 &= DF' - FD' = M\cdot\beta\beta'\beta'', \\ M_3 &= ED' - DE' = M\cdot\gamma\gamma'\gamma', \\ M_4 &= BD' - DB' + CD' - DC' - 2(AD' - DA') \\ &= M(\alpha\beta'\beta'' + \alpha'\beta''\beta + \alpha''\beta\beta' - \alpha\gamma'\gamma'' - \alpha'\gamma''\gamma - \alpha''\gamma\gamma'), \\ M_5 &= CE' - EC' + AE' - EA' - 2(BE' - EB') \\ &= M(\beta\gamma'\gamma'' + \beta'\gamma''\gamma + \beta''\gamma\gamma' - \beta\alpha'\alpha'' - \beta'\alpha''\alpha - \beta''\alpha\alpha'), \\ M_6 &= AF' - FA' + BF' - FB' - 2(CF' - FC') \\ &= M(\gamma\alpha'\alpha'' + \gamma'\alpha''\alpha + \gamma''\alpha\alpha' - \gamma\beta'\beta'' - \gamma'\beta''\beta - \gamma''\beta\beta'), \\ M_7 &= BC' - CB' + CA' - AC' + AB' - BA' \\ &= M(\alpha\beta'\gamma'' + \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' + \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta'\gamma. \end{aligned} \right.$$

Si vede che il valore di ciascuna delle sette quantità è uguale al prodotto della quantità

$$M = (G' - G'')(G'' - G)(G - G')$$

e di una funzione de'nove coëfficienti della sostituzione, ossia di una funzione degli angoli onde i tre assi primitivi declinano da' tre assi principali.

*) Le lettere senza accento ovvèro cogli accenti ', " si dicono avere gli accenti 0, 1, 2.

IV.

Formiamo il quadrato della quantità M_4. Essendo

$$\alpha\beta'\beta''+\alpha'\beta''\beta+\alpha''\beta\beta'+\alpha\gamma'\gamma''+\alpha'\gamma''\gamma+\alpha''\gamma\gamma' = -3\alpha\alpha'\alpha'',$$

si avrà

$$M_4^2 = 9M^2\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2-4M^2[\alpha\beta'\beta''+\alpha'\beta''\beta+\alpha''\beta\beta'][\alpha\gamma'\gamma''+\alpha'\gamma''\gamma+\alpha''\gamma\gamma'].$$

Sviluppando il prodotto, troviamo, prima le tre quantità

$$\alpha^2\beta'\beta''\gamma'\gamma''+\alpha'^2\beta''\beta\gamma''\gamma+\alpha''^2\beta\beta'\gamma\gamma',$$

e poi la somma di sei altre designata, nel n°. II. per Γ. Dunque

$$M_4^2 = M^2(9\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2-4\Gamma)-4M^2(\alpha^2\beta'\beta''\gamma'\gamma''+\alpha'^2\beta''\beta\gamma''\gamma+\alpha''^2\beta\beta'\gamma\gamma').$$

Similmente trovasi

$$M_5^2 = M^2(9\beta^2\beta'^2\beta''^2-4\Gamma)-4M^2(\beta^2\gamma'\gamma''\alpha'\alpha''+\beta'^2\gamma''\gamma\alpha''\alpha+\beta''^2\gamma\gamma'\alpha\alpha'),$$

$$M_6^2 = M^2(9\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2-4\Gamma)-4M^2(\gamma^2\alpha'\alpha''\beta'\beta''+\gamma'^2\alpha''\alpha\beta''\beta+\gamma''^2\alpha\alpha'\beta\beta').$$

Sommando i tre quadrati M_4^2, M_5^2, M_6^2, rammentiamo la formula (5.)

$$\Gamma = 2(\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2),$$

ed osserviamo che la somma de'nove termini moltiplicati per $-4M^2$, è uguale al prodotto

$$-4M^2(\alpha\beta'\gamma''+\alpha'\beta''\gamma+\alpha''\beta\gamma')(\alpha\beta''\gamma'+\alpha'\beta\gamma''+\alpha''\beta'\gamma),$$

e però alla quantità

$$M^2-M_7^2;$$

otteremo

$$M_4^2+M_5^2+M_6^2 = -15(M_1^2+M_2^2+M_3^2)+M^2-M_7^2;$$

e quindi finalmente la formula

$$M^2 = 15(M_1^2+M_2^2+M_3^2)+M_4^2+M_5^2+M_6^2+M_7^2,$$

la quale è la medesima che la (1.) proposta di sopra.

Roma, 7 marzo 1844.

4.

Über ein leichtes Verfahren die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen *).

(Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi.*)

1.

In der Theorie der Säcularstörungen und der kleinen Oscillationen wird man auf ein System lineärer Gleichungen geführt, in welchem die Coëfficienten der verschiedenen Unbekannten in Bezug auf die Diagonale symmetrisch sind, die ganz constanten Glieder fehlen und zu allen in der Diagonale befindlichen Coëfficienten noch dieselbe Gröfse $-x$ addirt ist. Durch Elimination der Unbekannten aus solchen lineären Gleichungen erhält man eine Bedingungsgleichung, welcher x genügen mufs. Für jeden Werth von x, welcher diese Bedingungsgleichung erfüllt, hat man sodann aus den lineären Gleichungen die Verhältnisse der Unbekannten zu bestimmen. Ich werde hier zuerst die für ein solches System Gleichungen geltenden algebraischen Formeln ableiten, welche im Folgenden ihre Anwendung finden, und hierauf eine für die Rechnung sehr bequeme Methode mittheilen, wodurch man die numerischen Werthe der Gröfsen x und der ihnen entsprechenden Systeme der Unbekannten mit Leichtigkeit und mit jeder beliebigen Schärfe erhält. Diese Methode überhebt der beschwerlichen Bildung und Auflösung der Gleichung, deren Wurzeln die Werthe von x sind, indem man das gegebne System Gleichungen so transformirt, dafs man für die Gröfsen x starke Annäherungen erhält, worauf für jedes x ein schnell convergirendes Näherungsverfahren zugleich dessen *genauen* Werth und die entsprechenden Werthe der Unbekannten und zwar diese letztern viel leichter als durch die gewöhnlichen Eliminationen ergiebt. Zur Erläuterung dieser Methode habe ich die numerische Auflösung derjenigen Gleichungen gewählt, von welchen die Säcularstörungen der Excentricitäten und der Längen der Perihelien der Pla-

*) Die sorgfältige Ausführung der in diesem Aufsatze vorkommenden numerischen Rechnungen verdanke ich der Gefälligkeit eines meiner Schüler, des Herrn *Ludwig Seidel* in München.

neten unsers Sonnensystems abhängen, wenn man die höhern Potenzen der Excentricitäten und Neigungen vernachlässigt, da diese numerische Auflösung neuerdings mehrere Astronomen beschäftigt hat. Endlich habe ich neue Formeln für die Correctionen hinzugefügt, welche die gefundnen Zahlenresultate durch Änderung der angenommenen Planetenmassen erfahren, und auch diese Formeln durch die vollständig durchgeführten Rechnungen erläutert. Für die Zahlencoëfficienten habe ich dieselben numerischen Werthe genommen, welche Herr *Leverrier* seinen schätzenswerthen Arbeiten über diesen Gegenstand zum Grunde gelegt hat, um eine Vergleichung der Methoden zu erleichtern.

Relationen zwischen den verschiedenen Systemen der Unbekannten.

2.

Es sei zwischen den n Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \varpi$ ein System von n linearen Gleichungen von folgender Form gegeben,

$$1.\quad \begin{cases} \{(a,a)-x\}\alpha + (a,b)\beta + (a,c)\gamma + \ldots + (a,p)\varpi = 0, \\ (b,a)\alpha + \{(b,b)-x\}\beta + (b,c)\gamma + \ldots + (b,p)\varpi = 0, \\ (c,a)\alpha + (c,b)\beta + \{(c,c)-x\}\gamma + \ldots + (c,p)\varpi = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p,a)\alpha + (p,b)\beta + (p,c)\gamma + \ldots + \{(p,p)-x\}\varpi = 0, \end{cases}$$

in welchen je zwei zur Diagonale symmetrisch liegende Coëfficienten, welche durch Vertauschung der Buchstaben auseinander erhalten werden, gleich sind,

$$2.\quad (a,b)=(b,a),\quad (a,c)=(c,a),\quad (b,c)=(c,b),\quad \text{u. s. w.}$$

Die Gröfsen (a,a), (a,b) u. s. w. sind in Zahlen gegeben, die Gröfse x dagegen noch zu bestimmen. Da nämlich die ganz constanten Glieder sämmtlich $=0$ sind, so kann man aus den n Gleichungen (1.) die n Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \varpi$ eliminiren, und erhält dadurch für x eine Gleichung $n$ten Grades. Für jeden der n Werthe von x, welche dieser genügen, wird jede der n Gleichungen (1.) eine Folge der übrigen $n-1$, und bestimmen irgend $n-1$ derselben die Verhältnisse der Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \varpi$. Da nur diese Verhältnisse und nicht die absoluten Werthe der Gröfsen α, β etc. durch die Aufgabe bestimmt werden, so werde ich annehmen, dafs für jedes der n Systeme dieser Gröfsen, welche den n Wurzeln x entsprechen, die Summe

ihrer Quadrate

$$3. \quad \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \ldots + \varpi\varpi = 1$$

werde, wodurch alle hier vorkommenden Gröfsen bestimmt sind.

3.

Es seien nun x', x'' irgend zwei von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades, und α', β', γ', ... ϖ'; α'', β'', γ'', ... ϖ'' die ihnen entsprechenden Werthe der Unbekannten α, β, γ, ... ϖ. Man hat dann aus (1.)

$$\begin{aligned}
(a,a)\alpha' + (a,b)\beta' + \ldots + (a,p)\varpi' &= \alpha' x', \\
(b,a)\alpha' + (b,b)\beta' + \ldots + (b,p)\varpi' &= \beta' x', \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad

Betrachten wir nun folgende lineäre Ausdrücke:

$$5.\quad \begin{cases} p_1 = \alpha' q_1 + \alpha'' q_2 + \ldots + \alpha^{(n)} q_n, \\ p_2 = \beta' q_1 + \beta'' q_2 + \ldots + \beta^{(n)} q_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = \varpi' q_1 + \varpi'' q_2 + \ldots + \varpi^{(n)} q_n, \end{cases}$$

wo $\alpha', \beta', \ldots \varpi'$; $\alpha'', \beta'', \ldots \varpi''$; u. s. w. die verschiedenen Systeme der Werthe der Gröfsen $\alpha, \beta, \ldots \varpi$ sind und zwischen den Gröfsen je zweier Systeme eine Gleichung (4.) Statt findet.

Addirt man die Quadrate dieser Ausdrücke, so verschwinden rechts wegen der Gleichungen (4.) die Coëfficienten der Producte $q_1 q_2$, $q_1 q_3$ etc., und da die Summen der Quadrate der demselben Systeme angehörigen Werthe der Unbekannten $= 1$ angenommen worden sind (3.), so erhält man

$$6.\quad p_1 p_1 + p_2 p_2 + \ldots + p_n p_n = q_1 q_1 + q_2 q_2 + \ldots + q_n q_n.$$

Ferner folgen aus dem System (5.) unmittelbar die umgekehrten Ausdrücke der Gröfsen q_i durch die Gröfsen p_i, wenn man die Horizontal- und Verticalreihen der Coëfficienten mit einander vertauscht. Um nemlich q_i zu finden, braucht man blofs die erste Gleichung mit $\alpha^{(i)}$, die zweite mit $\beta^{(i)}$ u. s. w. zu multipliciren und sie nach geschehener Multiplication zu addiren, so werden nach (4.) alle q eliminirt bis auf q_i, das den Factor 1 erhält. Man findet so die umgekehrten Gleichungen

$$7.\quad \begin{cases} q_1 = \alpha' p_1 + \beta' p_2 + \ldots + \varpi' p_n, \\ q_2 = \alpha'' p_1 + \beta'' p_2 + \ldots + \varpi'' p_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n = \alpha^{(n)} p_1 + \beta^{(n)} p_2 + \ldots + \varpi^{(n)} p_n. \end{cases}$$

Substituirt man wieder diese Werthe in die durch die Gleichungen (5.) gegebnen Ausdrücke der Gröfsen $p_1, p_2, \ldots p_n$, so giebt die erste Gleichung:

$$\begin{aligned} p_1 = {} & \{\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \ldots + \alpha^{(n)}\alpha^{(n)}\} p_1 \\ & + \{\alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots + \alpha^{(n)}\beta^{(n)}\} p_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \{\alpha'\varpi' + \alpha''\varpi'' + \ldots + \alpha^{(n)}\varpi^{(n)}\} p_n. \end{aligned}$$

Wegen der ganz allgemeinen Bedeutung der Gröfsen p_i mufs also sein:

$$8.\quad \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \ldots + \alpha^{(n)}\alpha^{(n)} = 1,$$

$$9.\quad \begin{cases} \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \ldots + \alpha^{(n)}\beta^{(n)} = 0, \\ \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' + \ldots + \alpha^{(n)}\gamma^{(n)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha'\varpi' + \alpha''\varpi'' + \ldots + \alpha^{(n)}\varpi^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Analoge Gleichungen wie die hier in Bezug auf α erhaltnen kann man in Bezug auf jedes β, γ etc. aufstellen, wenn man in den Ausdrücken (5.) von p_2, p_3 etc. die Werthe von $q_1, q_3, \ldots q_n$ aus (7.) substituirt. Diese Gleichungen ergeben sich auch sämmtlich auf einmal, wenn man die Summe der Quadrate der Werthe (7.) von $q_1, q_2, \ldots q_n$ bildet, welche zufolge (6.) gleich

$$p_1 p_2 + p_2 p_2 \ldots + p_n p_n$$

sein mufs.

Wenn man, anstatt die Quadrate der Werthe (7.) der Gröfsen q_i unmittelbar zu addiren, vorher q_1^2 mit x', q_2^2 mit x'', u. s. w. multiplicirt, wo $x', x'', \ldots x^{(n)}$ die n Werthe von x bedeuten, so erhält man auf der linken Seite der Gleichung das Aggregat

$$x' q_1^2 + x'' q_2^2 + \ldots + x^{(n)} q_n^2,$$

zur Rechten eine homogene Function zweiten Grades der Gröfsen p_i und in derselben als Coëfficient von p_1^2 den Ausdruck

$$x' \cdot \alpha' \alpha' + x'' \cdot \alpha'' \alpha'' + \ldots + x^{(n)} \cdot \alpha^{(n)} \alpha^{(n)},$$

als Coëfficient von $2 p_1 p_2$ den Ausdruck

$$x' \cdot \alpha' \beta' + x'' \cdot \alpha'' \beta'' + \ldots + x^{(n)} \cdot \alpha^{(n)} \beta^{(n)},$$

und ähnliche Ausdrücke für die übrigen Coëfficienten. Diese Ausdrücke lassen sich aber unmittelbar auf die Zahlencoëfficienten der Gleichungen (1.) zurückführen. Die erste dieser Gleichungen ergiebt nämlich:

$$x' \alpha' = (a, a) \alpha' + (a, b) \beta' + \ldots + (a, p) \varpi',$$
$$x'' \alpha'' = (a, b) \alpha'' + (a, b) \beta'' + \ldots + (a, p) \varpi'',$$

u. s. w.

Wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ multiplicirt und addirt, so erhält man nach (8.) und (9.) den Coëfficient von p_1^2,

$$x' \alpha'^2 + x'' \alpha''^2 + \ldots + x^{(n)} \alpha^{(n)2} = (a, a).$$

Wenn man hingegen dieselben Gleichungen der Ordnung nach mit β', β'' etc. multiplicirt und addirt, so erhält man den Coëfficient von $2 p_1 p_2$,

$$x' \alpha' \beta' + x'' \alpha'' \beta'' + \ldots + x^{(n)} \alpha^{(n)} \beta^{(n)} = (a, b),$$

und auf dieselbe Weise ergeben sich die Werthe aller übrigen Coëfficienten der homogenen Function 2ten Grades. Man findet so die Gleichung

10.
$$x' q_1^2 + x'' q_2^2 + \ldots + x^{(n)} q_n^2 =$$
$$(a, a) p_1^2 + 2(a, b) p_1 p_2 + 2(a, c) p_1 p_3 + \ldots$$
$$+ (b, b) p_2^2 + 2(b, c) p_2 p_3 + \ldots$$
$$+ (c, c) p_3^2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots$$

Hätte man statt der symbolischen Ausdrücke (a, a), (a, b) u. s. w. wirklich die Quadrate und Producte aa, ab u. s. w., so würde die homogene Function zur Rechten sich in das Quadrat $\{ap_1 + bp_2 + cp_3 + \ldots.\}^2$ verwandeln.

Auf eine noch übersichtlichere Art ergiebt sich die Gleichung (10.) aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
(a,a)p_1 + (a,b)p_2 + (a,c)p_3 + \ldots. &= x'\alpha' \cdot q_1 + x''\alpha'' \cdot q_2 + x'''\alpha''' \cdot q_3 + \ldots., \\
(b,a)p_1 + (b,b)p_2 + (b,c)p_3 + \ldots. &= x'\beta' \cdot q_1 + x''\beta'' \cdot q_2 + x'''\beta''' \cdot q_3 + \ldots., \\
(c,a)p_1 + (c,b)p_2 + (c,c)p_3 + \ldots. &= x'\gamma' \cdot q_1 + x''\gamma'' \cdot q_2 + x'''\gamma''' \cdot q_3 + \ldots., \\
&\text{u. s. w.,}
\end{aligned}$$

die man dadurch erhält, dafs man für die Gröfsen p_i ihre Ausdrücke durch die Gröfsen q_i setzt, und die Coëfficienten der einzelnen q_i vermittelst der Gleichungen (1.) auf einen Term reducirt. Multiplicirt man die vorstehenden Gleichungen der Reihe nach mit p_1, p_2 u. s. w. und addirt sie alle, so erhält man links die obige homogene Function 2ter Ordnung, und rechts vermittelst der Gleichungen (7.) den Ausdruck

$$x' q_1^2 + x'' q_2^2 + \ldots. + x^{(n)} q_n^2.$$

In der Abhandlung „De binis quibuslibet functionibus etc." im 12ten Bande von *Crelle's* Journal bin ich von den beiden Gleichungen (6.) und (10.) ausgegangen, und auf dem umgekehrten Wege zu dem System (1.) und den Gleichungen (3.) und (4.) gelangt.

Allgemeine Correctionsformeln der Werthe der Unbekannten.

4.

Aus den bereits entwickelten Relationen zwischen den verschiedenen Systemen von Werthen der Unbekannten, welche den verschiedenen Werthen von x entsprechen, lassen sich auch einfache Ausdrücke für die nach den Gröfsen (a, a), (a, b), ... genommnen partiellen Differentialquotienten von x, $\alpha, \beta, \ldots.$ folgern. Diese partiellen Differentialquotienten bestimmen die für kleine Änderungen der Zahlencoëfficienten (a, a), (a, b) etc. an den gefundnen Werthen anzubringenden Correctionen, wenn man die Quadrate und Producte dieser Änderungen vernachlässigt. Es ist hiebei nur nöthig, die Differentialquotienten zweier Gröfsen, x' und α', zu suchen, da die übrigen sich ganz analog bilden lassen. Bezeichnet man durch

$$(a,a) + \Delta(a,a), \quad x' + \Delta x', \quad \alpha' + \Delta\alpha' \quad \text{u. s. w.}$$

die geänderten Werthe von (a, a), x', α' u. s. w., und vernachlässigt man die

2ten Potenzen der Incremente, so dafs die Formeln für Differentiale streng richtig sind, so hat man zuerst aus (1.)

$$11.\quad \begin{cases} \alpha'\cdot\Delta x' - \{\alpha'\cdot\Delta(a,a)+\beta'\cdot\Delta(a,b)+\gamma'\cdot\Delta(a,c)+\ldots.\} \\ \quad = \{(a,a)-x'\}\Delta\alpha'+(a,b)\Delta\beta'+(a,c)\Delta\gamma'+\ldots., \\ \beta'\cdot\Delta x' - \{\alpha'\cdot\Delta(b,a)+\beta'\cdot\Delta(b,b)+\gamma'\cdot\Delta(b,c)+\ldots.\} \\ \quad = (b,a)\Delta\alpha'+\{(b,b)-x'\}\Delta\beta'+(b,c)\Delta\gamma'+\ldots., \\ \gamma'\cdot\Delta x' - \{\alpha'\cdot\Delta(c,a)+\beta'\cdot\Delta(c,b)+\gamma'\cdot\Delta(c,c)+\ldots.\} \\ \quad = (c,a)\Delta\alpha'+(c,b)\Delta\beta'+\{(c,c)-x'\}\Delta\gamma'+\ldots., \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit α', β', γ', ... und addirt sie nach geschehener Multiplication, so verschwinden wegen der Gleichungen (1.) die Gröfsen zur Rechten des Gleichheitszeichens, und man erhält, da der Coëfficient von $\Delta x' = 1$ wird:

$$12.\quad \begin{aligned} \Delta x' = {} & \alpha'\alpha'\cdot\Delta(a,a)+2\alpha'\beta'\cdot\Delta(a,b)+2\alpha'\gamma'\cdot\Delta(a,c)+\ldots. \\ & +\beta'\beta'\cdot\Delta(b,b)+2\beta'\gamma'\cdot\Delta(b,c)+\ldots. \\ & +\gamma'\gamma'\cdot\Delta(c,c)+\ldots. \\ & \ldots\ldots \end{aligned}$$

Um die Correctionen $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta'$ etc. zu erhalten, verfahre ich wie folgt. Ich addire zu den Gleichungen (11.) auf beiden Seiten der Reihe nach die Gröfsen $(x'-x'')\Delta\alpha'$, $(x'-x'')\Delta\beta'$, $(x'-x'')\Delta\gamma'$ etc., multiplicire sie hierauf mit α'', β'', γ'' etc. und addire alle. Ebenso addire ich zu den Gleichungen (11.) auf beiden Seiten $(x'-x''')\Delta\alpha'$, $(x'-x''')\Delta\beta'$ etc., multiplicire mit α''', β''' etc. und addire, etc. etc. Durch dieses Verfahren verschwinden jedesmal die Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen und der in $\Delta x'$ multiplicirte Term, und man erhält zwischen den n Variationen $\Delta\alpha'$, $\Delta\beta'$ etc. $n-1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} & (x'-x'')\{\alpha''\Delta\alpha'+\beta''\Delta\beta'+\gamma''\Delta\gamma'+\ldots.\} \\ = {} & \alpha''\alpha'\Delta(a,a)+\{\alpha''\beta'+\alpha'\beta''\}\Delta(a,b)+\beta''\beta'\Delta(b,b) \text{ etc.}, \\ & (x'-x''')\{\alpha'''\Delta\alpha'+\beta'''\Delta\beta'+\gamma'''\Delta\gamma'+\ldots.\} \\ = {} & \alpha'''\alpha'\Delta(a,a)+\{\alpha'''\beta'+\alpha'\beta'''\}\Delta(a,b)+\beta'''\beta'\Delta(b,b) \text{ etc.}, \\ & \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}, \end{aligned}$$

zu welchen als $n$te noch nach (3.) die Gleichung

$$\alpha'\Delta\alpha'+\beta'\Delta\beta'+\gamma'\Delta\gamma'+\ldots. = 0$$

kommt. Multiplicirt man diese letzte Gleichung mit α' und die $n-1$ vorhergehenden respective mit $\frac{\alpha''}{x'-x''}$, $\frac{\alpha'''}{x'-x'''}$ u. s. f. und addirt alle, so werden zufolge (9.) die Gröfsen $\Delta\beta'$, $\Delta\gamma'$ etc. sämmtlich eliminirt und man erhält:

$$13.\quad \Delta\alpha' = \alpha'\left\{\frac{\alpha''\alpha''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\alpha'''}{x'-x'''}+\ldots.\right\}\Delta(a,a)$$
$$+\left(\beta'\left\{\frac{\alpha''\alpha''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\alpha'''}{x'-x'''}+\ldots.\right\}+\alpha'\left\{\frac{\alpha''\beta''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\beta'''}{x'-x'''}+\ldots.\right\}\right)\Delta(a,b)$$
$$+\beta'\left\{\frac{\alpha''\beta''}{x'-x''}+\frac{\alpha'''\beta'''}{x'-x'''}+\ldots.\right\}\Delta(b,b)+\text{etc.}$$

Man hat daher aus (12.) und (13.) die strengen Differentialformeln:

$$14.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial(a,a)} = \alpha'\alpha'; \quad \dfrac{\partial x'}{\partial(a,b)} = 2\alpha'\beta'; \text{ etc.} \\ \dfrac{\partial\alpha'}{\partial(a,a)} = \alpha'\left\{\dfrac{\alpha''\alpha''}{x'-x''}+\dfrac{\alpha'''\alpha'''}{x'-x'''}+\ldots.\right\}; \quad \dfrac{\partial\alpha'}{\partial(b,b)} = \beta'\left\{\dfrac{\alpha''\beta''}{x'-x''}+\dfrac{\alpha'''\beta'''}{x'-x'''}+\ldots.\right\}; \\ \dfrac{\partial\alpha'}{\partial(a,b)} = \dfrac{\beta'}{\alpha'}\dfrac{\partial\alpha'}{\partial(a,a)}+\dfrac{\alpha'}{\beta'}\dfrac{\partial\alpha'}{\partial(b,b)}; \quad \dfrac{\partial\alpha'}{\partial(b,c)} = \dfrac{\gamma'}{\beta'}\dfrac{\partial\alpha'}{\partial(b,b)}+\dfrac{\beta'}{\gamma'}\dfrac{\partial\alpha'}{\partial(c,c)}; \text{ etc.} \end{cases}$$

Mit den nöthigen Vertauschungen geben diese eleganten Formeln die ersten Differentialquotienten aller Unbekannten der n Systeme nach allen Coëfficienten des gegebenen Systems (1.). Man sieht aus denselben, dafs die ersten Differentialquotienten der Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades ohne weitere Rechnung unmittelbar durch die Werthe der Unbekannten gegeben sind, und dafs die ersten Differentialquotienten jeder der Unbekannten $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ etc. nach den Gröfsen (a, b), (b, c) etc. sich aus ihren ersten Differentialquotienten nach den Gröfsen (a, a), (b, b) etc. leicht zusammensetzen lassen, so dafs man nur diese letztern zu berechnen hat, von welchen wieder je zwei auseinander durch die Gleichung $\dfrac{\alpha'\partial\alpha'}{\partial(b,b)} = \dfrac{\beta'\partial\beta'}{\partial(a,a)}$ erhalten werden. Die ersten Differentialquotienten der Gröfsen $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ etc. geben ferner sogleich auch die *zweiten* der Wurzeln x', x'' etc. Wenn die Incremente $\Delta(a, b)$ und $\Delta(b, a)$ verschieden sind, so hat man für $\Delta(a, b)$ in (12.) ihre halbe Summe $\frac{1}{2}(\Delta(a, b)+\Delta(b, a))$ zu setzen, und in (13.) den ersten Theil des mit $\Delta(a, b)$ multiplicirten Aggregats mit $\Delta(a, b)$, den zweiten mit $\Delta(b, a)$ zu multipliciren.

Aufstellung der numerischen Gleichungen, von welchen die Säcularstörungen der Excentricitäten und Längen der Perihelien der Bahnen der Planeten abhängen, in der in Bezug auf die Diagonale symmetrischen Form. Formeln zur Bestimmung der willkürlichen Constanten.

5.

Von einem System von der Form der Gleichungen (1.) hängen die Säcularstörungen der Excentricitäten und Längen der Perihelien der Bahnen der sieben Hauptplaneten unseres Sonnensystems ab. Die zur Aufstellung dieser Gleichungen nöthigen numerischen Daten entnehme ich aus Herrn *Leverrier's* Aufsatz „Sur

les variations séculaires des éléments des orbites etc." in den „Additions à la connaissance des temps pour l'an 1843."

Bezeichnet e die Excentricität der Merkursbahn, ϖ die Länge ihres Perihels, und setzt man

$$h = e \sin \varpi, \qquad l = e \cos \varpi,$$

werden ferner dieselben Gröfsen für Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn und Uranus durch die nämlichen Buchstaben mit einem, zwei, drei, ... sechs Accenten bezeichnet, so hat man für die Gröfsen h und l, wenn man sich auf die Glieder beschränkt, die von der ersten Ordnung der Excentricitäten sind, folgende lineäre Differentialgleichungen, in welchen t die Zeit, in Julian. Jahren ausgedrückt, bedeutet:

$$\text{I.} \quad \begin{cases} \frac{dh}{dt} = \{(0,1)+(0,2)+\ldots.\}\,l - \boxed{0,1}\,l' - \boxed{0,2}\,l'' - \ldots., \\ \frac{dl}{dt} = -\{(0,1)+(0,2)+\ldots.\}\,h + \boxed{0,1}\,h' + \boxed{0,2}\,h'' + \ldots., \\ \frac{dh'}{dt} = \{(1,0)+(1,2)+\ldots.\}\,l' - \boxed{1,0}\,l - \boxed{1,2}\,l'' - \ldots., \\ \frac{dl'}{dt} = -\{(1,0)+(1,2)+\ldots.\}\,h' + \boxed{1,0}\,h + \boxed{1,2}\,h'' + \ldots., \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

(*Laplace*, Méc. cél. Buch II. §. 55.). Die Coëfficienten (0, 1) etc. und $\boxed{0,1}$ etc. hängen nur von den Massen der Planeten und von den grofsen Axen ihrer Bahnen ab. Bezeichnet man die ersten mit m und die halben Axen mit a, und versieht diese Gröfsen ebenso mit Accenten wie die andern Gröfsen, so sind je zwei Coëfficienten wie (0, 1) und (1, 0), $\boxed{0,1}$ und $\boxed{1,0}$ durch die Gleichungen

$$\text{II.} \quad \begin{cases} m\sqrt{a}\,(0,1) = m'\sqrt{a'}\,(1,0), \\ m\sqrt{a}\,\boxed{0,1} = m'\sqrt{a'}\,\boxed{1,0} \end{cases}$$

mit einander verbunden. Setzt man zur Integration der Gleichungen I.

$$\begin{aligned} h &= N_0 \sin(gt+\beta); & l &= N_0 \cos(gt+\beta), \\ h' &= N_1 \sin(gt+\beta); & l' &= N_1 \cos(gt+\beta), \\ &\text{etc.} & &\text{etc.}, \end{aligned}$$

wo g und die Gröfsen N Constanten bedeuten, so erhält man durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen I. sieben Bedingungsgleichungen zwischen g und den Gröfsen N:

$$\text{III.} \quad \begin{cases} (g-(0,1)-(0,2)-\ldots.)\,N_0 + \boxed{0,1}\,N_1 + \boxed{0,2}\,N_2 + \ldots. = 0, \\ \boxed{1,0}\,N_0 + (g-(1,0)-(1,2)-\ldots.)\,N_1 + \boxed{1,2}\,N_2 + \ldots. = 0, \\ \boxed{2,0}\,N_0 + \boxed{2,1}\,N_1 + (g-(2,0)-(2,1)-\ldots.)\,N_2 + \ldots. = 0, \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen 7 Gleichungen die Verhältnisse von 6 der Gröfsen N zur 7ten, so erhält man für g eine Gleichung siebenten Grades, also sieben Wurzeln $g, g', g'', \ldots g^{VI}$, und ein zu jeder gehöriges System von Werthen der Verhältnisse der sieben Gröfsen N. Die allgemeinen Integrale der Gleichungen I. sind dann:

$$\text{IV.} \quad \begin{cases} h = N_0 \sin(gt+\beta) + N_0' \sin(g't+\beta') + \ldots, \\ l = N_0 \cos(gt+\beta) + N_0' \cos(g't+\beta') + \ldots, \\ h' = N_1 \sin(gt+\beta) + N_1' \sin(g't+\beta') + \ldots, \\ l' = N_1 \cos(gt+\beta) + N_1' \cos(g't+\beta') + \ldots. \end{cases}$$

Da in jedem System nur g und die Verhältnisse der Gröfsen N_i bestimmt sind, eine der Gröfsen N_i und der Winkel β willkürlich bleiben, so hat man im Ganzen noch 14 willkürliche Constanten, welche durch die als gegeben anzusehenden Anfangswerthe der 14 Gröfsen h und l bestimmt werden müssen.

Nimmt man für die Gröfsen m und a folgende Zahlenwerthe an:

	Masse	Halbe gr. Axe
Mercur	$\frac{1}{1909706}$	0,38709812
Venus	$\frac{1}{401839}$	0,72333230
Erde	$\frac{1}{356354}$	1,00000000
Mars	$\frac{1}{2680337}$	1,52369352
Jupiter	$\frac{1}{1050}$	5,20116636
Saturn	$\frac{1}{3512}$	9,53787090
Uranus	$\frac{1}{17918}$	19,18330500

so werden (nach *Leverrier* a. a. O. S. 13) die Werthe der Gröfsen (i, k) in Sexagesimalsecunden ausgedrückt:

i \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	*	0,447992	0,103506	0,019797	0,00024016	0,00002855	0,00000247
1	2,910335	*	5,174037	0,468978	0,00409110	0,00047742	0,00004104
2	0,891538	6,860112	*	1,817218	0,00912341	0,00103919	0,00008866
3	0,027984	0,102046	0,298228	*	0,00310537	0,00032980	0,00002755
4	1,601114	4,198404	7,061544	14,645853	*	18,196879	0,934785
5	0,077059	0,198360	0,325649	0,629736	7,367279	*	1,390990
6	0,001852	0,004740	0,007723	0,014625	0,105202	0,386656	*

Durch Addition der unter einander stehenden Zahlen erhält man die Zahlen, welche in der Diagonale in III. von g abgezogen werden. Substituirt man ferner

in III. die von Herrn *Leverrier* gegebnen, ebenfalls in Sexagesimalsecunden ausgedrückten, Werthe der Coëfficienten $\boxed{i,k}$, so wird das aufzulösende System Gleichungen:

$$\text{V.}\quad \left\{\begin{array}{l}
(g-5{,}509882)N_0+1{,}870086N_1+0{,}422908N_2+0{,}008814N_3\\
\qquad +0{,}148711N_4+0{,}003908N_5+0{,}000045N_6\end{array}\right\}=0,$$

$$\left\{\begin{array}{l}
0{,}287865N_0+(g-11{,}811654)N_1+5{,}711900N_2+0{,}058717N_3\\
\qquad +0{,}728088N_4+0{,}018788N_5+0{,}000224N_6\end{array}\right\}=0,$$

$$\left\{\begin{array}{l}
0{,}049099N_0+4{,}308033N_1+(g-12{,}970687)N_2+0{,}229326N_3\\
\qquad +1{,}689087N_4+0{,}042580N_5+0{,}000504N_6\end{array}\right\}=0,$$

$$\left\{\begin{array}{l}
0{,}006235N_0+0{,}269851N_1+1{,}397369N_2+(g-17{,}596207)N_3\\
\qquad +5{,}304038N_4+0{,}125346N_5+0{,}001451N_6\end{array}\right\}=0,$$

$$\left\{\begin{array}{l}
0{,}00002231N_0+0{,}00070948N_1+0{,}00218227N_2+0{,}00112462N_3\\
\qquad +(g-7{,}489041)N_4+4{,}815454N_5+0{,}035319N_6\end{array}\right\}=0,$$

$$\left\{\begin{array}{l}
0{,}00000145N_0+0{,}00004522N_1+0{,}00013588N_2+0{,}00006565N_3\\
\qquad +11{,}893979N_4+(g-18{,}585410)N_5+0{,}232241N_6\end{array}\right\}=0,$$

$$\left\{\begin{array}{l}
0{,}00000006N_0+0{,}00000194N_1+0{,}00000579N_2+0{,}00000273N_3\\
\qquad +0{,}313829N_4+0{,}835482N_5+(g-2{,}325935)N_6\end{array}\right\}=0.$$

Das hier vorliegende System hat noch keine in Bezug auf die Diagonale symmetrische Form, wie sie der Gegenstand der Betrachtung in den vorhergehenden Paragraphen gewesen ist. Diese Form kann ihm aber vermöge der Gleichungen II., die zwischen je zweien zur Diagonale symmetrisch liegenden Coëfficienten Statt finden, sehr leicht gegeben werden *). Setzt man nämlich in den Gleichungen V.

$$\text{VI.}\quad N_0=\frac{KM_0}{\sqrt{(m^0\sqrt{a^0})}};\quad N_1=\frac{KM_1}{\sqrt{(m'\sqrt{a'})}};\quad \ldots\quad N_6=\frac{KM_6}{\sqrt{(m^{\text{VI}}\sqrt{a^{\text{VI}}})}},$$

und multiplicirt nach Ausführung dieser Substitution die erste Gleichung mit $\frac{1}{K}\sqrt{(m^0\sqrt{a^0})}$, die zweite mit $\frac{1}{K}\sqrt{(m'\sqrt{a'})}$, u. s. f., so bleiben die Coëfficienten in der Diagonale unverändert und es ist nach II. klar, dafs nun allgemein der Coëfficient in der $i$ten Horizontal- und $k$ten Verticalreihe gleich dem Coëfficienten in der $k$ten Horizontal- und $i$ten Verticalreihe werden mufs.

*) Dadurch, dafs man früher diese vorläufige Präparation, durch welche die zur Diagonale symmetrisch liegenden Coëfficienten gleich werden, verabsäumt hat, ist, abgesehen von der angewandten Auflösungsmethode, die Mühe der Rechnung fast verdoppelt worden.

Man erhält so mit Anwendung der Werthe

$$\text{VII.}\quad \begin{cases} 6{,}7564720-10\ \ldots\ = \log\gamma(m^0\gamma a^0), \\ 7{,}1628084\ -\ -\ \ldots\ = \log\gamma(m'\gamma a'), \\ 7{,}2240592\ -\ -\ \ldots\ = \log\gamma(m''\gamma a''), \\ 6{,}8316297\ -\ -\ \ldots\ = \log\gamma(m'''\gamma a'''), \\ 8{,}6684306\ -\ -\ \ldots\ = \log\gamma(m^{\text{IV}}\gamma a^{\text{IV}}), \\ 8{,}4720856\ -\ -\ \ldots\ = \log\gamma(m^{\text{V}}\gamma a^{\text{V}}), \\ 8{,}1940861\ -\ -\ \ldots\ = \log\gamma(m^{\text{VI}}\gamma a^{\text{VI}}) \end{cases}$$

folgende Gleichungen, in denen statt der Coëfficienten selbst überall, ausgenommen in der Diagonale, ihre Logarithmen gesetzt sind:

$$\text{VIII.}\quad \begin{cases} (g-5{,}509882.0)M_0+9{,}8655252M_1+9{,}1586592M_2+7{,}8700057M_3 \\ \qquad +7{,}2604292M_4+5{,}8766796M_5+4{,}2156819M_6 \end{cases} =0, \\ \begin{cases} 9{,}8655252M_0+(g-11{,}8116540)M_1+0{,}6955298M_2+9{,}0999439M_3 \\ \qquad +8{,}3565631M_4+6{,}9646084M_5+5{,}3191061M_6 \end{cases} =0, \\ \begin{cases} 9{,}1586592M_0+0{,}6955298M_1+(g-12{,}970687.0)M_2+9{,}7528822M_3 \\ \qquad +8{,}7832803M_4+7{,}3811819M_5+5{,}7325546M_6 \end{cases} =0, \\ \begin{cases} 7{,}8700057M_0+9{,}0999439M_1+9{,}7528822M_2+(g-17{,}596207.0)M_3 \\ \qquad +8{,}8878063M_4+7{,}4576700M_5+5{,}7989267M_6 \end{cases} =0, \\ \begin{cases} 7{,}2604292M_0+8{,}3565631M_1+8{,}7832803M_2+8{,}8878063M_3 \\ \qquad +(g-7{,}489041.0)M_4+0{,}8789822M_5+9{,}0223508M_6 \end{cases} =0, \\ \begin{cases} 5{,}8766796M_0+6{,}9646084M_1+7{,}3811819M_2+7{,}4576700M_3 \\ \qquad +0{,}8789822M_4+(g-18{,}585410.0)M_5+9{,}6439380M_6 \end{cases} =0, \\ \begin{cases} 4{,}2156819M_0+5{,}3191061M_1+5{,}7325546M_2+5{,}7989267M_3 \\ \qquad +9{,}0223508M_4+9{,}6439380M_5+(g-2{,}325935.0)M_6 \end{cases} =0. \end{cases}$$

Damit die Gröfsen M völlig bestimmt seien, füge ich zu den Gleichungen VIII. noch die Bedingung

$$\text{IX.}\quad M_0^2+M_1^2+M_2^2+\ldots+M_6^2=1.$$

Die algebraischen Ausdrücke der mit (i,k) und $\boxed{i,k}$ bezeichneten Gröfsen haben den Factor $m^{(k)}$. Ändert man daher die für die Massen oben angenommnen Zahlenwerthe, indem man der Masse $m^{(k)}$ einen wenig von 1 verschiednen Factor $1+\mu^{(k)}$ giebt, so sind die für (i,k) und $\boxed{i,k}$ angegebnen Zahlen noch mit diesem Factor $1+\mu^{(k)}$ zu multipliciren. Hiernach erhält in der $(i+1)$ten Gleichung die von g abzuziehende Zahl, die in V. und VIII. dieselbe geblieben ist, die Änderung

$$(i,0)\cdot\mu+(i,1)\cdot\mu'\ldots.+(i,6)\cdot\mu^{\text{VI}},$$

wo jedesmal der Term $(i,i)\cdot\mu^{(i)}$ auszulassen ist. Nach der Art, wie die Gleichungen VIII. aus V. abgeleitet sind, wird in VIII., wenn i und k von einander verschieden sind, der Coëfficient von M_k in der $(i+1)$ten Gleichung

$$\sqrt{\frac{m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}}}{m^{(k)}\sqrt{a^{(k)}}}}\cdot\boxed{i,k},$$

und erhält daher den Factor

$$\sqrt{((1+\mu^{(i)})(1+\mu^{(k)}))},$$

wofür man, da die Quadrate und Producte der Gröfsen μ vernachlässigt werden, einfacher $1+\frac{1}{2}(\mu^{(i)}+\mu^{(k)})$ setzen kann. Auf diese Weise werden die Variationen der Coëfficienten der Gleichungen VIII. bestimmt, welche kleinen Änderungen der angenommenen Werthe der Planetenmassen entsprechen.

Sind h_0, l_0; h_0', l_0' etc. die der Zeit $t=0$ entsprechenden Werthe von h, l; h', l' etc., und setzt man

$$h_0^{(i)}\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}=H^{(i)},\qquad l_0^{(i)}\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}=L^{(i)},$$

bezeichnet man ferner die den verschiednen Wurzeln g, g', ... g^{VI} entsprechenden Werthe von M_i mit M_i, M_i', ... M_i^{VI}, so hat man zur Bestimmung der 14 willkürlichen Constanten K, β; K', β' etc. zufolge (IV.) und (VI.) die beiden Systeme Gleichungen:

$$\begin{aligned}
H &= M_0\cdot K\sin\beta+M_0'\cdot K'\sin\beta'\ldots.+M_0^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\sin\beta^{\text{VI}},\\
H' &= M_1\cdot K\sin\beta+M_1'\cdot K'\sin\beta'\ldots.+M_1^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\sin\beta^{\text{VI}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
H^{\text{VI}} &= M_6\cdot K\sin\beta+M_6'\cdot K'\sin\beta'\ldots.+M_6^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\sin\beta^{\text{VI}},\\
L &= M_0\cdot K\cos\beta+M_0'\cdot K'\cos\beta'\ldots.+M_0^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\cos\beta^{\text{VI}},\\
L' &= M_1\cdot K\cos\beta+M_1'\cdot K'\cos\beta'\ldots.+M_1^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\cos\beta^{\text{VI}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
L^{\text{VI}} &= M_6\cdot K\cos\beta+M_6'\cdot K'\cos\beta'\ldots.+M_6^{\text{VI}}\cdot K^{\text{VI}}\cos\beta^{\text{VI}}.
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man nach §. 3., da die Gröfsen M_0, M_1 etc. mit den dort gebrauchten α, β etc. übereinkommen,

$$\begin{aligned}
A &= K\sin\beta = HM_0+H'M_1\ldots.+H^{\text{VI}}M_6,\\
B &= K\cos\beta = LM_0+L'M_1\ldots.+L^{\text{VI}}M_6,\\
A' &= K'\sin\beta' = HM_0'+H'M_1'\ldots.+H^{\text{VI}}M_6',\\
B' &= K'\cos\beta' = LM_0'+L'M_1'\ldots.+L^{\text{VI}}M_6',\\
&\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.},
\end{aligned}$$

woraus sich die Werthe der Winkel β, β' etc. und der Gröfsen K, K' etc. ergeben, aus welchen letztern durch die Formel (VI.)

$$N_i^{(h)} = \frac{M_i^{(h)} K^{(h)}}{\sqrt{(m^{(i)} \sqrt{a^{(i)}})}}$$

die Werthe der Gröfsen $N_i^{(h)}$ folgen.

Zur Controlle der berechneten Werthe der Gröfsen $N_i^{(h)}$ und der Winkel $\beta^{(h)}$ können die Gleichungen

$$k_0^{(i)} = N_i \sin\beta + N_i' \sin\beta' \ldots + N_i^{\text{VI}} \sin\beta^{\text{VI}},$$
$$l_0^{(i)} = N_i \cos\beta + N_i' \cos\beta' \ldots + N_i^{\text{VI}} \cos\beta^{\text{VI}}$$

dienen, welche aus (IV.) für $t = 0$ folgen.

Wiederholte Transformationen des Systems der Gleichungen VIII.

6.

In den Gleichungen VIII. bemerkt man, dafs im Allgemeinen die Zahlencoëfficienten, die in der Diagonale stehen, beträchtlich gröfser sind als die übrigen, von welchen letztern die Logarithmen angesetzt sind. Wäre dies überall der Fall, so würde man unmittelbar durch ein leichtes und schnelles Näherungsverfahren, welches ich weiter unten auseinander setzen werde, die Werthe der Unbekannten mit beliebiger Strenge finden können. Sobald aber auch nur einzelne der Coëfficienten, die nicht in der Diagonale stehn, beträchtliche Werthe haben, wie es in VIII. der Fall ist, kann dies Verfahren nicht angewendet werden. Dieser hinderliche Umstand läfst sich jedoch dadurch beseitigen, dafs man auf zweckmäfsige Weise die Gleichungen transformirt, indem man mittelst einfacher lineärer Substitutionen immer für zwei der Unbekannten zwei andere Gröfsen einführt.

Es seien nämlich die Gleichungen

$$\ldots + (g-a) M_i + \ldots + c M_k + \ldots + h_{i,l} M_l + \ldots = 0,$$
$$\ldots + c M_i + \ldots + (g-b) M_k + \ldots + h_{k,l} M_l + \ldots = 0$$

zwei von den Gleichungen des Systems VIII., in welchen der aufserhalb der Diagonale befindliche Coëfficient c einen erheblichen Werth hat: so kann man dadurch, dafs man M_i und M_k durch andere Unbekannte P_i und P_k ersetzt und die beiden Gleichungen gehörig zu zwei andern combinirt, das gegebne System in ein andres von ähnlicher Form verwandeln, in welchem, während g unverändert bleibt, der Coëfficient, welcher an die Stelle von c tritt, *verschwindet*. Setzt man nämlich

$$\text{X.} \quad \begin{cases} M_i = \cos\alpha\, P_i - \sin\alpha\, P_k, \\ M_k = \sin\alpha\, P_i + \cos\alpha\, P_k, \end{cases}$$

so wird jetzt in jeder von den beiden Gleichungen die Gröfse g in zwei Gliedern stehn. Man kann aber aus ihnen sogleich wieder zwei solche Gleichungen ableiten, die g nur in Einem Glied enthalten, wenn man einmal die erste Gleichung mit $\cos\alpha$, die 2te mit $\sin\alpha$ multiplicirt und sie nach geschehner Multiplication addirt, und dann die erste mit $-\sin\alpha$, die zweite mit $\cos\alpha$ multiplicirt, und beide nach geschehner Multiplication ebenfalls addirt. Die neuen Gleichungen werden dadurch

$$\ldots + \{g - a\cos^2\alpha - b\sin^2\alpha + 2c\sin\alpha\cos\alpha\} P_i + \ldots + \{(a-b)\sin\alpha\cos\alpha + c\cos 2\alpha\} P_k + \ldots + (h_{i,l}\cos\alpha + h_{k,l}\sin\alpha) M_l + \ldots = 0,$$

$$\ldots + \{(a-b)\sin\alpha\cos\alpha + c\cos 2\alpha\} P_i + \ldots + \{g - a\sin^2\alpha - b\cos^2\alpha - 2c\sin\alpha\cos\alpha\} P_k + \ldots + (-h_{i,l}\sin\alpha + h_{k,l}\cos\alpha) M_l + \ldots = 0.$$

Man sieht, dafs hierdurch die Coëfficienten, welche in beiden Gleichungen dem c entsprechen, wieder wie früher einander gleich werden. Auch sonst behält das System seine Symmetrie, wenn statt M_i, M_k überall P_i, P_k eingeführt wird; denn im transformirten System werden die Coëfficienten von P_i und P_k in der $(l+1)$ten Gleichung

$$h_{l,i}\cos\alpha + h_{l,k}\sin\alpha \quad \text{und} \quad -h_{l,i}\sin\alpha + h_{l,k}\cos\alpha,$$

welche mit den Coëfficienten von M_l in der oben angegebnen transformirten $(i+1)$ten und $(k+1)$ten Gleichung übereinkommen, weil nach der Eigenschaft des ursprünglichen Systems VIII. man $h_{l,i} = h_{i,l}$, $h_{l,k} = h_{k,l}$ hat.

Man kann nun den noch willkürlichen Winkel α so bestimmen, dafs der an die Stelle von c getretene Coëfficient

$$(a-b)\sin\alpha\cos\alpha + c\cos 2\alpha = 0$$

wird, was für α die Gleichung

$$\text{XI.} \quad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2c}{b-a}$$

giebt. Sind a' und b' die neuen, den frühern a und b entsprechenden, Gröfsen in der Diagonale, so hat man

$$a' = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha - 2c\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$b' = a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha + 2c\sin\alpha\cos\alpha,$$

und daher zur bequemen Berechnung von a' und b' die Formeln

$$\text{XII.} \quad \begin{cases} b' + a' = b + a, \\ b' - a' = \dfrac{b-a}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2c}{\sin 2\alpha}, \end{cases}$$

welche zugleich durch den für $b' - a'$ angegebnen doppelten Ausdruck eine Controlle der Rechnung enthalten. Die Werthe der beiden Systeme Gröfsen

$$h'_{i,l} = \cos\alpha \cdot h_{i,l} + \sin\alpha \cdot h_{k,l},$$
$$h'_{k,l} = \cos\alpha \cdot h_{k,l} - \sin\alpha \cdot h_{i,l},$$

in welchen l von i und k verschieden ist, können ebenfalls leicht controllirt werden, da der Winkel α derselbe bleibt, und daher zwischen den Summen der den verschiednen l entsprechenden Gröfsen die nämlichen Gleichungen Statt finden.

Die Summen der Quadrate der Zahlencoëfficienten des gegebnen und transformirten Systems sind einander gleich, wenn man jeden Coëfficienten so oft als er vorkommt nimmt, d. h. die aufserhalb der Diagonale befindlichen zweimal. Denn für jedes l ist $h'^2_{i,l} + h'^2_{k,l} = h^2_{i,l} + h^2_{k,l}$; ferner

$$(a'+b')^2 + (a'-b')^2\cos^2 2\alpha + (a'-b')^2\sin^2 2\alpha = (a+b)^2 + (a-b)^2 + 4c^2,$$

und daher

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 + 2c^2.$$

Theilt man daher die Summe der Quadrate der Zahlencoëfficienten in die Summe der Quadrate der in der Diagonale und in die Summe der Quadrate der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten, so wächst durch die Transformation die erste Summe um $2c^2$, während die zweite Summe sich um dieselbe Gröfse $2c^2$, nämlich um die Summe der Quadrate der beiden vernichteten Coëfficienten, verkleinert hat. Wiederholt man die Transformation, indem man immer nur für zwei Unbekannte andre Gröfsen einführt, und zwei Gleichungen auf die angegebne Art zu zwei andern Gleichungen combinirt, so wird für jedes nach und nach durch die angegebne Transformation erhaltene System Gleichungen der Satz gelten,

dafs die Summe der Quadrate der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten um die Summe der Quadrate aller in den einzelnen Transformationen vernichteten Coëfficienten kleiner geworden ist als in dem ursprünglich gegebnen System Gleichungen, und dafs die Summe der Quadrate der in der Diagonale befindlichen Coëfficienten sich um dieselbe Gröfse vermehrt hat.

Man ersieht aus diesem Satze, dafs man in allen Fällen die Summe der Quadrate der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten nach und nach so klein als man nur will machen kann, so dafs sie kleiner werden kann als jede gegebne noch so kleine Gröfse. ***Es lassen sich also auch alle einzelnen aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten durch wiederholte Anwendung der angegebnen Transformation unendlich verkleinern.*** Man kann so immer dem Grenzfall, wo jene Coëfficienten ganz verschwinden und die

Gleichungen sich unmittelbar auflösen lassen, beliebig nahe kommen, ohne dafs es nothwendig wäre, dafs, wie in unserm Fall, schon Anfangs die Mehrzahl der Glieder aufserhalb der Diagonale von denen in derselben an Gröfse übertroffen würde.

Ist nämlich n die Anzahl der Gleichungen und S nach der ersten Transformation die Summe der Quadrate der $n(n-1)$ aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten, so wird, da immer wenigstens zwei dieser Coëfficienten in jedem transformirten System $=0$ sind, das Quadrat des gröfsten $> \frac{S}{(n-2)(n+1)}$. Wenn man daher durch jede neue Transformation immer den gröfsten der aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten zerstört, so wird die Summe im nächsten System $< S\left(1-\frac{2}{(n-2)(n+1)}\right)$, im nächst folgenden $< S\left(1-\frac{2}{(n-2)(n+1)}\right)^2$, und nach i Transformationen $< S\left(1-\frac{2}{(n-1)(n+1)}\right)^i$, welche Gröfse mit wachsendem i kleiner als jede gegebne werden kann. Diese Summen werden aber in der Wirklichkeit viel schneller abnehmen, da die Verringerung nur dann genau in dem Verhältnisse $1 : 1-\frac{2}{(n-1)(n+1)}$ Statt fände, wenn die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten aufser den zweien verschwindenden sämmtlich einander gleich wären. Man sieht zugleich, dafs die Transformation mit dem meisten Erfolg angewandt wird, wenn unter den aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten ein Paar gleiche zur Diagonale symmetrisch liegende Coëfficienten einen vorzugsweise bedeutenden Werth haben. Aus dem Umstande, dafs man durch den unendlich fortgesetzten Procefs die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten unendlich klein machen kann, folgt, dafs die Gleichung $n$ten Grades lauter reelle Wurzeln hat. Denn nach jeder Transformation bleiben die Coëfficienten reell, und wenn die aufserhalb der Diagonale befindlichen verschwinden, werden die mit dem Minuszeichen behafteten Zahlen in der Diagonale die verschiednen Werthe von g.

Aus den eben gemachten Bemerkungen folgt noch der Satz, dafs die Summe der Coëfficienten in der Diagonale gleich der Summe der Gröfsen g und die Summe der Quadrate *aller* Coëfficienten gleich der Summe ihrer Quadrate sein mufs, wenn man für die Coëfficienten in der Diagonale immer die mit dem Minuszeichen behafteten Zahlen nimmt. Denn die beiden Summen behalten nach jeder Transformation denselben Werth wie in den ursprünglichen Gleichungen VIII. und müssen ihn daher noch in dem Grenzfalle behalten, in welchem die Coëfficienten aufserhalb der Diagonale verschwinden und die in der Diagonale befindlichen den Gröfsen g gleich werden.

In den Gleichungen VIII. ist unter allen Coëfficienten aufserhalb der Diagonale der gröfste in der 5ten und 6ten Gleichung, dessen Logarithmus $= 0{,}8789822$. Dieser wurde bei der Rechnung zuerst zu Null gemacht, und so wurde auch bei allen folgenden Substitutionen im Allgemeinen die Regel befolgt, jedesmal den gröfsten von den aufserhalb der Diagonale vorhandnen Coëfficienten gleich Null zu machen. Im Ganzen wurden nach und nach zehn Paare von Unbekannten durch neue ersetzt. Da die Ausführung einer Substitution sehr schnell gemacht ist, und jede derselben für die Auffindung aller Systeme der Werthe der Unbekannten, welche die sieben Auflösungen ergeben, zugleich Gewinn bringt, so schien es am vortheilhaftesten, dieser für alle sieben Auflösungen gleichzeitig vorbereitenden Rechnung die angegebne Ausdehnung zu geben, obgleich man schon früher zur Anwendung einer Näherungsmethode hätte schreiten können. Wenn die jedesmalige erste Unbekannte mit (0), die zweite mit (I) u. s. f. bezeichnet wird, so sind die verschiednen Paare, die nach und nach durch neue ersetzt wurden, und die zu der Substitution dienenden Winkel α folgende:

XIII.

(IV)	und	(V)	. . . .	$\alpha =$	$+$	26^0	$52'$	$38'',12$,
(I)	–	(II)	. . . .	– –	$+$	41	40	5,92,
(0)	–	(I)	. . . .	– –	$+$	17	9	20,35,
(II)	–	(III)	. . . .	– –	$+$	36	22	14,58,
(IV)	–	(VI)	. . . .	– –	$-$	11	54	41,37,
(0)	–	(III)	. . . .	– –	$+$	1	31	11,46,
(I)	–	(II)	. . . .	– –	$+$	2	7	52,40,
(V)	–	(VI)	. . . .	– –	$-$	0	57	36,18,
(0)	–	(II)	. . . .	– –	$-$	0	59	46,42,
(I)	–	(III)	. . . .	– –	$+$	1	38	7,62.

Man sieht, dafs nur die Unbekaunten (0), (I), (II), (III) und wiederum die Unbekannten (IV), (V), (VI) mit einander verbunden worden sind, und so hat sich bei diesen Transformationen die Gruppirung der *sieben* Planeten in *vier* und *drei* von selber dargeboten, ohne dafs hiebei von der Strenge etwas geopfert werden durfte.

Die unten folgende Tabelle giebt die *zehn* Systeme, in welches das gegebne nach und nach transformirt worden ist, wobei ich in jedem System den Coëfficient, welcher in dem folgenden Systeme beseitigt ist, durch Sternchen bezeichnet habe.

Schemata der Gleichungen (VIII.) und der zehn transformirten Systeme.

(Es ist aufser den Gröfsen der Diagonale abwechselnd blofs die obere oder die untere Hälfte jedes Schemas angesetzt, das letzte jedoch vollständig ausgefüllt worden. Nur in der Diagonale stehn Numeri, vor welchen die Gröfsen g weggelassen worden, sonst überall die Logarithmen, bei welchen durchweg -10 zu ergänzen ist. Wenn die Logarithmen zu negativen Numeris gehören, ist es durch n angezeigt.)

Gegebenes System.

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
	−5.5098820	9.8655252	9.1586592	7.8700057	7.2604292	5.8766796	4.2156819	0
	———	−11.8116540	10.6955298	9.0999439	8.3565631	6.9646084	5.3191061	1
0	−5.5098820	———	−12.9706870	9.7528822	8.7832803	7.3811819	5.7325546	2
1	9.8655252	−11.8116540	———	−17.5962070	8.8878063	7.4576700	5.7989267	3
2	9.1586592	***10.6955298***	−12.9706870	———	−7.4890410	***10.8789822***	9.0223508	4
3	7.8700057	9.0999439	9.7528872	−17.5962070	———	−18.5854100	9.6439380	5
4	7.2197860	8.3157530	8.7422682	8.8462593	−3.6533425	———	−2.3259350	6
5	6.8787034n	7.9755587n	8.4031471n	8.5099694n	*	−22.4211085	———	
6	4.2156819	5.3191061	5.7325546	5.7989267	9.4669363	9.5382132	−2.3259350	

Erstes transformirtes System.

Zweites transformirtes System.

	−5.5098820	***9.8088089***	9.5799453n	7.8700057	7.2197860	6.8787034n	4.2156819	0
	———	−7.3968844	*	9.6724433	8.7175126	8.3780737n	5.7117103	1
0	−5.3111122	———	−17.3854565	9.5304363	8.4395088	8.1009230n	5.4231118	2
1	*	−7.5956542	———	−17.5962070	8.8462593	8.5099694n	5.7989267	3
2	9.5601792n	9.0497211	−17.3854565	———	−3.6533425	*	9.4669363	4
3	9.1638436	9.6505590	***9.5304363***	−17.5962070	———	−22.4211085	9.5382132	5
4	8.2298539	8.6934635	8.4395088	8.8462593	−3.6533425	———	−2.3259350	6
5	7.8902619n	8.3540409n	8.1009230n	8.5099694n	*	−22.4211085	———	
6	5.2242105	5.6876443	5.4231118	5.7989267	9.4669363	9.5382132	−2.3259350	

Drittes transformirtes System.

Viertes transformirtes System.

	−5.3111122	*	9.3138512n	9 5222066	8.2298539	7.8902619n	5.2242105	0
	———	−7.5956542	9.5508572	9.4678118	8.6934635	8.3540409n	5.6876443	1
0	−5.3111122	———	−17.1356554	*	8.8046407	8.4675546n	5.7683052	2
1	*	−7.5956542	———	−17.8460080	8.6042303	8.2688686n	5.5436860	3
2	9.3138512n	9.5508572	−17.1356554	———	−3.6533425	*	***9.4669363***	4
3	***9.5222066***	9.4678118	*	−17.8460080	———	−22.4211085	9.5382132	5
4	8.2203099	8.6839195	8.7951029	8.5946971	−3.7151584	———	−2.3259350	6
5	7.8902619n	8.3540409n	8.4675546n	8 2688686n	8.8529238n	−22.4211085	———	
6	7.4465920	8.0102012	8.1212408	7.9207282	*	9.5287595	−2.2641190	

Fünftes transformirtes System.

0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.

	0.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
			Sechstes transformirtes System.					
	−5.3022811	7.8914390	***9.3136984**n	*	8.2466210	7.9168235n	7.5728881	0
		−7.5956542	9.5508572	9.4676590	4.6839195	8.3540409n	8.0102012	1
0	−5.3022811		−17.1356554	7.7374784	8.7951029	8.4675546n	8.1212408	2
1	6.0970453	−7.5824233		−17.8548391	8.5896508	8.2638698	7.9156789	3
2	9.3140047n	*	−17.1488863		−3.7151584	8.8529238n	*	4
3	*	9.4676593	7.7368910n	−17.8548391		−22 4211085	9.5287595	5
4	8 2466210	8.7040099	8.7821072	8.5896508	−3.7151584		−2.2641190	6
5	7.9168235n	8.3742385n	8.4546278n	8.2638698n	8.8529238	−22.4211085		
6	7.5728881	8.0302850	8.1082409	7.9156789	*	***9.5287595**	−2.2641190	
			Siebentes transformirtes System.					
			Achtes transformirtes System.					
	−5.3022811	6.0970453	***9.3140047**n	*	8.2466210	7.9200467n	7.5564556	0
		−7.5824233	*	9.4676593	8.7040099	8.3774615n	8.0138517	1
0	−5 2986987		−17.1488863	7.7368910n	8.7821072	8.4578325n	8.0917138	2
1	6.0969796	−7.5824233		−17.8548391	8.5896508	8 2670610n	7.8990825	3
2	*	4.3372594	−17.1524687		−3.7151584	8.8528628n	7.0770747n	4
3	5.9771051	***9.4676593**	7.7368253n	−17.8548391		−22.4267712	*	5
4	8.2198352	8.7040099	8.7842368	8.5896508	−3 7151584		−2 2584562	6
5	7.8931143n	8.3774615n	8.4599504n	8.2670610n	8.8528628n	−22.4267712		
6	7.5296841	8.0138517	8.0938446	7.8990825	7.0770747n	*	−2.2584562	
			Neuntes transformirtes System.					

Zehntes transformirtes System.

XIV.

−5.2986987	6.1061176	*	5.9602777	8.2198352	7.8931143n	7.5296841
6.1061176	***−7.5740431***	6.1861782n	*	8.7132591	8.3867961n	8.0230921
*	6.1861782n	***−17.1524687***	7.7366533n	8.7842368	8.4599504n	8.0938446
5.9602777	*	7.7366533n	***−17.8632192***	8.5730312	8 2505934n	7.8824471
8.2198352	8.7132591	8.7842368	8.5730312	***−3.7151584***	8.8528628n	7.0770747n
7.8931143n	8.3867961n	8.4599504n	8.2505934n	8.8528628n	***−22.4267712***	*
7.5296841	8.0230921	8.0938446	7.8824471	7.0770747n	*	***−2.2584562***

In dem System VIII. geben die in der Diagonale befindlichen Zahlen noch keine Vorstellung von der Gröfse und der Aufeinanderfolge der sieben Wurzeln y; aber schon sogleich nach der zweiten Transformation erhält man durch diese Zahlen eine starke Annäherung an alle ***sieben*** Wurzeln auf einmal, welche bald so grofs wird, dafs sie nur noch kleiner Correctionen bedarf.

Wenn man alle in (XIII.) angegebenen Substitutionen von der Form (X.) zusammenfafst, so dafs die Unbekannten M des Systems (VIII.) unmittelbar durch die Unbekannten des letzten transformirten Systems, welche ich mit

$$R_0,\ R_1,\ \ldots .\ R_6$$

bezeichnen will, ausgedrückt werden, so findet man, wenn man statt der Zahlen die Logarithmen, aber mit den Vorzeichen der Zahlen, setzt:

XV.
$$\begin{cases} M_0 = 9{,}9799291\,R_0 - 9{,}4703632\,R_1 + 8{,}4405137\,R_2 - 8{,}2284096\,R_3, \\ M_1 = 9{,}3810153\,R_0 + 9{,}8476757\,R_1 - 9{,}7461559\,R_2 + 9{,}5662156\,R_3, \\ M_2 = 9{,}2410836\,R_0 + 9{,}8089612\,R_1 + 9{,}7638502\,R_2 - 9{,}6689433\,R_3, \\ M_3 = 8{,}0433639\,R_0 + 8{,}6533681\,R_1 + 9{,}7729660\,R_2 + 9{,}9052324\,R_3, \\ M_4 = \quad 9{,}9409002\,R_4 - 9{,}6581085\,R_5 + 9{,}2467542\,R_6, \\ M_5 = \quad 9{,}6457624\,R_4 + 9{,}9495307\,R_5 + 9{,}0343951\,R_6, \\ M_6 = -9{,}3147106\,R_4 - 8{,}2146974\,R_5 + 9{,}9904855\,R_6. \end{cases}$$

So oft vermittelst der Gleichungen X. zwei Unbekannte durch zwei neue ersetzt werden, bleibt die Summe ihrer Quadrate unverändert. Da niemals eine der vier ersten Unbekannten mit einer der drei letzten verbunden worden ist, sondern beide Gruppen nur unter sich, so mufs man folgende zwei Gleichungen besonders haben:

$$M_0^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = R_0^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2,$$
$$M_4^2 + M_5^2 + M_6^2 = R_4^2 + R_5^2 + R_6^2.$$

Setzt man links statt der Gröfsen M ihre Ausdrücke XV., so erhält man für die Coëfficienten der vier ersten Gleichungen XV. zehn und für die der drei letzten sechs Bedingungen, die zur Prüfung der Zahlen in (XV.) benutzt worden sind. Aus diesen Bedingungsgleichungen folgt auch noch, dafs, um umgekehrt die Gröfsen R durch die Gröfsen M auszudrücken, man in jeder der beiden Gruppen in XV. nur die Horizontalreihen und Verticalreihen der Coëfficienten mit einander zu vertauschen braucht.

Näherungsmethode zur numerischen Auflösung des Systems der Gleichungen (1.), wenn die aufserhalb der Diagonale befindlichen Coëfficienten als kleine Gröfsen erster Ordnung betrachtet werden können.

7.

Wenn in dem System der n Gleichungen (1.)

$$\begin{aligned} \{(a,a)-x\}\alpha + (a,b)\beta + (a,c)\gamma \ldots + (a,p)\varpi &= 0, \\ (b,a)\alpha + \{(b,b)-x\}\beta + (b,c)\gamma \ldots + (b,p)\varpi &= 0, \\ (c,a)\alpha + (c,b)\beta + \{(c,c)-x\}\gamma \ldots + (c,p)\varpi &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\

Bezeichnet man nämlich im Allgemeinen den Werth einer Gröfse u durch

$$u = \Delta^0 u + \Delta' u + \Delta'' u + \Delta''' u \text{ etc.},$$

wo $\Delta^0 u$ den Näherungswerth, $\Delta' u$, $\Delta'' u$ etc. seine successiven Correctionen von den verschiednen Ordnungen bedeuten, so dafs $\Delta^i u$ eine kleine Gröfse der $i$ten Ordnung ist, so findet man in unserm Falle diese immer kleiner werdenden Gröfsen auf folgende Weise. Zuerst bemerke ich, dafs man als Näherungswerth von x jede der n Gröfscn

$$(a, a), \quad (b, b), \quad (c, c), \quad \ldots \quad (p, p)$$

annehmen kann. Für jede dieser Annahmen erhält man ein System von Werthen der Unbekannten. Es reicht hin, das Verfahren für eine dieser Annahmen $\Delta^0 x = (a, a)$ auseinander zu setzen. Man erhält für diese Annahme zunächst

$$\Delta^0 x + \Delta' x = (a, a), \quad \Delta^0 \frac{\beta}{\alpha} = 0, \quad \Delta^0 \frac{\gamma}{\alpha} = 0, \quad \text{etc.}$$

$$\Delta' \frac{\beta}{\alpha} = \frac{(b, a)}{(a, a) - (b, b)}, \quad \Delta' \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{(c, a)}{(a, a) - (c, c)}, \quad \text{etc.}$$

Der Werth von x weicht nämlich von (a, a) nur um Gröfsen der ***zweiten*** Ordnung ab, weshalb die in (XIV.) in der Diagonale befindlichen Coëfficienten die Werthe der Wurzeln x sogleich mit so grofser Annäherung geben, dafs es nur einer leichten Verbesserung bedarf, um die wahren Werthe zu erhalten. Die Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ etc. sind Gröfsen der ***ersten*** Ordnung; der Werth von α selber, welcher $= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 + \text{etc.}\right)}}$, weicht daher von der ***Einheit*** ebenfalls nur um Gröfsen der ***zweiten*** Ordnung ab. Die Correctionen der Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}$ etc. von der ***zweiten*** Ordnung erhält man aus den Gleichungen:

$$\{(a, a) - (b, b)\} \Delta^2 \frac{\beta}{\alpha} = (b, c) \Delta' \frac{\gamma}{\alpha} + (b, d) \Delta' \frac{\delta}{\alpha} + \ldots,$$

$$\{(a, a) - (c, c)\} \Delta^2 \frac{\gamma}{\alpha} = (c, b) \Delta' \frac{\beta}{\alpha} + (c, d) \Delta' \frac{\delta}{\alpha} + \ldots,$$

etc. etc.

Die Correctionen von x von der zweiten und dritten Ordnung erhält man hierauf durch die Gleichung

$$\Delta^2 x + \Delta^3 x = (a, b) \left\{\Delta' \frac{\beta}{\alpha} + \Delta^2 \frac{\beta}{\alpha}\right\} + (a, c) \left\{\Delta' \frac{\gamma}{\alpha} + \Delta^2 \frac{\gamma}{\alpha}\right\} + \text{etc.}$$

Die Correctionen der Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ etc. von der *dritten* und *vierten* Ordnung ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\,\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}$$

$$=(b,c)\Delta^2\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^2\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.}-\{\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\left(\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^2\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\,\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$=(c,b)\Delta^2\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^2\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.}-(\Delta^2 x+\Delta^3 x)\left(\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^2\frac{\gamma}{\alpha}\right),$$

etc. etc.

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\,\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}=(b,c)\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^3\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.},$$

$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x\}\,\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}=(c,b)\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^3\frac{\delta}{\alpha}+\text{etc.},$$

etc. etc.

Man erhält dann $\Delta^4 x+\Delta^5 x$ und $\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}$, $\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}$, etc., $\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}$, $\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}$, etc. durch die Gleichungen

$$\Delta^4 x+\Delta^5 x=(a,b)\left\{\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}\right\}+(a,c)\left\{\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}\right\}+\ldots.,$$

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\,\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}$$

$$=(b,c)\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^4\frac{\delta}{\alpha}+\ldots.-(\Delta^4 x+\Delta^5 x)\left(\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^2\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^3\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\,\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$=(c,b)\Delta^4\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^4\frac{\delta}{\alpha}+\ldots.-(\Delta^4 x+\Delta^5 x)\left(\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^2\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^3\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^4\frac{\gamma}{\alpha}\right),$$

etc. etc.

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\,\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}=(b,c)\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^5\frac{\delta}{\alpha}+\ldots.,$$

$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\,\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}=(c,b)\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^5\frac{\delta}{\alpha}+\ldots.,$$

etc. etc.

Endlich erhält man

$$\Delta^6 x+\Delta^7 x=(a,b)\left\{\Delta^5\frac{\beta}{\alpha}+\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}\right\}+(a,c)\left\{\Delta^5\frac{\gamma}{\alpha}+\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}\right\}+\ldots.,$$

$$\{(a,a)-(b,b)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}$$
$$=(b,c)\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}+(b,d)\Delta^6\frac{\delta}{\alpha}+\ldots.-(\Delta^6 x+\Delta^7 x)\left(\Delta^1\frac{\beta}{\alpha}+\ldots.+\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}\right),$$
$$\{(a,a)-(c,c)+\Delta^2 x+\Delta^3 x+\Delta^4 x+\Delta^5 x\}\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}$$
$$=(c,b)\Delta^6\frac{\beta}{\alpha}+(c,d)\Delta^6\frac{\delta}{\alpha}+\ldots.-(\Delta^6 x+\Delta^7 x)\left(\Delta^1\frac{\gamma}{\alpha}+\ldots.+\Delta^6\frac{\gamma}{\alpha}\right),$$
. . . . . .*).

---

*) Wenn in den vorgelegten Gleichungen (1.) die Coëfficienten aufserhalb der Diagonale nur in *einer* Horizontal- und Verticalreihe klein sind, in den übrigen aber von beliebiger Gröfse, so kann man durch ein ähnliches Näherungsverfahren immer *eine* Wurzel der Gleichung $n$ten Grades und die ihr entsprechenden Werthe der Unbekannten finden. Sind z. B. die Gröfsen (ab), (ac), ... (ap) klein, so erhält man wieder aus der ersten Gleichung den Näherungswerth $x=(aa)$ bis auf Gröfsen 2ter Ordnung exclusive genau. Wenn man diesen Werth in die $n-1$ folgenden Gleichungen substituirt, so erhält man durch strenge Auflösung eines Systems von $n-1$ lineären Gleichungen die Werthe von $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \ldots. \frac{\varpi}{\alpha}$ bis auf Gröfsen 3ter Ordnung excl. genau. Substituirt man diese Werthe wieder in die erste Gleichung, so erhält man den Werth von x bis auf Gröfsen 4ter Ordnung excl. genau, und mit diesem Werthe von x erhält man dann wieder durch Auflösung von $n-1$ lineären Gleichungen die Werthe von $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$ etc. bis zu der 5ten Ordnung excl. genau, u. s. f. Es wird hiebei von Vortheil sein, in den jedesmal aufzulösenden $n-1$ lineären Gleichungen den ersten Näherungswerth von x in den Coëfficienten beizubehalten und die von den Correctionen von x herrührenden Gröfsen mit den ganz constanten Gliedern zu vereinigen, wodurch die Coëfficienten der lineären Gleichungen immer dieselben bleiben und sich nur ihre ganz constanten Glieder ändern, so dafs der gröfste Theil der numerischen Rechnung, welche zur Auflösung der lineären Gleichungen gemacht werden mufs, für die Correctionen aller Ordnungen unverändert beibehalten werden kann. Setzt man

$$x=(aa)+\delta' x+\delta'' x+\delta''' x \text{ etc.},$$

wo $\delta^{(i)}x$ von der $(2i)$ten Ordnung ist, ferner

$$\frac{\beta}{\alpha}=\delta'\frac{\beta}{\alpha}+\delta''\frac{\beta}{\alpha}+\delta'''\frac{\beta}{\alpha} \text{ etc.},$$

wo $\delta^{(i)}\frac{\beta}{\alpha}$ von der $(2i-1)$ten Ordnung ist; setzt man endlich

$$\delta' x+\delta'' x+\ldots.+\delta^{(i)}x=(x)_i,$$
$$\delta'\frac{\beta}{\alpha}+\delta''\frac{\beta}{\alpha}+\ldots.+\delta^{(i)}\frac{\beta}{\alpha}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_i,$$

und gebraucht dieselben Bezeichnungen in Bezug auf $\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\delta}{\alpha}$, etc., so werden die Correctionen der Gröfse x von der $(2i)$ten und der Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}$. etc. von der $(2i+1)$ten Ordnung aus den bereits gefundenen Correctionen niedriger Ordnung durch die folgen-

Nimmt man z. B. für das System der n Gleichungen (1.) die 7 Gleichungen XIV., nachdem man darin alle Zeichen umgekehrt hat, und nimmt als Näherungswerth von x oder g denjenigen, welchen die erste Gleichung giebt, so findet man nach und nach:

$$\begin{aligned} \Delta^0 x + \Delta^1 x &= 5'',2986987 \\ \Delta^2 x + \Delta^3 x &= +\ 1747\cdot6 \\ \Delta^4 x + \Delta^5 x &= -\ 2\cdot3 \\ \Delta^6 x + \Delta^7 x &= 0\cdot0 \\ \hline x = g &= 5'',2988732 \end{aligned}$$

$\Delta^0 \frac{\beta}{\alpha} = 0$	$\Delta^0 \frac{\gamma}{\alpha} = 0$	$\Delta^0 \frac{\delta}{\alpha} = 0$
$\Delta^1 \frac{\beta}{\alpha} = +0{,}00005611390$	$\Delta^1 \frac{\gamma}{\alpha} = 0$	$\Delta^1 \frac{\delta}{\alpha} = +0{,}000007263263$
$\Delta^2 \frac{\beta}{\alpha} = -0{,}00023818658\cdot9$	$\Delta^2 \frac{\gamma}{\alpha} = -0{,}00005383551\cdot3$	$\Delta^2 \frac{\delta}{\alpha} = -0{,}000031224732\cdot1$
$\Delta^3 \frac{\beta}{\alpha} = -\ 102738\cdot2$	$\Delta^3 \frac{\gamma}{\alpha} = -\ 21373\cdot6$	$\Delta^3 \frac{\delta}{\alpha} = -\ 110879\cdot5$
$\Delta^4 \frac{\beta}{\alpha} = -\ 31046\cdot2$	$\Delta^4 \frac{\gamma}{\alpha} = +\ 7022\cdot3$	$\Delta^4 \frac{\delta}{\alpha} = +\ 40788\cdot6$
$\Delta^5 \frac{\beta}{\alpha} = +\ 220\cdot7$	$\Delta^5 \frac{\gamma}{\alpha} = +\ 48\cdot1$	$\Delta^5 \frac{\delta}{\alpha} = +\ 262\cdot2$
$\Delta^6 \frac{\beta}{\alpha} = -\ 33\cdot2$	$\Delta^6 \frac{\gamma}{\alpha} = -\ 7\cdot5$	$\Delta^6 \frac{\delta}{\alpha} = -\ 43\cdot8$
$\Delta^7 \frac{\beta}{\alpha} = -\ 0\cdot3$	$\Delta^7 \frac{\gamma}{\alpha} = 0\cdot0$	$\Delta^7 \frac{\delta}{\alpha} = -\ 0\cdot3$
$\frac{R_1}{R_0} = \frac{\beta}{\alpha} = -0{,}00018278774$	$\frac{R_2}{R_0} = \frac{\gamma}{\alpha} = -0{,}00005397862$	$\frac{R_3}{R_0} = \frac{\delta}{\alpha} = -0{,}000024031342$

den Gleichungen erhalten:

$$\delta^{(i)} x = (ab)\,\delta^{(i)} \frac{\beta}{\alpha} + (ac)\,\delta^{(i)} \frac{\gamma}{\alpha} \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{i-1} \delta^{(i)} x + (x)_i \delta^{(i)} \frac{\beta}{\alpha} = \{(bb) - (aa)\}.\,\delta^{(i+1)} \frac{\beta}{\alpha} + (bc).\,\delta^{(i+1)} \frac{\gamma}{\alpha} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)_{i-1} \delta^{(i)} x + (x)_i \delta^{(i)} \frac{\gamma}{\alpha} = (cb).\,\delta^{(i+1)} \frac{\beta}{\alpha} + \{(cc) - (aa)\}.\,\delta^{(i+1)} \frac{\gamma}{\alpha} + \text{etc.}$$

etc. etc.

Die Näherungsmethode wird hier beschwerlicher, weil man die $n-1$ lineären Gleichungen streng aufzulösen hat, welche im obigen Falle ebenfalls durch Näherung leicht aufgelöst werden konnten, so dafs der Vortheil der Methode sich in diesem Falle grofsentheils darauf beschränkt, dafs man, um den Werth von x zu finden, nicht die Gleichung $n$ten Grades zu bilden und aufzulösen braucht.

$\Delta^0 \frac{\varepsilon}{\alpha} = 0$	$\Delta^0 \frac{\zeta}{\alpha} = 0$	$\Delta^0 \frac{\eta}{\alpha} = 0$
$\Delta^1 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -0{,}010476254$	$\Delta^1 \frac{\zeta}{\alpha} = -0{,}00045646310$	$\Delta^1 \frac{\eta}{\alpha} = -0{,}0011137195$
$\Delta^2 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\ 23384{\cdot}3$	$\Delta^2 \frac{\zeta}{\alpha} = +\ 4349994$	$\Delta^2 \frac{\eta}{\alpha} = -\ 43279{\cdot}0$
$\Delta^3 \frac{\varepsilon}{\alpha} = +\ 13690{\cdot}2$	$\Delta^3 \frac{\zeta}{\alpha} = +\ 55503{\cdot}2$	$\Delta^3 \frac{\eta}{\alpha} = +\ 11793{\cdot}7$
$\Delta^4 \frac{\varepsilon}{\alpha} = +\ 70{\cdot}2$	$\Delta^4 \frac{\zeta}{\alpha} = -\ 5502{\cdot}3$	$\Delta^4 \frac{\eta}{\alpha} = +\ 100{\cdot}9$
$\Delta^5 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\ 14{\cdot}8$	$\Delta^5 \frac{\zeta}{\alpha} = -\ 89{\cdot}9$	$\Delta^5 \frac{\eta}{\alpha} = -\ 13{\cdot}6$
$\Delta^6 \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\ 0{\cdot}1$	$\Delta^6 \frac{\zeta}{\alpha} = +\ 5{\cdot}8$	$\Delta^6 \frac{\eta}{\alpha} = -\ 0{\cdot}2$
$\Delta^7 \frac{\varepsilon}{\alpha} = 0{\cdot}0$	$\Delta^7 \frac{\zeta}{\alpha} = 0{\cdot}0$	$\Delta^7 \frac{\eta}{\alpha} = 0{\cdot}0$
$\frac{R_4}{R_0} = \frac{\varepsilon}{\alpha} = -0{,}010485893$	$\frac{R_5}{R_0} = \frac{\zeta}{\alpha} = -0{,}00041246399$	$\frac{R_6}{R_0} = \frac{\eta}{\alpha} = -0{,}0011168593$

Aus $\alpha^2\left\{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\ldots.\right\}=1$ folgt noch

$$\log\alpha = \log R_0 = 9{,}9999758,$$

woraus ferner

$$\log\beta = \log R_1 = 6{,}2619229\,\mathrm{n}, \qquad \log\varepsilon = \log R_4 = 8{,}0205812{\cdot}5\,\mathrm{n},$$
$$\log\gamma = \log R_2 = 5{,}7321976\,\mathrm{n}, \qquad \log\zeta = \log R_5 = 6{,}6153618\,\mathrm{n},$$
$$\log\delta = \log R_3 = 5{,}3807537\,\mathrm{n}, \qquad \log\eta = \log R_6 = 7{,}0479743\,\mathrm{n}$$

gefunden wird. Die Genauigkeit ist hier viel weiter getrieben als der nachherige Gebrauch verlangt. Wenn man in der That die gefundnen Werthe der Unbekannten in die Gleichungen XIV. substituirt, so findet man eine vollendete Übereinstimmung, indem der Werth des Aggregats, welches verschwinden soll, in keiner Gleichung den zehnmillionensten Theil seines gröfsten Terms erreicht.

Durch die hier auseinandergesetzte Methode sind die folgenden Resultate für die sieben Systeme der Unbekannten gefunden worden.

Tabelle der sieben Systeme der Werthe der Unbekannten des transformirten Systems XIV.

(Nur bei g sind die Zahlen angesetzt, sonst die Logarithmen, bei denen überall -10 in der Characteristik zu ergänzen ist.)

	System I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
g	5.2988733	7.5747191	17.1525573	17.8632966	3.7136434	22.4273091	2.2584168
R_0	9.9999758	5.59372	4.49078	4.77888n	8.020611	6.6558531	7.0453348
R_1	6.26186n	9.9999595	5.44276	4.69090	8.127403	7.2114826	7.296067
R_2	5.73272n	5.99605n	9.9999760	7.88943	7.656551	7.7345775	6.919256
R_3	5.38164n	5.67660n	7.8913067n	9.9999850	7.422751	7.5884936	6.687464
R_4	8.0205807n	8.1275834n	7.6565719n	7.4309490n	9.9999278	7.5772574	6.83876n
R_5	6.6153199n	7.1975215n	7.7307677n	7.5920478n	7.58422n	9.9999867	4.25271
R_6	7.0479752n	7.2980444n	6.9189241n	6.6948000n	6.80754	4.73984n	9.9999986

Wenn man die vorstehenden 7 Systeme der Werthe der Gröfsen R in die Gleichungen XV. substituirt, so findet man die 7 Systeme der Werthe der Gröfsen M. Es ist, um diese Gröfsen mit der erforderlichen Genauigkeit zu erhalten, überflüssig, die Logarithmen aller Gröfsen R auf dieselbe Zahl Stellen zu berechnen. Denn wenn man die Werthe der Gröfsen R substituirt, wird in vielen zur Bestimmung der Gröfsen M zu bildenden Aggregaten der Werth *eines* Terms die andern beträchtlich übertreffen, so dafs man nur von den *Zahlen* die erforderliche Anzahl Stellen zu kennen braucht. Es sind deshalb in der obigen Tabelle einige Logarithmen mit 7, andere aber nur mit 5 Stellen angesetzt worden.

Die Werthe der 7 Systeme der Gröfsen M, wie sie aus den Gröfsen R durch die Formeln XV. abgeleitet worden sind, giebt die folgende Tabelle. Sie sind mit aller Genauigkeit berechnet, welche die Anwendung siebenstelliger Tafeln verstattet.

	System I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
g	5,2988733	7,5747191	17,1525573	17,8632966	3,7136434	22,4273091	2,2584168
M_0	+0,9548364.7	−0,2953047.4	+0,0276998.70	−0,0167131.95	+0,0061320.4	+0,0000356.840	+0,0004905.317
M_1	+0,2403236.7	+0,7041486.2	−0,5602023.6	+0,3639800.2	+0,0104109.52	−0,0003423.278	+0,0013757.54
M_2	+0,1740664.5	+0,6440231.1	+0,5841832.64	−0,4620795.6	+0,0118614.62	+0,0024689.22	+0,0017218.36
M_3	+0,0109897.86	+0,0449154.3	+0,5865879.5	+0,8085248.5	+0,0055361.02	+0,0064128.63	+0,0009850.343
M_4	−0,0091606.953	−0,0113414.30	−0,0016560.475	−0,0006617.204	+0,8744861.9	−0,4517914.9	+0,1759003.9
M_5	−0,0051261.723	−0,0075519.595	−0,0068854.157	−0,0047267.932	+0,4389244.0	+0,8919316.0	+0,1079379.0
M_6	+0,0010783.321	+0,0008513.954	+0,0002124.55	+0,0001363.418	−0,2056750.7	−0,0171791.24	+0,9784694.7

Zur Probe über die richtige Bestimmung der sieben Wurzeln g hat man die beiden Bedingungen, dafs ihre Summe $=$ der Summe der Zahlencoëfficienten der Diagonale in den Gleichungen VIII. oder XIV., und dafs die Summe ihrer Quadrate

= der Summe der Quadrate aller Coëfficienten dieser Gleichungen sein mufs. Die letztere Summe ist im Laufe der Rechnung schon einmal, nämlich zur Prüfung des transformirten Systems XIV. gebraucht worden. Die richtige Herleitung der Gröfsen M aus den für die Gröfsen R gefundnen Werthen kann ebenfalls auf eine doppelte Art für alle gleichzeitig geprüft werden. Wenn man nemlich in dem Schema der Werthe der Gröfsen M einmal die Quadrate der algebraischen Summen der einzelnen Verticalreihen oder das andere Mal die Quadrate der algebraischen Summen der einzelnen Horizontalreihen addirt, so mufs in beiden Fällen die Zahl 7 als Summe gefunden werden. Denn aus dem auf eine dieser Arten gebildeten Ausdruck verschwinden die Producte je zweier verschiedner M nach den Gleichungen (4.) und (9.) in §. 2.; die Summe der quadratischen Glieder $M_0^2 + M_1^2 + \ldots + M_6^2$ mufs aber für jedes der 7 Systeme besonders $= 1$ sein, weil $R_0^2 + R_1^2 + \ldots + R_6^2 = 1$ gemacht worden ist. Diese Prüfungen, welche besonders für die Zeichen der Gröfsen M eine leichte und entscheidende Controlle geben, sind an den Zahlen der obigen Tafel vorgenommen worden, und mit der erwarteten Strenge eingetroffen.

Nachdem die Gröfsen M bestimmt sind, erhält man die Verhältnisse der Unbekannten N des Systems V. mittelst der Gleichungen VI., deren Constanten in VII. angegeben sind. Die hieraus sich ergebenden numerischen Werthe der Verhältnisse der Gröfsen N respective zu N_3 und zu N_6 in den vier ersten und in den drei letzten Systemen sind zugleich mit ihren von den Änderungen der Massen abhängigen Variationen am Schlusse dieses Aufsatzes zusammengestellt worden, um unmittelbar mit den Resultaten verglichen werden zu können, welche Herr *Leverrier* in der „Connaiss. des temps" für 1843 Seite 31 ff. gefunden hat. Ich wende mich jetzt zu der Berechnung dieser Variationen oder der für eine Änderung der angewandten Werthe der Planetenmassen anzubringenden Correctionen.

Berechnung der Variationen, welche die sieben Systeme der Werthe der Unbekannten durch die Änderung der zum Grunde gelegten Werthe der Planetenmassen erfahren.

8.

Die von einer Änderung der Planetenmassen herrührenden Variationen der Werthe der Unbekannten könnten aus den §. 4. gegebnen allgemeinen Formeln entnommen werden, wenn man darin die Variationen der Coëfficienten der gegebenen Gleichungen substituirt, welche man durch Änderung der Planetenmassen erhält. Es ist aber bequemer, die auf diese besondre Form der Variationen bezüglichen Formeln unmittelbar abzuleiten.

Ich will das System der Gleichungen VIII. folgendermaafsen bezeichnen:

$$\text{XVI.}\quad \begin{cases} 0 = \{g-[0,0]\}M_0+[0,1]M_1+[0,2]M_2+\ldots.+[0,6]M_6, \\ 0 = [1,0]M_0+\{g-[1,1]\}M_1+[1,2]M_2+\ldots.+[1,6]M_6, \\ \text{etc.}, \end{cases}$$

wo

$$[i,k] = \sqrt{\frac{m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}}}{m^{(k)}\sqrt{a^{(k)}}}}.$$

Werden die Massen dadurch corrigirt, dafs man $m(1+\mu)$ statt m, $m'(1+\mu')$ statt m', etc. setzt, so erhält der Coëfficient $[i,k]$, wenn i und k verschieden sind, den Factor

$$1+\tfrac{1}{2}(\mu^{(i)}+\mu^{(k)}),$$

wie oben §. 5. bemerkt wurde; die Coëfficienten in der Diagonale aber, für welche beide Indices gleich sind, erhalten die Correctionen

$$\text{XVII.}\quad \begin{cases} \Delta[0,0] = (0,1)\mu'+(0,2)\mu''+\ldots.+(0,6)\mu^{\text{VI}}, \\ \Delta[1,1] = (1,0)\mu+(1,2)\mu''+\ldots.+(1,6)\mu^{\text{VI}}, \\ \text{etc.}, \end{cases}$$

wo die Zahlenwerthe der Coëfficienten $(0,1)$, $(0,2)$, ...; $(1,0)$, $(1,2)$, ... aus der unmittelbar vor dem System V. aufgestellten Tabelle zu entnehmen sind.

Zwischen den Correctionen der Unbekannten, welche aus diesen Variationen der Coëfficienten hervorgehen, oder zwischen den Gröfsen Δg, ΔM_i erhält man aus der ersten Gleichung in XVI. die folgende:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \{\Delta g-\Delta[0,0]\}M_0+\tfrac{1}{2}\mu\{[0,1]M_1+[0,2]M_2+\ldots.+[0,6]M_6\} \\ & +\tfrac{1}{2}\{(0,1)\mu' M_1+[0,2]\mu'' M_2+\ldots.+[0,6]\mu^{\text{VI}}M_6\} \\ & +\{g-[0,0]\}\Delta M_0+[0,1]\Delta M_1+\ldots.+[0,6]\Delta_6, \end{aligned}$$

oder, weil $[0,1]M_1+[0,2]M_2+\ldots.+[0,6]M_6 = -\{g-[0,0]M_0\}$ ist,

$$\begin{aligned} 0 = {} & \{\Delta g-\Delta[0,0]\}M_0-(g-[0,0])\mu M_0 \\ & +(g-[0,0])\{\Delta M_0+\tfrac{1}{2}\mu M_0\}+[0,1]\{\Delta M_1+\tfrac{1}{2}\mu' M_1\}\ldots.+[0,6]\{\Delta M_6+\tfrac{1}{2}\mu^{\text{VI}}M_6\}. \end{aligned}$$

Bildet man die ähnlichen Gleichungen und setzt:

$$\text{XVIII.}\quad M_i\{(g-[i,i])\mu^{(i)}+\Delta[i,i]\} = p_i, \qquad \Delta M_i+\tfrac{1}{2}\mu^{(i)}M_i = \delta M_i,$$

so erhält man folgendes System Gleichungen:

$$\text{XIX.}\quad \begin{cases} p_0 = M_0\Delta g+(g-[0,0])\delta M_0+[0,1]\delta M_1+\ldots.+[0,6]\delta M_6, \\ p_1 = M_1\Delta g+[1,0]\delta M_0+(g-[1,1])\delta M_1+\ldots.+[1,6]\delta M_6, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Um aus diesen Gleichungen Δg zu erhalten, multiplicire man dieselben respective mit M_0, M_1, etc., so verschwinden nach geschehner Addition die mit den verschiednen Factoren δM_i multiplicirten Aggregate wegen der Gleichungen XVI.; der Coëfficient von Δg wird $\Sigma M^2 = 1$, und daher

$$\text{XX.} \qquad \Delta g = M_0 p_0 + M_1 p_1 \ldots . + M_6 p_6 .$$

Um die Correctionen der Gröfsen M zu erhalten, bringe man die Gleichungen XIX. in die Form:

$$p_0 = M_0 \Delta g + (g - g')\delta M_0 + (g' - [0,0])\delta M_0 + [0,1]\delta M_1 + \ldots . + [0,6]\delta M_6 ,$$
$$p_1 = M_1 \Delta g + (g - g')\delta M_1 + [1,0]\delta M_0 + (g' - [1,1])\delta M_1 + \ldots . + [1,6]\delta M_6 .$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit den zu g' gehörigen Gröfsen des zweiten Systems, M_0', M_1', etc., so bleiben nach geschehner Addition rechts vom Gleichheitszeichen nur die zweiten Terme, indem vermöge der Gleichungen XVII. die übrigen mit den verschiednen Gröfsen δM_i multiplicirten Aggregate verschwinden; ebenso verschwindet das mit Δg multiplicirte Aggregat, weil es den Factor $M_0 M_0' + M_1 M_1' + \ldots . = 0$ erhält, und man findet:

$$M_0'\delta M_0 + M_1'\delta M_1 + \ldots . + M_6'\delta M_6 = \frac{1}{g - g'}\{M_0' p_0 + M_1' p_1 + \ldots . + M_6' p_6\}.$$

Vertauscht man die Gröfsen g', M_0', M_1' etc. des zweiten Systems mit den Gröfsen des 3ten, g'', M_0'', M_1'' etc., dann mit denen des 4ten u. s. f., so erhält man noch fünf ganz ähnliche Gleichungen. Setzt man

$$\tfrac{1}{2}\{\mu M_0^2 + \mu' M_1^2 + \ldots . + \mu^{\text{VI}} M_6^2\} = Q ,$$

so erhält man endlich als siebente Gleichung

$$M_0\delta M_0 + M_1\delta M_1 + \ldots . + M_6\delta M_6 = Q ,$$

wie aus der Gleichung $M_0 \Delta M_0 + M_1 \Delta M_1 + \ldots . + M_6 \Delta M_6 = 0$ folgt. Multiplicirt man diese siebente Gleichung mit M_0, die sechs vorhergefundnen der Reihe nach mit den Factoren M_0', M_0'' etc. und addirt alle nach geschehner Multiplication, so werden die Unbekannten ΔM_i bis auf ΔM_0 sämmtlich eliminirt; ebenso bleibt nur ΔM_1 übrig, wenn man die Factoren M_1, M_1', M_1'' etc. wählt u. s. f. Wenn man die abkürzenden Bezeichnungen einführt:

$$\text{XXI.} \quad \begin{cases} (m_0, m_0) = \dfrac{M_0' M_0'}{g - g'} + \dfrac{M_0'' M_0''}{g - g''} + \ldots . + \dfrac{M_0^{\text{VI}} M_0^{\text{VI}}}{g - g^{\text{VI}}} , \\ (m_0, m_1) = \dfrac{M_0' M_1'}{g - g'} + \dfrac{M_0'' M_1''}{g - g''} + \ldots . + \dfrac{M_0^{\text{VI}} M_1^{\text{VI}}}{g - g^{\text{VI}}} , \\ (m_1, m_1) = \dfrac{M_1' M_1'}{g - g'} + \dfrac{M_1'' M_1''}{g - g_1''} + \ldots . + \dfrac{M_1^{\text{VI}} M_1^{\text{VI}}}{g - g^{\text{VI}}} , \\ \qquad \text{etc.} , \end{cases}$$

wo immer $(m_k, m_{k'}) = (m_{k'}, m_k)$, so findet man auf diese Weise für die Variationen der Unbekannten M des ersten Systems,

$$\text{XXII.} \quad \begin{cases} \delta M_0 = (m_0, m_0)p_0 + (m_0, m_1)p_1 + \ldots + (m_0, m_6)p_6 + M_0 Q, \\ \delta M_1 = (m_1, m_0)p_0 + (m_1, m_1)p_1 + \ldots + (m_1, m_6)p_6 + M_1 Q, \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Man hat jetzt nur noch in XX. und XXII. die Werthe

$$p_i = M_i\{(g - [i,i])\mu^{(i)} + \Delta[i,i]\}$$

zu substituiren und die ganz ähnlichen Ausdrücke zu bilden, welche sich für die übrigen Systeme ergeben.

Setzt man die Correctionen des $(h+1)$ten Systems,

$$\text{XXIII.} \quad \Delta g^{(h)} = B^{(h)}\mu + B_1^{(h)}\mu' + \ldots + B_6^{(h)}\mu^{\text{VI}}$$

und

$$\text{XXIV.} \quad \Delta M_k^{(h)} + \tfrac{1}{2}M_k^{(h)}\mu^{(k)} = \delta M_k^{(h)} = C^{(h,k)}\mu + C_1^{(h,k)}\mu' + \ldots + C_6^{(h,k)}\mu^{\text{VI}},$$

so erhält man auf die im Vorigen angegebne Art die allgemeinen Ausdrücke

$$\text{XXV.} \quad B_i^{(h)} = M_0^{(h)2}(0,i) + M_1^{(h)2}(1,i) + \ldots + M_6^{(h)2}(6,i) + (g^{(h)} - [i,i])M_i^{(h)2}$$

und

$$\text{XXVI.} \quad C_i^{(h,k)} = (m_k, m_0)_h M_0^{(h)}(0,i) + (m_k, m_1)_h M_1^{(h)}(1,i) + \ldots$$
$$\ldots + (m_k, m_6)_h M_6^{(h)}(6,i) + (m_k, m_i)_h M_i^{(h)}\{g^{(h)} - [i,i]\} + \tfrac{1}{2}M_k^{(h)}M_i^{(h)2}.$$

Hier ist, wenn man das Glied, das durch $g^{(h)} - g^{(h)}$ dividirt sein würde, fortläfst,

$$\text{XXVII.} \quad (m_k, m_{k'})_h = \frac{M_k M_{k'}}{g^{(h)} - g} + \frac{M_k' M_{k'}'}{g^{(h)} - g'} + \ldots + \frac{M_k^{\text{VI}} M_{k'}^{\text{VI}}}{g^{(h)} - g^{\text{VI}}}.$$

Es ist ferner

$$(i,i) = 0, \qquad [i,i] = (i,0) + (i,1) + \ldots + (i,6),$$

und die Gröfsen (i,i') sind die oben vor dem System V. angegebnen Zahlen.

Man sieht aus dem Obigen, dafs die 392 Gröfsen $B_i^{(h)}$ und $C_i^{(h,k)}$, welche die Aufgabe zu berechnen fordert, jede durch Addition von respective 7 oder 8 Termen erhalten werden. Diese Terme selbst sind unmittelbar durch die bereits berechneten Werthe von $g^{(h)}$, $M_k^{(h)}$ und durch die 196 Hülfsgröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ gegeben.

Ich lasse jetzt die Tabelle für die Werthe der Hülfsgröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ und dann die Tabelle für die Werthe der Gröfsen $C_i^{(h,k)}$ selber folgen.

Tabelle für die Gröfsen $(m_k, m_{k'})_h$.

$(m_0, m_0)_0$	$(m_0, m_1)_0$	$(m_0, m_2)_0$	. . . .
———	$(m_1, m_1)_0$	$(m_1, m_2)_0$	. . . .
$(m_0, m_0)_1$	———	$(m_2, m_2)_0$	. . . .
$(m_1, m_0)_1$	$(m_1, m_1)_1$	———	. . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	

(Die Tabelle ist nach dem obenstehenden Schema angeordnet; abwechselnd sind von jedem System aufser den Gröfsen der Diagonale selbst entweder nur die oberhalb und rechts oder die unterhalb und links von der Diagonale befindlichen Gröfsen angesetzt.)

	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	
			Erstes System $h = 0$, $g = 5{,}29\,..$					
	−0.038381	+0.0932013	+0.0816323	+0.00555445	+0.00194345	+0.00074331	−0.00052757	0
	———	−0.254815	−0.158150	−0.0095599	+0.00926369	+0.00509745	−0.00116569	1
0	+0.400512	———	−0 227941	−0.0118426	+0.00996476	+0.00551945	−0.00122876	2
1	+0.103056	−0 0202365	———	−0.0819272	+0.00362850	+0.00202784	−0.00043093	3
2	+0.0706072	+0.0689293	−0.0430341	———	+0.481014	+0.271865	−0.057300	4
3	+0.00423656	+0.0068831	+0.0013901	−0.0994045	———	+0.078887	−0.0213148	5
4	−0.0243357	+0.00135226	+0.00218915	+0.00159071	+0.190176	———	+0.341554	6
5	−0.00143356	+0.00045518	+0.00105073	+0.00103262	+0.1301316	−0.0014702	———	
6	+0.00021570	−0.00018029	−0.00023643	−0.00012470	−0.0147348	−0.0024856	+0.191003	
			Zweites System $h = 1$, $g = 7.57\,..$					
			Drittes System $h = 2$, $g = 17.15\,..$					
	+0.0856298	+0.0062117	−0.0166964	+0 0185156	+0.00000408	−0.00009422	+0.00000232	0
	———	−0.129747	+0.287524	−0.410526	−0.00001628	+0.00216940	−0.00005544	1
0	+0.0821214	———	−0.254544	+0.528834	−0.00032370	−0.00367375	+0.00010136	2
1	−0.0237752	+0.494346	———	−0.919560	+0.00161224	+0.00444043	−0.00014924	3
2	+0.0175162	−0.413029	+0.522900	———	+0.0203050	+0.1062406	−0.0033007	4
3	+0.0224095	−0.459062	+0.484098	+0.484324	———	− 0.135726	+0.00327814	5
4	−0.00004716	+0.00097891	− 0.00120111	−0.00043625	+0.0113278	———	+0.0673720	6
5	−0.00025452	+0.00521148	−0.00630574	− 0.00679477	+0.1166629	−0.159867	———	
6	+0.00000755	−0.00015492	+0.00018770	+0.00018543	−0.0033845	+0.00374211	+0.0642776	
			Viertes System $h = 3$, $g = 17.86\,..$					
			Fünftes System $h = 4$, $g = 3.71\,..$					
	−0.597800	−0.089314	−0.057336	−0 00333806	+0.00471325	+0.00255334	−0.00025482	0
	———	−0.197562	−0.087600	−0.0062022	+0.00356312	+0.00210732	+0.00061137	1
0	+0.0593079	———	−0.167018	−0.0077934	+0.00321573	+0.00197753	+0.00089480	2
1	−0.0048745	+0.1252838	———	−0 0724343	+0.00057942	+0.00046129	+0.00063378	3
2	+0.0016626	−0.0659112	+0.1411840	———	+0 0102680	+0.0345275	+0.117865	4
3	−0.00015888	+0.0044668	−0.0148301	+0.208610	———	−0 0345415	+0.0733991	5
4	−0.00000062	−0 00004461	−0.00013197	−0.00007428	+0.0424132	———	+0.657883	6
5	− 0 00000801	+0.00017589	−0.00037614	−0 00149407	+0.0214632	+0.0108917	———	
6	+0.00000021	− 3.00000388	+0.00001077	+0 00003799	−0.00107892	+0.00041120	+0.0497284	
			Sechstes System $h = 5$, $g = 22{,}42\,..$					
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	
Siebentes System $h=6$, $g=2{,}258..$							
−0.316359	−0.0349717	−0.0205206	−0.00120471	−0.00143487	−0.00065308	+0 00057511	0
	−0.1418967	−0.0663951	−0.0036527	−0.00408443	−0.00186829	+0.00127766	1
		−0.1246750	−0.0051820	−0.00512882	−0.00234842	−0.00005060	2
			−0.0654369	−0.00295476	−0.00135496	+0.00076140	3
				−0 535683	−0.243815	+0.123215	4
					−0.171855	+0.0627985	5
						−0.0290838	6

Tabelle der Coëfficienten der verschiednen μ in den Ausdrücken von $\delta M_0^{(h)} = \Delta M_0^{(h)} + \frac{1}{2} M_0^{(h)} \mu$, $\delta M_1^{(h)} = \Delta M_1^{(h)} + \frac{1}{2} M_1^{(h)} \mu'$, etc.

Angewendete Controlle: Die Summe der in Einer Zeile stehenden Coëfficienten mufs = der Hälfte des entsprechenden M sein.

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅
	Erstes System.						
δM_0	$+0{,}4545\,\mu$	$-0{,}1514\,\mu'$	$+0{,}0266\,\mu''$	$+0{,}0048\,\mu'''$	$+0{,}1366\,\mu^{IV}$	$+0{,}0062\,\mu^{V}$	$+0{,}0001\,\mu^{VI}$
δM_1	$+0{,}0605$	$+0{,}5222$	$-0{,}1262$	$-0{,}0107$	$-0{,}3108$	$-0{,}0146$	$-0{,}0004$
δM_2	$+0{,}0421$	$+0{,}2740$	$+0{,}1154$	$-0{,}0119$	$-0{,}3172$	$-0{,}0148$	$-0{,}0004$
δM_3	$+0{,}0027$	$+0{,}0196$	$+0{,}0033$	$+0{,}0104$	$-0{,}0290$	$-0{,}0014$	$+0{,}0000$
δM_4	$-0{,}0037$	$-0{,}0004$	$+0{,}0036$	$+0{,}0004$	$+0{,}0094$	$-0{,}0129$	$-0{,}0011$
δM_5	$-0{,}0018$	$-0{,}0008$	$+0{,}0014$	$+0{,}0001$	$+0{,}0114$	$-0{,}0124$	$-0{,}0004$
δM_6	$+0{,}0004$	$-0{,}0008$	$-0{,}0007$	$-0{,}0001$	$-0{,}0023$	$+0{,}0028$	$+0{,}0012$
	Zweites System.						
$\delta M_0'$	$-0{,}2199\,\mu$	$-0{,}4896\,\mu'$	$+0{,}0861\,\mu''$	$+0{,}0155\,\mu'''$	$+0{,}4394\,\mu^{IV}$	$+0{,}0203\,\mu^{V}$	$+0{,}0005\,\mu^{VI}$
$\delta M_1'$	$-0{,}0339$	$+0{,}3762$	$-0{,}2179$	$+0{,}0085$	$+0{,}2094$	$+0{,}0093$	$+0{,}0002$
$\delta M_2'$	$+0.0039$	$-0{,}2501$	$+0{,}5976$	$-0{,}0038$	$-0{,}0246$	$-0{,}0011$	$-0{,}0000$
$\delta M_3'$	$+0{,}0016$	$-0{,}0105$	$+0{,}0285$	$+0{,}0455$	$-0{,}0409$	$-0{,}0017$	$-0{,}0000$
$\delta M_4'$	$+0{,}0016$	$+0{,}0026$	$-0{,}0027$	$-0{,}0005$	$-0{,}0019$	$-0{,}0043$	$-0{,}0007$
$\delta M_5'$	$+0{,}0008$	$+0{,}0015$	$-0{,}0026$	$-0{,}0002$	$+0{,}0076$	$-0{,}0107$	$-0{,}0001$
$\delta M_6'$	$-0{,}0002$	$-0{,}0002$	$+0{,}0001$	$+0{,}0000$	$-0{,}0013$	$+0{,}0012$	$+0{,}0009$
	Drittes System.						
$\delta M_0''$	$+0{,}0253\,\mu$	$-0{,}0528\,\mu'$	$-0{,}0381\,\mu''$	$-0{,}0032\,\mu'''$	$+0{,}0794\,\mu^{IV}$	$+0{,}0032\,\mu^{V}$	$+0{,}0001\,\mu^{VI}$
$\delta M_1''$	$+0{,}0470$	$+1{,}0569$	$+0{,}6681$	$+0{,}0680$	$-2{,}0356$	$-0{,}0825$	$-0{,}0019$
$\delta M_2''$	$-0{,}0866$	$-1{,}3939$	$-1{,}0638$	$-0{,}0979$	$+2{,}8167$	$+0{,}1149$	$+0{,}0026$
$\delta M_3''$	$+0{,}1305$	$+2{,}6672$	$+1{,}9900$	$+0{,}4561$	$-4{,}7524$	$-0{,}1934$	$-0{,}0044$
$\delta M_4''$	$+0{,}000003$	$-0{,}000748$	$+0{,}00712$	$-0{,}000760$	$-0{,}001084$	$+0{,}001337$	$-0{,}000286$
$\delta M_5''$	$-0{,}00075$	$-0{,}1746$	$-0{,}01376$	$-0{,}00310$	$+0{,}03319$	$-0{,}00194$	$+0{,}00037$
$\delta M_6''$	$+0{,}00002$	$+0{,}00046$	$+0{,}00034$	$+0{,}00009$	$-0{,}00108$	$+0{,}00006$	$+0{,}00020$

	☿	♀	♁	♂	♃	♄	♅
				Viertes System.			
$\delta M_0^{'''}$	$-0{,}0213\,\mu$	$-0{,}0908\,\mu'$	$-0{,}0691\,\mu''$	$-0{,}0040\,\mu'''$	$+0{,}1697\,\mu^{IV}$	$+0{,}0070\,\mu^{V}$	$+0{,}0002\,\mu^{VI}$
$\delta M_1^{'''}$	$+0{,}0979$	$+1{,}9275$	$+1{,}5329$	$+0{,}0952$	$-3{,}3325$	$-0{,}1358$	$-0{,}0031$
$\delta M_2^{'''}$	$-0{,}0883$	$-2{,}0075$	$-1{,}5504$	$-0{,}1336$	$+3{,}4071$	$+0{,}1385$	$+0{,}0031$
$\delta M_3^{'''}$	$-0{,}0948$	$-1{,}9348$	$-1{,}4454$	$+0{,}2850$	$+3{,}4507$	$+0{,}1404$	$+0{,}0032$
$\delta M_4^{'''}$	$+0{,}00022$	$+0{,}00481$	$+0{,}00445$	$-0{,}00011$	$-0{,}00986$	$+0{,}00037$	$-0{,}00022$
$\delta M_5^{'''}$	$+0{,}00108$	$+0{,}02369$	$+0{,}01678$	$-0{,}00194$	$-0{,}03897$	$-0{,}00325$	$+0{,}00024$
$\delta M_6^{'''}$	$-0{,}00003$	$-0{,}00071$	$-0{,}00054$	$+0{,}00012$	$+0{,}00103$	$+0{,}00009$	$+0{,}00013$
				Fünftes System.			
δM_0^{IV}	$+0{,}00610\,\mu$	$-0{,}00665\,\mu'$	$-0{,}00334\,\mu''$	$-0{,}00013\,\mu'''$	$-0{,}00762\,\mu^{IV}$	$+0{,}01366\,\mu^{V}$	$+0{,}00105\,\mu^{VI}$
δM_1^{VI}	$-0{,}00007$	$+0{,}00847$	$-0{,}00281$	$-0{,}00012$	$-0{,}01010$	$+0{,}00914$	$+0{,}00071$
δM_2^{IV}	$-0{.}00008$	$-0{,}00221$	$+0{,}01029$	$-0{,}00011$	$-0{,}01034$	$+0{,}00777$	$+0{,}00060$
δM_3^{IV}	$-0{,}00001$	$-0{,}00020$	$-0{,}00033$	$+0{,}00553$	$-0{,}00306$	$+0{,}00077$	$+0{,}00006$
δM_4^{IV}	$-0{,}00002$	$+0{,}00009$	$+0{,}00009$	$+0{,}00002$	$+0{,}55413$	$-0{,}10874$	$-0{,}00834$
δM_5^{IV}	$-0{,}00007$	$+0{,}00013$	$+0{,}00024$	$+0{,}00008$	$-0{,}23584$	$+0{,}46921$	$-0{,}01436$
δM_6^{IV}	$+0{,}00003$	$+0{,}00042$	$+0{,}00090$	$+0{,}00028$	$-0{,}00786$	$+0{,}07222$	$-0{,}16882$
				Sechstes System.			
δM_0^{V}	$+0{,}0000586\mu$	$+0{,}0000704\mu'$	$+0{,}0000797\mu''$	$-0{,}0000054\mu'''$	$-0{,}0001570\mu^{IV}$	$-0{,}0000241\mu^{V}$	$-0{,}0000044\mu^{VI}$
δM_1^{V}	$-0{,}000038$	$-0{,}001284$	$-0{,}001781$	$+0{,}000085$	$+0{,}002211$	$+0{,}000572$	$+0{,}000063$
δM_2^{V}	$+0{,}0000453$	$+0{,}0019986$	$+0{,}0032785$	$-0{,}0003530$	$-0{,}0037987$	$+0{,}0001901$	$-0{,}0001257$
δM_3^{V}	$+0{,}0000217$	$+0{,}0004211$	$+0{,}0020730$	$+0{,}0064524$	$-0{,}0037660$	$-0{,}0014915$	$-0{,}0005046$
δM_4^{V}	$-0{,}00000$	$-0{,}00007$	$-0{,}00015$	$-0{,}00007$	$+0{,}01602$	$-0{,}24730$	$+0{,}00569$
δM_5^{V}	-0	$-0{,}00004$	$-0{,}00010$	$-0{,}00005$	$+0{,}12280$	$+0{,}32065$	$+0{,}00219$
δM_6^{V}	0	$+0{,}000002$	$+0{,}000006$	$+0{,}000003$	$+0{,}011406$	$-0{,}003022$	$-0{,}016984$
				Siebentes System.			
δM_0^{VI}	$+0{,}0004798\mu$	$-0{,}0001761\mu'$	$-0{,}0000940\mu''$	$-0{,}0000021\mu'''$	$-0{,}0001471\mu^{IV}$	$+0{,}0000428\mu^{V}$	$+0{,}0001419\mu^{VI}$
δM_1^{VI}	$-0{,}000044$	$+0{.}001218$	$-0{,}000143$	$-0{,}000001$	$-0{,}000428$	$-0{,}000333$	$+0{,}000419$
δM_2^{VI}	$-0{,}000030$	$-0{,}000280$	$+0{,}001662$	$+0{,}000002$	$-0{,}000486$	$-0{,}000535$	$+0{,}000529$
δM_3^{VI}	$-0{,}0000021$	$-0{,}0000327$	$-0{,}0000611$	$+0{,}0009840$	$-0{,}0002600$	$-0{,}0004441$	$+0{,}0003086$
δM_4^{VI}	0	$-0{,}0004$	$-0{,}0008$	$-0{,}0002$	$+0{,}1293$	$-0{,}0958$	$+0{,}0561$
δM_5^{VI}	$-0{,}00002$	$-0{,}00015$	$-0{,}00037$	$-0{,}00011$	$-0{,}05413$	$+0{,}07293$	$+0{,}03586$
δM_6^{VI}	0	$+0{,}0001$	$+0{,}0002$	$+0{,}0001$	$-0{,}0015$	$+0{,}0151$	$+0{,}4752$

9.

Zur Controlle der berechneten Werthe der Hülfsgröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ erhält man aus XXVII. vermittelst der Gleichung $\sum_k M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} = 0$ die Formel

XXVIII. $$\sum_k M_k^{(h)} (m_k, m_{k'})_h = 0,$$

durch welche je sieben von den Gröfsen $(m_k, m_{k'})$, welche zu demselben System gehören und in derselben Vertical- oder Horizontalreihe befindlich sind, mit einander verbunden werden. Die Gröfsen $B_i^{(h)}$, $C_i^{(h,l)}$ selbst con-

trollirt man leicht durch die Formeln

$$\text{XXIX.} \quad \begin{cases} \sum_i B_i^{(h)} = g^{(h)}, \\ \sum_i C_i^{(h,k)} = \frac{1}{2} M_k^{(h)}. \end{cases}$$

Da, um $\Delta M_k^{(h)}$ aus $\delta M_k^{(h)}$ zu erhalten, von dem Coëfficienten $C_k^{(h,k)}$, mit welchem $\mu^{(h)}$ multiplicirt ist, die Gröfse $\frac{1}{2} M_k^{(h)}$ abzuziehen ist, so zeigen diese Formeln, ***dafs in der Variation von $g^{(h)}$ die Summe der in die Variationen der Planetenmassen multiplicirten Coëfficienten der Gröfse $g^{(h)}$ selber gleich wird, und dafs die Summe der in die Variationen der Massen multiplicirten Coëfficienten in der Variation der Gröfse $M_k^{(h)}$ verschwindet.*** Die Formeln XXIX. ergeben sich daraus, dafs

$$\sum_i (i', i) = [i', i'], \quad \sum_i M_i^{(h)2} = 1.$$

Man hat daher aus XXV. die Gleichung

$$\sum_i B_i^{(h)} = \sum_{i'} M_{i'}^{(h)2} \cdot g^{(h)} = g^{(h)},$$

und aus XXVI. und XXVIII.,

$$\sum_i C_i^{(h,k)} = \sum_{i'} (m_k, m_{i'})_h M_{i'}^{(h)} \cdot g^{(h)} + \frac{1}{2} M_k^{(h)} \sum_i M_i^{(h)2} = \frac{1}{2} M_k^{(h)},$$

wie zu beweisen ist. Aus der letzten Gleichung sieht man, dafs durch die zweite der Gleichungen XXIX. zugleich die Controlle der für die Gröfsen $(m_k, m_{k'})_h$ gefundnen Werthe gegeben wird.

Zur Controlle der für die Gröfsen $C_i^{(h,k)}$ berechneten Werthe kann man auch noch die Gleichungen

$$\text{XXX.} \quad \sum_k M_k^{(h)} C_i^{(h,k)} = \frac{1}{2} M_i^{(h)2},$$

$$\text{XXXI.} \quad \sum_h M_k^{(h)} C_i^{(h,k)} = 0$$

anwenden, in deren letztrer, wenn $i = k$, für 0 rechter Hand $\frac{1}{2}$ gesetzt werden mufs. Substituirt man den für $C_i^{(h,k)}$ gegebnen Ausdruck XXVI., so ergiebt sich die erste dieser Gleichungen aus XXVIII. Die zweite folgt durch Substitution des für $C_i^{(h,k)}$ gegebenen Ausdrucks vermittelst der Gleichungen

$$\text{XXXII.} \quad \sum_h M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_k, m_{k'})_h = 0,$$

$$\text{XXXIII.} \quad \sum_h g^{(h)} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} (m_k, m_{k'})_h = -\frac{1}{2} \sum_h M_k^{(h)2} M_{k'}^{(h)2}.$$

Die erste dieser Formeln ergiebt sich daraus, dafs wenn man den Werth

$$(m_k, m_{k'})_h = \sum_{h'} \frac{M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')}}{g^{(h)} - g^{(h')}}$$

substituirt, wo h' nur die sechs von h verschiedenen Werthe annehmen darf, sich in der Doppelsumme je zwei durch $g^{(h)} - g^{(h')}$ und $g^{(h')} - g^{(h)}$ dividirte Terme gegenseitig aufheben. Um die Formel XXXIII. zu beweisen, bemerke ich, dafs die dortige Summe gleich wird der Doppelsumme

$$\sum_{h,h'} \frac{g^{(h)} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')}}{g^{(h)} - g^{(h')}},$$

welche sich auf die Doppelsumme

$$\sum_{h,h'} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')}$$

reducirt, wenn man in letztrer die Combination $h = h'$ wieder ausschliefst und jede Combination verschiedner Werthe von h und h' nur einmal nimmt. Giebt man jedem der Accente h und h' *alle* Werthe von 0 bis 6, so dafs man h und h' auch dieselben Werthe annehmen läfst, so mufs man für die vorstehende Doppelsumme den folgenden Ausdruck setzen:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{h,h'} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h')} M_{k'}^{(h')} - \tfrac{1}{2}\sum_{h} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)} \cdot M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{h} M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)}\Big)^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{h} M_k^{(h)2} M_{k'}^{(h)2},$$

welcher sich, wenn k und k' verschieden sind, auf die in der Formel XXXIII. angegebene Gröfse

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{h} M_k^{(h)2} M_{k'}^{(h)2}$$

reducirt. Die vorstehende Gleichung zeigt aufserdem, *dafs man, wenn* $k' = k$, *in* XXXIII. *zu dem Ausdrucke rechts die Gröfse* $\frac{1}{2}$ *zu addiren hat.*

Man hat noch, wenn h und h'', k und k'' von einander verschieden sind, die Formeln:

$$\text{XXXIV.} \qquad \sum_{k}\{M_k^{(h'')} C_i^{(h,k)} + M_k^{(h)} C_i^{(h'',k)}\} = M_i^{(h)} M_i^{(h'')},$$

$$\text{XXXV.} \qquad \sum_{h}\{M_{k''}^{(h)} C_i^{(h,k)} + M_k^{(h)} C_i^{(h,k'')}\} = 0.$$

Um die erste dieser Formeln zu beweisen, mufs man die Gleichung

$$\text{XXXVI.} \qquad \sum_{k} M_k^{(h'')}\{m_k, m_{k'}\}_h = \frac{M_{k'}^{(h'')}}{g^{(h)} - g^{(h'')}}$$

zu Hülfe nehmen, welche man durch Substitution von XXVII. leicht erhält. Zum Beweise der Formel XXXV. dienen die Gleichungen

$$\text{XXXVII.} \begin{cases} \sum_{h}\{M_{k''}^{(h)} M_{k'}^{(h)}(m_k, m_{k'})_h + M_k^{(h)} M_{k'}^{(h)}(m_{k''}, m_{k'})_h\} = 0, \\ \sum_{h} g^h\{M_{k''}^{(h)} M_i^{(h)}(m_k, m_i)_h + M_k^{(h)} M_i^{(h)}(m_{k''}, m_i)_h\} = -\sum_{h} \cdot M_k^{(h)} M_{k''}^{(h)} \cdot M_{k'}^{(h)2}, \end{cases}$$

welche man ähnlich wie XXXII. und XXXIII. findet.

Die Gleichungen XXIX. ergeben sich auch aus der Betrachtung, dafs wenn sich in dem System der Gleichungen VIII. sämmtliche Zahlencoëfficienten in dem gleichen Verhältnisse ändern, die Wurzeln g sich in demselben Verhältnisse ändern, die Werthe der Unbekannten $M_k^{(h)}$ aber ungeändert bleiben werden. Hieraus kann man zufolge der §. 5. gemachten Bemerkung schliefsen, dafs, wenn in den Ausdrücken für $\Delta g^{(h)}$ und $\Delta M_k^{(h)}$ die Variationen $\mu = \mu' \ldots = \mu^{\nu} = 1$ gesetzt werden, sich $\Delta g^{(k)}$ in $g^{(h)}$ verwandeln und $\Delta M_k^{(h)}$ verschwinden mufs, woraus die angeführten Gleichungen von selber folgen. Ebenso ergeben sich die Gleichungen XXX., XXXI., XXXIV., XXXV. a priori daraus, dafs

$$\sum_k M_k^{(h)2} = 1, \quad \sum_h M_k^{(h)2} = 1,$$
$$\sum_k M_k^{(h)} M_k^{(h'')} = 0, \quad \sum_h M_k^{(h)} M_{k''}^{(h)} = 0,$$

und daher die Variationen dieser Summen,

$$\sum_k \cdot M_k^{(h)} \Delta M_k^{(h)}, \quad \sum_h \cdot M_k^{(h)} \Delta M_k^{(h)},$$
$$\sum_k \{M_k^{(h)} \cdot \Delta M_k^{(h'')} + M_k^{(h'')} \cdot \Delta M_k^{(h)}\}, \quad \sum_h \{M_k^{(h)} \cdot \Delta M_{k''}^{(h)} + M_{k''}^{(h)} \cdot \Delta M_k^{(h)}\}$$

verschwinden müssen.

10.

Zur leichtern Vergleichung mit den von Herrn *Leverrier* gefundnen Resultaten sollen noch aus den gefundnen Zahlenwerthen die Coëfficienten in den Variationen der Verhältnisse der Gröfsen N abgeleitet werden. Man gelangt zu denselben vermittelst der Formel

$$\frac{N_i}{N_k} = \frac{M_i}{M_k} \sqrt{\frac{m^{(k)} \sqrt{a_k}}{m^{(i)} \sqrt{a_i}}},$$

woraus

$$\Delta \frac{N_i}{N_k} = \frac{N_i}{N_k} \left\{ \frac{\Delta M_i}{M_i} - \frac{\Delta M_k}{M_k} - \tfrac{1}{2}(\mu^{(i)} - \mu^{(k)}) \right\}$$
$$= \frac{N_i}{N_k} \left\{ \frac{\delta M_i}{M_i} - \frac{\delta M_k}{M_k} - (\mu^{(i)} - \mu^{(k)}) \right\}.$$

Führt man aus XXII. die Werthe der Gröfsen δM ein, so hebt sich der mit Q multiplicirte Term fort. Man kann daher, wenn man, wie hier, blofs $\frac{\delta M_i}{M_i} - \frac{\delta M_k}{M_k}$ braucht, in den Werthen XXVI. der Gröfsen C den *achten* Term fortlassen. Auch bei den Variationen von $\frac{N_i}{N_k}$ findet der Satz Statt, ***dafs die Summe der Coëfficienten der Variationen der Planetenmassen verschwindet,*** welcher eine

schliefsliche Controlle über alle gemachten Rechnungen giebt. Um zu sehen, wie weit diese Controlle erfüllt wird, habe ich in der letzten Columne die Summe der in jeder Horizontalreihe enthaltnen Coëfficienten der μ, μ' etc., welche in den absolut strengen Werthen verschwinden soll, in Einheiten der letzten Decimalstelle hinzugefügt.

Zusammenstellung der sieben Systeme Auflösungen der Gleichungen V. nebst den Variationen der Werthe der Unbekannten für eine Änderung der Planetenmassen in dem Verhältnisse $1:1+\mu^{(h)}$.

Bezeichnung der Unbekannten.	Ihr numerischer Werth für die angenommenen Massen.	Coëfficienten der verschiednen μ in dem Ausdrucke ihrer Variation. μ	μ'	μ''	μ'''	μ^{IV}	μ^{V}	μ^{VI}	
		Erstes System.							
g	5,2988733	−0,1635	+2,4341	+0,9768	+0,0389	+1,9184	+0,0920	+0,0022	
$\frac{N_0}{N_3}$	+103,29933	−78,8504	−200,8713	−28,2320	+6,3283	+287,4875	+13,7627	+0,3828	+76
$\frac{N_1}{N_3}$	+10,200668	+0,1261	−6,2507	−8,4272	+0,1210	+13,7368	+0,6731	+0,0209	0
$\frac{N_2}{N_3}$	+6,416474	+0,0039	−1,3578	−4,0906	−0,0786	+5,2484	+0,2664	+0,0092	+9
$\frac{N_4}{N_3}$	−0,0121377.56	−0,0019	+0,0212	+0,0084	−0,0002	−0,0075	−0,0186	−0,0015	−1
$\frac{N_5}{N_3}$	−0,0106745.14	−0,0013	+0,0169	+0,0066	−0,0003	−0,0046	−0,0165	−0,0009	−1
$\frac{N_6}{N_3}$	+0,0042589.93	+0,0007	−0,0105	−0,0041	−0,0000	+0,0018	+0,0115	+0,0004	−2
		Zweites System.							
g'	7,5747191	+0,4451	+0,3000	+1,2452	+0,1565	+5,1805	+0,2416	+0,0058	
$\frac{N'_0}{N'_3}$	−7,8168589	+2,2665	−14,7849	+7,2402	+0,5134	+4,5186	+0,2409	+0,0053	0
$\frac{N'_1}{N'_3}$	+7,3129033	−0,6047	−1,6959	−6,9033	−0,0089	+8,8286	+0,3747	+0,0093	−2
$\frac{N'_2}{N'_3}$	+5,8086635	−0,1654	−0,8968	−4,1052	−0,1124	+5,0638	+0,2107	+0,0055	+2
$\frac{N'_4}{N'_3}$	−0,0036768.09	+0,0006363	−0,0000285	+0,0014652	−0,0000147	−0,0002942	−0,0015458	−0,0002159	+24
$\frac{N'_5}{N'_3}$	−0,0038477.59	+0,0005197	−0,0001260	+0,0011321	−0,0000661	+0,0003481	−0,0017259	−0,0000821	−2
$\frac{N'_6}{N'_3}$	+0,0008227.714	−0,0001899	−0,0000260	−0,0004623	−0,0000136	−0,0004926	+0,0011596	+0,0000250	+2

Bezeichnung der Unbekannten	Ihr numerischer Werth für die angenommenen Daten.	Coëfficienten der verschiednen μ in dem Ausdrucke ihrer Variation. μ	μ'	μ''	μ'''	μ^{IV}	μ^{V}	μ^{VI}	
				Drittes System.					
g''	17,1525573	+0,1917	+3,6056	+4,2063	−0,0189	+8,7689	+0,3900	+0,0091	
$\frac{N''_0}{N''_3}$	+0,0561438	−0,01741	−0,36213	−0,26764	+0,00591	+0,61579	+0,02490	+0,00057	−1
$\frac{N''_1}{N''_3}$	−0,4454850	+0,13647	+3,31162	+2,04252	−0,04525	−5,22801	−0,21246	−0,00486	+3
$\frac{N''_2}{N''_3}$	+0,4034470	−0,14956	−2,79710	−2,50683	+0,02231	+5,21399	+0,21236	+0,00486	+3
$\frac{N''_4}{N''_3}$	−0,0000411.09	+0,0000092	+0,0001684	+0,0001571	−0,0000280	−0,0003189	+0,0000196	−0,0000074	0
$\frac{N''_5}{N''_3}$	−0,0002686.22	+0,0000306	+0,0005403	+0,0003745	−0,0001810	−0,0008814	+0,0001045	+0,0000125	0
$\frac{N''_6}{N''_3}$	+0,0000157.209								
				Viertes System.					
g'''	17,8632966	+0,0979	+2,2138	+3,1417	+0,2519	+11,6387	+0,5075	+0,0118	
$\frac{N'''_0}{N'''_3}$	−0,0245767	−0,00961	−0,19241	−0,14548	−0,02174	+0,35440	+0,01449	+0,00034	−1
$\frac{N'''_1}{N'''_3}$	+0,2099933	+0,08115	+1,40463	+1,25978	+0,19087	−2,81892	−0,11484	−0,00264	+3
$\frac{N'''_2}{N'''_3}$	−0,2315229	−0,07137	−1,55987	−0,95916	−0,21690	+2,69524	+0,10957	+0,00249	0
$\frac{N'''_4}{N'''_3}$	−0,0000119.17	+0,0000026	+0,0000582	+0,0000588	−0,0000096	−0,0001148	+0,0000089	−0,0000040	+1
$\frac{N'''_5}{N'''_3}$	−0,0001337.88	+0,0000153	+0,0003501	+0,0002358	−0,0001418	−0,0005319	+0,0000651	+0,0000074	0
$\frac{N'''_6}{N'''_3}$	+0,0000073.1946								
				Fünftes System.					
g^{IV}	3,7136434	+0,0001	+0,0031	+0,0067	+0,0021	+0,6602	+2,8276	+0,2137	
$\frac{N^{IV}_0}{N^{IV}_6}$	−0,8166526	+0,00440	+0,88379	+0,44205	+0,01628	+1,04609	−2,10609	−0,28651	+1
$\frac{N^{IV}_1}{N^{IV}_6}$	−0,5439845	+0,00357	+0,10098	+0,14480	+0,00548	+0,54837	−0,66862	−0,13456	+2
$\frac{N^{IV}_2}{N^{IV}_6}$	−0,5382496	+0,00334	+0,09917	+0,06898	+0,00413	+0,49005	−0,54178	−0,12388	+1
$\frac{N^{IV}_3}{N^{IV}_6}$	−0,6201246	+0,00098	+0,02120	+0,03416	−0,00056	+0,36689	−0,30473	−0,11793	+1
$\frac{N^{IV}_4}{N^{IV}_6}$	−1,4263523	−0,00017	−0,00304	−0,00635	−0,00196	+0,57698	−0,32348	−0,24197	+1
$\frac{N^{IV}_5}{N^{IV}_6}$	−1,1251482	−0,00015	−0,00263	−0,00552	−0,00170	+0,64753	−0,47272	−0,16480	+1

Bezeichnung der Unbekannten.	Ihr numerischer Werth für die angenommenen Daten.	Coëfficienten der verschiednen μ in dem Ausdrucke ihrer Variation. μ	μ'	μ''	μ'''	μ^{IV}	μ^{V}	μ^{VI}	
		Sechstes System.							
g^{V}	22,4273091	0	+0,0012	+0,0028	+0,0011	+17,5264	+4,5608	+0,3351	
$\frac{N_0^{\text{V}}}{N_6^{\text{V}}}$	−0,0568966.3	−0,0021	−0,0709	−0,0802	+0,0054	+0,1181	+0,0259	+0,0037	−1
$\frac{N_1^{\text{V}}}{N_6^{\text{V}}}$	+0,2141503.5	+0,0239	+0,5891	+1,1142	−0,0535	−1,2411	−0,3954	−0,0370	+2
$\frac{N_2^{\text{V}}}{N_6^{\text{V}}}$	−1,3413225	−0,0246	+0,2553	−1,7815	+0,1916	+1,1733	+0,1326	+0,0531	−2
$\frac{N_3^{\text{V}}}{N_6^{\text{V}}}$	−8,6001745	−0,0293	−0,5661	−2,7830	−0,0543	−0,6597	+3,5131	+0,5795	+2
$\frac{N_4^{\text{V}}}{N_6^{\text{V}}}$	+8,8225143	+0,0002	+0,0025	+0,0058	+0,0026	−3,2775	+3,2773	−0,0111	−2
$\frac{N_5^{\text{V}}}{N_6^{\text{V}}}$	−27,373541	+0,0004	−0,0025	−0,0056	−0,0025	−21,9435	+22,3477	−0,3939	+1
		Siebentes System.							
g^{VI}	2,2584168	0	+0,0001	+0,0004	+0,0001	+0,9452	+1,3695	−0,0569	
$\frac{N_0^{\text{VI}}}{N_6^{\text{VI}}}$	+0,0137320.0	−0,00030	−0,00493	−0,00263	−0,00006	−0,00410	+0,00099	+0,01104	+1
$\frac{N_1^{\text{VI}}}{N_6^{\text{VI}}}$	+0,0151102.33	−0,00048	−0,00173	−0,00157	−0,00001	−0,00468	−0,00389	+0,01237	+1
$\frac{N_2^{\text{VI}}}{N_6^{\text{VI}}}$	+0,0164237.12	−0,00029	−0,00268	−0,00057	+0,00002	−0,00462	−0,00536	+0,01350	0
$\frac{N_3^{\text{VI}}}{N_6^{\text{VI}}}$	+0,0231931.91	−0,00005	−0,00077	−0,00145	−0,00002	−0,00609	−0,01081	+0,01920	+1
$\frac{N_4^{\text{VI}}}{N_6^{\text{VI}}}$	+0,0603080.14	−0,00001	−0,00013	−0,00029	−0,00009	−0,01590	−0,03378	+0,05021	+1
$\frac{N_5^{\text{VI}}}{N_6^{\text{VI}}}$	+0,0581604.21	−0,00001	−0,00009	−0,00021	−0,00007	−0,02911	−0,01972	+0,04923	+2

Herr *Leverrier* ist auch bei Berechnung der Variationen $\Delta\frac{N_i}{N_k}$, so wie bei Berechnung der Gröfsen $\frac{N_i}{N_k}$ selber, so verfahren, dafs er das vollständige System von *sieben* Gleichungen in zwei Systeme von *vier* und *drei* Gleichungen zerlegt, jedes mit eben so vielen Unbekannten, und bei Berechnung der Variationen der Unbekannten des ersten Systems die Variationen der drei Unbekannten des zweiten und bei Berechnung der Variationen der Unbekannten des zweiten Systems die Variationen der vier Unbekannten des ersten Systems vernachlässigt, und keine weitern Correctionen für diese Vernachlässigungen anbringt. Er variirt nämlich die Coëfficienten der für die Wurzeln g von ihm gebildeten biquadrati-

schen und cubischen Gleichung und berechnet daraus die Variationen Δg, und dann mit diesen durch die strenge Auflösung eines Systems von respective vier und drei lineären Gleichungen die Variationen $\Delta \frac{N_i}{N_k}$. Zur Controlle braucht auch Herr ***Leverrier*** den Satz, dafs in jeder Variation $\Delta \frac{N_i}{N_k}$ die Summe der in die sieben μ multiplicirten Gröfsen verschwinden mufs. Aber diese Controlle ist bei ihm nicht, wie bei unsern strengen Formeln, entscheidend, da sie nach dem von ihm befolgten Gange der Rechnung eintreffen mufs, wie bedeutend auch der durch den Einflufs der von ihm vernachlässigten Glieder verursachte Fehler sein möge. In der That finden zwischen den Zahlencoëfficienten der vorstehenden und der von Herrn ***Leverrier*** gefundenen Ausdrücke der $\Delta \frac{N_i}{N_k}$ nicht unbedeutende Unterschiede Statt, während die Werthe der g und $\frac{N_i}{N_k}$ selber eine viel bessere Übereinstimmung zeigen.

Zur Vergleichung der Genauigkeit der beiderlei Resultate sind die in μ'' multiplicirten Variationen von $\frac{N''_0}{N''_3}$, $\frac{N''_1}{N''_3}$ etc. in die Gleichungen substituirt worden, welche sich aus III. zur Bestimmung dieser Variationen ergeben *). Setzt man nämlich wieder

$$(i,i) = 0, \quad (i,0)+(i,1)+\ldots.+(i,6) = [i,i]$$

so folgt aus den Gleichungen III.

$$(g''-[0,0])\frac{N''_0}{N''_3}+\underline{[0,1]}\frac{N''_1}{N''_3}+\ldots.+\underline{[0,6]}\frac{N''_6}{N''_3} = 0,$$

$$\underline{[1,0]}\frac{N''_0}{N''_3}+(g''-[1,1])\frac{N''_1}{N''_3}+\ldots.+\underline{[1,6]}\frac{N''_6}{N''_3} = 0,$$

etc.

und hieraus, wenn man die Planetenmassen variirt:

$$+\underline{[0,1]}\frac{N''_1}{N''_3}\cdot\mu'+\ldots.+\underline{[0,6]}\frac{N''_6}{N''_3}\mu^{\text{VI}}$$

$$+(g''-\underline{[0,0]})\Delta\frac{N''_0}{N''_3}+\underline{[0,1]}\Delta\frac{N''_1}{N''_3}+\ldots.+\underline{[0,6]}\Delta\frac{N''_6}{N''_3}$$

$$+\frac{N''_0}{N''_3}\{\Delta g''-(0,1)\mu-\ldots.-(0,6)\mu^{\text{VI}}\} = 0,$$

*) Ich habe das dritte System gewählt, weil in den Variationen desselben die Abweichungen besonders erheblich sind; so werden in dem Ausdrucke von $\Delta \frac{N''_2}{N''_3}$ die Coëfficienten der verschiedenen μ bei ***Leverrier*** und nach den hier geführten Rechnungen:

$-0{,}16284$; $-3{,}06732$; $-2{,}71193$; $-0{,}02085$; $5{,}73826$; $0{,}21778$; $0{,}00690$;
$-0{,}14956$; $-2{,}79710$; $-2{,}50683$; $+0{,}02231$; $5{,}21399$; $0{,}21236$; $0{,}00486$.

$$\overline{[1,0]}\frac{N_0'''}{N_3'''}\mu+\overline{[1,2]}\frac{N_2'''}{N_3'''}\mu''+\ldots.+\overline{[1,6]}\frac{N_6'''}{N_3'''}\mu^{VI}$$
$$+\overline{[1,0]}\Delta\frac{N_0'''}{N_3'''}+(g''-[1,1])\Delta\frac{N_1'''}{N_3'''}+\ldots.+\overline{[1,6]}\Delta\frac{N_6'''}{N_3'''}$$
$$+\frac{N_1'''}{N_3'''}\{\Delta g''-(1,0)\mu-(1,2)\mu''-\ldots.-(1,6)\mu^{VI}\}=0,$$

etc.

Diese Gleichungen müssen für die in jedes einzelne μ multiplicirten Terme besonders erfüllt werden. Bezeichnet man z. B. die Coëfficienten von μ'' in $\Delta g''$ und $\Delta\frac{N_k'''}{N_3'''}$ mit γ und ν_k, wo $\nu_3=0$, so müssen die 7 Gröfsen γ und ν_k den 7 Gleichungen

$$\overline{[0,2]}\frac{N_2'''}{N_3'''}+(\gamma-(0,2))\frac{N_0'''}{N_3'''}+(g''-[0,0])\nu_0+\overline{[0,1]}\nu_1+\ldots.+\overline{[0,6]}\nu_6=0,$$
$$\overline{[1,2]}\frac{N_2'''}{N_3'''}+(\gamma-(1,2))\frac{N_1'''}{N_3'''}+\overline{[1,0]}\nu_0+(g''-[1,1])\nu_1+\ldots.+\overline{[1,6]}\nu_6=0,$$

etc.

genügen, von denen die dritte für die beiden ersten Terme blofs den einen $\frac{N_2'''}{N_3'''}\cdot\gamma$ enthalten wird. Wenn man in diese Gleichungen für die Gröfsen γ und ν_k die von Herrn *Leverrier* und die nach der hier geführten Rechnung gefundnen Zahlenwerthe substituirt, so werden die Gröfsen linker Hand, welche in den verschiednen Gleichungen verschwinden sollen,

bei *Leverrier:*

$-0{,}211$; $-0{,}195$; $-0{,}064$; $-0{,}237$; $+0{,}001$; $+0{,}001$; 0;

hier: $+0{,}0002$; $+0{,}0003$; $+0{,}0003$; $+0{,}0002$; $-0{,}0001$; $+0{,}0001$; 0.

Man sieht hieraus, mit wie viel gröfsrer Schärfe die durch Anwendung der strengen Formeln gefundnen Resultate den Gleichungen, durch welche die Correctionen bestimmt werden, Genüge leisten.

11.

Aus den Variationen der Verhältnisse der zu demselben System gehörigen N berechnet Herr *Leverrier* für jedes System die Variation einer dieser Gröfsen selber, welches um die übrigen zu finden ausreicht, und aufserdem die Variationen der 7 Winkel β (§. 5.). Man erhält aber einen mehr symmetrischen Gang der Rechnung, wenn man, ohne die Variationen der Verhältnisse der Gröfsen N einzuführen, deren Berechnung hier nur der Vergleichung der beiderlei Resultate halber an-

gestellt worden ist, die Variationen der Gröfsen N und der Winkel β unmittelbar aus den Variationen der Gröfsen M ableitet, was auf folgende Weise geschieht.

Die Formeln VI. und die am Ende des §. 5. gefundenen Formeln,

$$N_i = \frac{KM_i}{\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}}, \quad K\sin\beta = A, \quad K\cos\beta = B,$$

ergeben

$$\text{XXXVIII.} \qquad \Delta\beta = \frac{B\Delta A - A\Delta B}{K^2}, \qquad \frac{\Delta K}{K} = \frac{A\Delta A + B\Delta B}{K^2},$$

$$\text{XXXIX.} \qquad \Delta N_i = N_i\left\{\frac{\Delta K}{K} + \frac{\delta M_i}{M_i} - \mu^{(i)}\right\},$$

$$= N_i\frac{\Delta K}{K} + \frac{K\delta M_i}{\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}} - N_i\mu_i,$$

wo ich wieder $\delta M_i = \Delta M_i + \frac{1}{2}M_i\mu^{(i)}$ eingeführt habe, weil die Werthe dieser Gröfsen in der oben am Schlufs von §. 8. aufgestellten Tabelle gegeben worden sind. Aus den Formeln (§. 5.)

$$A^{(i)} = HM_0^{(i)} + H'M_1^{(i)} + \ldots.$$
$$B^{(i)} = LM_0^{(i)} + L'M_1^{(i)} + \ldots.$$

folgen, da $\Delta H^{(i)} = \frac{1}{2}H^{(i)}\mu^{(i)}$, $\Delta L^{(i)} = \frac{1}{2}L^{(i)}\mu^{(i)}$, die Gleichungen

$$\Delta A^{(i)} = H\delta M_0^{(i)} + H'\delta M_1^{(i)} + \ldots.$$
$$\Delta B^{(i)} = L\delta M_0^{(i)} + L'\delta M_1^{(i)} + \ldots.$$

Setzt man daher

$$\frac{BH^{(i)} - AL^{(i)}}{K^2} = D_i, \qquad \frac{AH^{(i)} + BL^{(i)}}{K^2} = F_i,$$
$$\frac{B'H^{(h)} - A'L^{(h)}}{K^2} = D'_i, \qquad \frac{A'H^{(h)} + B'L^{(h)}}{K^2} = F'_i,$$
$$\text{etc} \qquad\qquad \text{etc.},$$

so wird zufolge XXXVIII.

$$\Delta\beta = D_0\delta M_0 + D_1\delta M_1 + \ldots. + D_6\delta M_6,$$
$$\Delta\beta' = D'_0\delta M'_0 + D'_1\delta M'_1 + \ldots. + D'_6\delta M'_6,$$
$$\text{etc.}$$
$$\frac{\Delta K}{K} = F_0\delta M_0 + F_1\delta M_1 + \ldots. + F_6\delta M_6,$$
$$\frac{\Delta K'}{K'} = F'\delta M'_0 + F'_1\delta M'_1 + \ldots. + F'_6\delta M'_6,$$
$$\text{etc.}$$

Nennt man $e_0^{(i)}$ und $\varpi_0^{(i)}$ die Anfangswerthe von $e^{(i)}$ und $\varpi^{(i)}$ und setzt

$$e_0^{(i)}\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})} = E^{(i)},$$

so hat man

$$D_i = \frac{E^{(i)}}{K}\sin(\varpi_0^{(i)} - \beta), \qquad F_i = \frac{E^{(i)}}{K}\cos(\varpi_0^{(i)} - \beta),$$
$$D'_i = \frac{E^{(i)}}{K'}\sin(\varpi_0^{(i)} - \beta'), \qquad F'_i = \frac{E^{(i)}}{K'}\cos(\varpi_0^{(i)} - \beta'),$$

etc. etc.

Nach Berechnung der Gröfsen $\frac{\Delta K}{K}$ findet man durch die obige Formel XXXIX. die Variationen ΔN_i, wenn man noch die Gröfsen $\frac{K\delta M_i}{\sqrt{(m^{(i)}\sqrt{a^{(i)}})}} = \frac{N_i}{M_i}\delta M_i$ aus den für die Gröfsen δM_i gefundnen Ausdrücken bestimmt.

Da in dem Ausdrucke von $\delta M_i^{(h)}$ die Coëfficienten der einzelnen μ die Summe $\frac{1}{2}M_i^{(h)}$ haben, so erhält diese Summe in $\frac{\Delta K^{(h)}}{K^{(h)}}$ den Werth $\frac{1}{2}$ und verschwindet in den Ausdrücken von $\Delta\beta^{(h)}$ und $\Delta N_i^{(h)}$, was man auch leicht *a priori* beweiset.

Berlin, den 9ten August 1845.

5.

Ein Lehrsatz von Kegelschnitten.

(Von Herrn Prof. *Umpfenbach* zu Giefsen.)

Lehrsatz. Wenn man an einen Kegelschnitt von einem Puncte A aus zwei Tangenten AB und AC zieht, so verhalten sich die Krümmungshalbmesser in C und A wie AB^3 zu AC^3.

Beweis. Der Winkel der beiden Tangenten sei $= i$. Man nehme die Tangenten zu Coordinaten-Axen an und es sei $AB = a$, $AC = b$.

Die Gleichung des Kegelschnitts ist von der Gestalt:

$$1. \quad \alpha y^2 + 2\beta xy + \gamma x^2 + 2\delta y + 2\eta x + \varepsilon = 0,$$

woraus folgt

$$2. \quad \partial y(\alpha y + \beta x + \delta) + \partial x(\beta y + \gamma x + \eta) = 0$$

und

$$3. \quad \partial^2 y(\alpha y + \beta x + \delta) + \alpha \partial y^2 + 2\beta \partial x \partial y + \gamma \partial x^2 = 0.$$

Differentiirt man die Gleichung des Krümmungskreises:

$$(x-f)^2 + (y-g)^2 - 2(x-f)(y-g)\cos i = \varrho^2$$

zweimal nach einander, nimmt aus diesen beiden Gleichungen die Werthe von $x = f$ und $y - g$ und setzt sie in die Gleichung des Kreises, so ergiebt sich nach den gehörigen Reductionen:

$$\varrho = \frac{(\partial x^2 + \partial y^2 - 2\partial x \partial y \cos i)^{\frac{3}{2}}}{-\partial x \partial^2 y \sin i}.$$

Für den Punct B ist $y = 0$, $x = a$ und $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$. Substituirt man diese Werthe in die drei Gleichungen (1. 2. 3.), so ergiebt sich

$$\gamma a^2 + 2\eta a + \varepsilon = 0, \quad \gamma a + \eta = 0, \quad (\beta a + \delta)\partial^2 y + \gamma \partial x^2 = 0.$$

Daraus folgt weiter

$$\eta a + \varepsilon = 0,$$

mithin

$$\gamma a^2 = \varepsilon,$$

und der Krümmungshalbmesser in B ist

$$= \varrho' = \frac{\beta a + \delta}{\gamma \sin i}.$$

Mutatis mutandis findet sich eben so

$$\delta b + \varepsilon = 0, \quad \alpha b^2 = \varepsilon,$$

und der Krümmungshalbmesser in C

$$= \varrho'' = \frac{\beta b + \eta}{\alpha \sin i}.$$

Es ist demnach

$$\varrho' : \varrho'' = \frac{\beta a + \delta}{\gamma \sin i} : \frac{\beta b + \eta}{\alpha \sin i} = \alpha\left(\beta a - \frac{\varepsilon}{b}\right) : \gamma\left(\beta b - \frac{\varepsilon}{a}\right),$$

wenn man $\delta = -\frac{\varepsilon}{b}$, und $\eta = -\frac{\varepsilon}{a}$ substituirt; also

$$\varrho' : \varrho'' = a\alpha : b\gamma.$$

Aus

$$\gamma a^2 = \alpha b^2 = \varepsilon$$

folgt aber

$$\alpha : \gamma = a^2 : b^2.$$

Multiplicirt man diese beiden Proportionen mit einander, so erhält man

$$\varrho' : \varrho'' = a^3 : b^3, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Im April 1845.

6.

Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte.

(Del sig. cav. ***J. Steiner,*** professore nell' Università e membro dell' Academia di Berlino.)

(Estratto dal giornale arcadico di Roma tomo XCVIX.)

I.

Un punto arbitrario P (Fig. 1.), preso nel piano di un dato triangolo ABC, si può sempre riguardare come il centro di una sezione conica che tocca i lati del triangolo. La natura di questa sezione conica è messa in evidenza dal criterio che segue. S'immagini un secondo triangolo $A'B'C'$, i cui vertici siano nel mezzo de' lati del primo triangolo ABC. I lati del nuovo triangolo $A'B'C'$, prolungati all'infinito, dividono tutto lo spazio del piano in sette parti: cioè, nello spazio finito del triangolo medesimo $A'B'C'$; nei tre spazi degli angoli opposti ai suoi angoli interni; e finalmente nei tre spazi esterni adiacenti ai suoi lati. La sezione conica sarà ellisse, se il suo centro P si trova nell' uno de' primi quattro spazi; e sarà iperbola, se P si trova nell'uno de'tre spazi rimanenti. Quando il punto P è in uno de'tre lati dello stesso triangolo $A'B'C'$, o nel loro prolungamento, la sezione conica passa al limite dove si restringe in una retta, e può esser considerata, qual più aggrada, ellisse, od iperbola. Allontanandosi il punto P all'infinito, la sezione conica diventa una parabola.

Allorchè la sezione conica è un'ellisse, la sua area E può sempre determinarsi facilmente per la data situazione del suo centro P. Infatti, chiamate α', β', γ', le perpendicolari abbassate da P sui lati del secondo triangolo $A'B'C'$, ed essendo r il raggio del cerchio circoscritto al primo triangolo ABC, si ha sempre

$$E^2 = 4\pi^2 r \alpha' \beta' \gamma'.$$

Pel caso dell' iperbola, si ha la stessa equazione purchè la quantità E significhi l'area dell'ellisse che ha gli stessi assi principali dell'iperbola.

II.

Il punto P è sempre nello stesso tempo il centro di un'altra sezione conica circoscritta al medesimo dato triangolo ABC, ed ha qui luogo la corrispondenza notabile, che questa conica è dello stesso genere che l'inscritta; e quando ne'casi limiti l'inscritta si riduce ad una retta, la circoscritta viene a risolversi in un sistema di due parallele.

Anche per l'area dell'ellisse circoscritta si ha una formula interessante. Infatti, chiamate α, β, γ le tre perpendicolari abbassate da P sui lati del triangolo ABC, ed essendo F l'area dell'ellisse, sarà sempre

$$F^2 = \pi^2 \cdot r \frac{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2}{\alpha' \beta' \gamma'}.$$

Pel caso dell'iperbola vale l'osservazione precedente.

Dalle proposizioni (I.) e (II.) si ricava il seguente corollario. Designate per E', F'' le aree di due nuove ellissi le quali abbiano il medesimo centro P, e siano inscritte e circoscritte al secondo triangolo $A'B'C'$, si ha sempre

$$E^2 = 4E'F'.$$

Dai teoremi precedenti si deducono inoltre i seguenti.

III.

Consideriamo le due coniche inscritta e circoscritta al triangolo ABC, ed aventi comune il centro nel punto arbitrario P. Per il bel teorema del sig. *Poncelet*, vi sono innumerevoli altri triangoli a ciascuno de'quali le medesime coniche sono l'una inscritta e l'altra circoscritta. Pe'vertici del triangolo ABC si conducano tre rette parallele ai lati opposti: ne risulterà, simile al triangolo ABC, un nuovo triangolo, i cui lati saranno dimezzati da'vertici del triangolo ABC. Ripetendo la medesima costruzione sopra ogni triangolo a cui le due coniche sono l'una inscritta e l'altra circoscritta, si otterrà una serie di nuovi triangoli, rispetto ai quali sussisterà la notabile proprietà, che le coniche loro inscritte dal medesimo centro P, avranno tutte l'area medesima.

IV.

Per mezzo del triangolo ausiliare $A'B'C'$ possono determinarsi facilmente i punti di contatto de'tre lati del triangolo ABC colla sezione conica del centro P. Infatti, supposto che i vertici A', B', C' siano rispettivamente i punti medii de'lati BC, CA, AB, sia α la intersezione delle due rette PA' e $B'C'$: condotta la retta $A\alpha$, essa segherà il lato BC nel puncto ov'è in

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

contatto colla sezione conica. Invertendo questa costruzione, trovasi il centro della sezione conica dati che siano due de'tre punti di contatto; ciò che procura sempre la conoscenza della situazione del terzo, essendochè le tre rette condotte ai punti di contatto da'vertici opposti A, B, C, s'intersecano mutuamente in un punto.

Il problema analogo per la sezione conica circoscritta al dato triangolo ABC, sarebbe di determinare le sue tangenti ne'vertici A, B, C, dato il suo centro P. Anche questo problema può risolversi per mezzo del triangolo ausiliare $A'B'C'$, ma in un modo un poco più complicato.

V.

Il luogo geometrico de'centri di tutte le coniche di area eguale ed inscritte al medesimo dato triangolo ABC, è una curva del terzo grado, i cui asintoti sono i lati del secondo triangolo $A'B'C'$ definito di sopra, ed i loro punti di contatto posti nell'infinito sono nello stesso tempo punti d'inflessione *). Pel caso della ellisse, questa curva può avere forme differenti; vale a dire, oltre i tre rami infiniti negli spazi esterni (i quali, mediante il passaggio per l'infinito, formano un tratto continuo) la curva nello spazio interno contiene un'ovale isolata, o un punto isolato (il centro di gravità comune ai due triangoli ABC, $A'B'C'$), o nulla più di reale, secondochè la data area dell'ellisse sia inferiore, uguale o superiore all'area del triangolo ABC moltiplicata per $\frac{4}{3\sqrt{2}}\pi$.

VI.

Il luogo geometrico de'centri di tutte le sezioni coniche di area data e circoscritte al medesimo dato triangolo ABC, è una curva del sesto grado, la quale ha punti doppi ne'mezzi A', B', C' de'lati del triangolo, e ha un doppio contatto coi lati stessi ne' loro punti all'infinito **). Pel caso della elisse,

*) Se avviene che una curva abbia un tale asintoto, che il punto di contatto situato nell'infinito sia pure punto d'inflessione, allora i due rami della curva cui si avvicina l'asintoto nelle sue direzioni opposte, si trovano dalla medesima parte dell'asintoto. Quando il contatto nell'infinito è un contatto volgare, i due rami sono situati rispetto all'asintoto in parti diverse. Cotesti due rami possono sempre riguardarsi come formanti un continuo passando per l'infinito; come si vede nella proiezione *polare*, allorchè si muta il polo, o *punto di vista*, in modo che la proiezione del contatto cada ad una distanza infinita.

**) Una curva si dice avere un *doppio contatto* con una retta ne'punti *posti all' infinito*, quando questa retta è asintota nello stesso tempo di quattro rami della curva

questo contatto risulta immaginario; e se l'area resta inferiore ad una certa quantità, i punti doppi riescono tutti punti isolati, e la curva rimane tutta dentro al triangolo $A'B'C'$; se poi l'area dell'ellisse è appunto eguale a questa quantità (la quale è l'area del triangolo ABC moltiplicata per π), i tre punti A', B', C' diventano punti di regresso. Se l'area data è superiore alla detta quantità, la curva de'centri non resta soltanto nell'interno del triangolo $A'B'C'$, ma da' punti A', B', C' esce fuori agli spazi esterni ove forma tre cappi. Le tre figure (1. 2. 3.) della tavola annessa mostrano la forma della curva, la prima nel caso dell' iperbola, la seconda e la terza ne'casi della ellisse quando la curva resta tutta dentro al triangolo $A'B'C'$, e quando esce agli spazi esterni. Si vede che nel caso della ellisse, la curva forma sempre un solo tratto, e che anche nel caso dell'iperbola i sei rami infiniti della curva debbono essere riguardati come formanti un tratto continuo, mediante il passaggio per l'infinito. Infatti nella figura delineata, siano $a\,b\,c\,d\,e\,f$, ed $a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'$, punti della curva posti all' infinito: in punti a e a', b e b', ec., debbono essere riguardati come coincidenti. Ciò posto, si potrà camminare sopra un ramo della curva dal punto a al punto b' coincidente con b; dal punto b, sopra un altro ramo, al punto c' coincidente con c, ec.; e si tornerà infine dal punto f al punto a' coincidente col punto di partenza a.

VII.

Dato un quadrilatero completo *), formato da'tre lati del triangolo ABC e da una quarta retta Q, si sa che i punti medii a, b, c delle sue tre diagonali giacciono sopra una medesima retta R; e che una conica non può toccare i quattro lati del qudrilatero, senza avere il centro su questa retta R; nè aver il centro su questa retta R e toccare tre de'quattro lati, senza toccare anche il quarto. Inoltre si vede, dalla ispezione della figura, che i lati $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ del triangolo ausiliare $A'B'C'$, i cui vertici sono i mezzi de'lati del triangolo ABC, passano per i punti a, b, c della retta R; e che, pel prin-

---

nelle direzioni opposte e dall'una e l'altra parte della retta. Nella proiezione polare questi quattro rami si cangiano in due rami che si toccano mutuamente, e l'asintoto diventa la loro tangente commune.

*) Date quattro rette R, R_1, R_2, R_3, siano A e A_1 le intersezioni di RR_1, e di R_2R_3; B e B_1 le intersezioni di RR_2, e di R_3R_1; C e C_1 le intersezioni di RR_3, e di R_1R_2. Le rette AA_1, BB_1, CC_1, si chiamano le tre diagonali del quadrilatero formato dalle quattro rette R, R_1, R_2, R_3, detto da *Carnot quadrilatero completo*.

cipio di simmetria, anche tutti i lati de'triangoli ausiliari, inscritti analogamente ne'tre altri triangoli formati da ogni tre de'quattro lati del quadrilatero, hanno le loro intersezioni colla retta R ne'medesimi punti a, b, c.

Ciò posto, designiamo per L, M, N gli angoli formati da R co'tre lati $B'C', C'A', A'B'$, ovvero co'loro paralleli BC, CA, AB: le tre perpendicolari abbassate da P a $B'C', C'A', A'B'$, saranno

$$\alpha' = Pa \cdot \operatorname{sen} L, \quad \beta' = Pb \cdot \operatorname{sen} M, \quad \gamma' = Pc \cdot \operatorname{sen} N.$$

Quindi essendo, come sopra, E l'area della sezione conica, si avrà pel n° I.

$$\frac{E^2}{4\pi^2 \cdot Pa \cdot Pb \cdot Pc} = r \operatorname{sen} L \operatorname{sen} M \operatorname{sen} N,$$

ove r è il raggio del circolo circoscritto al triangolo ABC. Ma la quantità nella sinistra di cotesta equazione, si conserva la medesima rispetto a ciascuno de'quattro triangoli formati dai lati del quadrilatero; dunque il valore della quantità

$$r \operatorname{sen} L \operatorname{sen} M \operatorname{sen} N,$$

non sarà alterato, se, invece del triangolo ABC, prendiamo uno de'tre rimanenti triangoli. Da qui la proposizione seguente

„Dato un quadriletere completo, la retta R passante per i mezzi delle „tre diagonali, declini cogli angoli a, a_1, a_2, a_3, da'lati A, A_1, A_2, A_3, del „quadrilatero, e siano r, r_1, r_2, r_3 i raggi de'circoli circoscritti ai quattro trian- „goli $(A_1A_2A_3)$, (A_2A_3A), (A_3AA_1), (AA_1A_2) formati da' lati del quadrila- „tero: si avrà

$$\frac{r}{\operatorname{sen} a} = \frac{r_1}{\operatorname{sen} a_1} = \frac{r_2}{\operatorname{sen} a_2} = \frac{r_3}{\operatorname{sen} a_3}.$$

VIII.

Supponiamo adesso che una retta R qualunque attraversi i lati $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ del triangolo ausiliare $A'B'C'$ ne'punti a, b, c, e chiamiamo *ellittici* ed *iperbolici* gli spazi del piano in cui, secondo il n° I. cadono i centri dell'ellissi e dell'iperbole inscritte al dato triangolo ABC. La retta R non essendo parallela ad alcuno de'lati del triangolo $A'B'C'$, le sue parti opposte, prolungate all'infinito, si troveranno sempre l'una in uno spazio iperbolico e l'altra in uno spazio ellittico. Il centro P si muova sulla retta R, sempre nella medesima direzione, a partire dalla parte remota all'infinito nello spazio iperbolico, ove corrisponde ad una iperbola infinita, ossia ad una parabola. L'area dell'iperbola, intesa come sopra è detto (n° I.), diminuisce continuamente,

sino a che il centro P viene ad incontrare la prima volta un lato del triangolo $A'B'C'$, ciò che avverrà in uno de'tre punti a, b, c: sia nel punto a. Da qui il centro P entra e corre in uno spazio ellittico, sino all'incontro di un secondo lato: questo incontro sia nel punto b. Poi il centro P rientra e si avanza in uno spazio iperbolico, sino all'incontro del terzo lato nel punto c. Finalmente il centro P esce in uno spazio ellittico, e l'area dell'ellisse va continuamente crescendo da zero sino all'infinito, dov'ella torna a cangiarsi nella medesima parabola che in principio. Mentre il centro P cammina da a in b, la sezione conica è un'ellisse, la cui area in que'due punti svanisce: bisogna dunque che l'area abbia un massimo corrispondente alla situazione del suo centro P in un punto e fra a e b. Mentre il centro P si muove da b in c, la sezione conica è un'iperbola la cui area svanisce in que'due punti: bisogna dunque che ad una situazione del centro P in un punto h fra b e c corrisponda un'area iperbolica massima. Questi due massimi saranno gli unici che esistono, e la posizione de'punti e, h, si determina nel modo seguente. Il loro mezzo m è il centro di gravità de'tre punti a, b, c, e la loro distanza da questo punte è

$$em = mh = \sqrt{\frac{ma^2+mb^2+mc^2}{6}}.$$

Il teorema precedente fornisce la soluzione del famoso problema di trovare la sezione conica inscritta ad un dato quadrilatero la quale goda di un'erea massima, problema di cui si sono occupati i più illustri matematici, un *Eulero*, un *Gauss* ed altri. Basta che la rette R sia quella del n° precedente VII., cioè la retta passante per i mezzi a, b, c delle tre diagonali del dato quadrilatero. Si trova in questa maniera, che fra le sezioni coniche inscritte al dato quadrilatero, sono due che hanno un'area massima, l'una ellisse e l'altra iperbola; che il mezzo m de'loro centri, è il centro di gravità de'mezzi delle tre diagonali del dato quadrilatero, ovvero de'sei punti ne'quali s'intersecano mutuamente i lati del quadrilatero; e che finalmente la distanza de'due centri al punto m è uguale alla quantità

$$\sqrt{\frac{ma^2+mb^2+mc^2}{6}}.$$

IX.

I centri di tutte le sezioni coniche circoscritte al quadrigono *) $ABCD$, trovansi in un'altra sezione conica S passante per i mezzi di tutti i sei lati,

*) In un *quadrigono completo* $ABCD$ si considerano le sei rette
$AD, BD, CD, BC, CA, AB,$

e inoltre per le intersezioni A_1, B_1, C_1 delle tre paia di lati opposti; nè può una conica avere il centro sopra S e passare per tre de'quattro vertici A, B, C, D, senza passare eziandio per il quarto. Per mezzo di questo teorema, l'altro famoso problema di trovare la conica minima fra tutte le coniche circoscritte ad un dato quadrigono $ABCD$, si riduce al seguente: trovare la conica minima fra tutte le coniche che sono circoscritte al triangolo ABC, e che hanno il lor centro sulla conica S or definita, passante pe'mezzi de'lati del triangolo ABC, ovvero pe'vertici del triangolo ausiliare $A'B'C'$. Al problema proposto sotto tal forma si potrà applicare l'espressione, data nel n° II., dell'area della sezione conica circoscritta al triangolo ABC.

X.

La conica S gode di molte proprietà notabili. Gli asintoti di ciascuna iperbola circoscritta al quadrigono, sono paralleli ad un sistema di diametri coniugati della conica S. Il centro di S, è il centro di gravità de'vertici del quadrigono $ABCD$. Ad ognuno de'quattro triangoli, determinati da'vertici del quadrigono presi a tre a tre, possono essere inscritte quattro coniche simili ad S, e similmente situate con essa; e tutte queste sedici conichi toccano la medesima S. Formato il prodotto delle aree delle quattro coniche inscritte a ciascuno di questi quattro triangoli, de'quattro prodotti, o l'uno sarà eguale alla somma de'tre altri, o la somma di due sarà eguale alla somma de'due altri. Se la conica S è un'ellisse, e, per mezzo della proiezione parallela, si trasmuta in un circolo, il quadrigono riesce tale nella proiezione, che ciascuno de'suoi quattro vertici è il punto ove si segano le *altezze* del triangolo determinato da'tre vertici rimanenti *). Per questa asservazione, le varie proprietà della conica S di sopra esposte, si cangiano in altre che sono di una grande importanza per la geometria del triangolo rettilineo, e delle quali ho trattato nel libro: „Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und Eines

---

che uniscono due a due i quattro vertici A, B, C, D, ed inoltre le intersezioni A_1, B_1, C_1 delle tre paia di lati opposti

AD e BC, BD e CA, CD e AB;

come nel *quadrilatero completo* si considerano le sei intersezioni de'quattro lati, e le tre diagonali.

*) I vertici del triangolo e la intersezione delle tre *altezze* (cioè delle tre perpendicolari calate da' vertici ai lati opposti) formano sempre un sistema di quattro punti, ciascuno de'quali è la intersezione delle tre altezze del triangolo determinato dai tre altri. Una proprietà conosciuta di questi triangoli, è, che i quattro circoli circoscritti ai medesimi sono eguali.

„festen Kreises, Berlin 1833 bei Dümmler." (Le costruzioni geometriche eseguite per mezzo della linea retta e di un solo cerchio fisso, Berlino 1833, presso Dümmler.) Questo libro, per le costruzioni geometriche elementari, è il supplemento della ingegnosa geometria del compasso del ***Mascheroni.***

XI.

Mediante la proiezione polare ed il principio delle polari reciproche, possono dalle proposizioni antecedenti dedursene altre rispetto alle coniche inscritte ad un quadrilatero, o cirsoscritte ad un quadrigono. Delle quali citerò le seguenti.

a) Da'sei vertici di un quadrilatero si conducano altrettante rette parallele in una data direzione: cosi, per ciascun vertice del quadrilatero passeranna tre rette: due lati del quadrilatero e la retta parallela alla data direzione. Conduciamo la ***quarta armonica,*** coniugata a quest'ultima: si otterranno in questa guisa sei nouve rette che toccano una medesima conica C, e questa conica sarà inoltre toccata dalle tre diagonali del quadrilatero. Siano t e t_1 due tangenti della conica C, parallele alla data direzione; si potranno circoscrivere a ciascuno de'quattro triangoli, formati dai lati del quadrilatero, quattro coniche toccanti le rette t e t_1, e tutte queste sedici coniche toccheranno la medesima conica C *). Osservo inoltre che, cangiando la direzione data, tutte le coniche C corrispondenti alle diverse direzioni, toccano una medesima retta.

b) Inscritta una conica alle tre diagonali di un quadrilatero completo, si hanno tre tangenti della conica che passano per le sei intersezioni de' lati del quadrilatero; da ciascuno di questi sei punti si conduca l'altra tangente alla medesima conica, e poi un'altra retta la quale, coniugata con questa tangente, formi co'due lati passanti pel medesimo punto, un ***fascio armonico.*** Tutte le sei quarte armoniche nel detto modo condotte, s'intersecano in un medesimo punto.

c) Dato un quadrigono $ABCD$, siano A_1, B_1, C_1, le intersezioni di AD e BC, di BD e CA, di CD e AB; una conica qualunque S circoscritta al triangolo $A_1B_1C_1$, avrà ne'punti A_1, B_1, C_1 una intersezione co'sei lati AD, BD, CD, BC, CA, AB: dunque la medesima conica avrà con ciascuno di questi sei lati, anche un'altra intersezione. Cerchiamo in ciascun

*) Si possono sempre descrivere quattro coniche, che passino per tre punti dati e tocchino due rette date.

lato un punto, *quarto armonico* dopo questa intersezione e gli estremi del lato: saranno questi sei quarti armonici in una medesima retta L. I poli di L, rispetto a tutte le coniche circoscritte al quadrigono $ABCD$, si trovano sulla conica S.

In ciascuno de'quattro triangoli ABC, ABD, BCD, CAD, possono inscriversi quattro coniche che abbiano con S la retta L per secante commune (*reale*, o, secondo la denominazione di Poncelet, *ideale*), e tutte queste sedici coniche sono toccate dalla medesima conica S. Potendosi al triangolo $A_1B_1C_1$ circoscrivere innumerevoli coniche S, a ciascuna corrisponderà una posizione determinata della retta L: allorchè le coniche S sono soggette alla condizione di passare per un quarto punto determinato Q, la retta L girerà intorno ad un altro punto fisso Q'.

XII.

Circoscritto ad un circolo un quadrilatero completo, e formato il triangolo dalle tre diagonali; il punto d'intersezione commune delle tre altezze del triangolo, coincide col centro del circolo.

XIII.

Dal foco E di una conica si descriva un circolo con un raggio uguale all'asse principale della conica: innumerevoli triangoli ABC possono inscriversi a questo circolo in guisa che siano nello stesso tempo circoscritti alla conica. Le altezze di ciascuno di questi triangoli s'intersecano mutuamente nell'altro foco D. Consideriamo uno di essi ABC. A ciascuno de'quattro triangoli ABC, ABD, BCD, CAD, inscriviamo quattro circoli: questi sedici circoli toccheranno sempre un altro circolo il cui diametro è l'asse grande della conica.

XIV.

Ritenute le stesse supposizioni del n° precedente, siano a, b, c i piedi delle altezze del triangolo ABC, ed immaginiamo i quattro circoli inscritti al triangolo abc: i loro centri saranno i punti A, B, C, D, ed il circolo col centro D sarà costante, e però toccherà i lati di tutto il sistema de'triangoli abc. I quattro circoli precedenti sono toccati da un altro circolo, passante per i mezzi de'lati e per i piedi delle altezze del triangolo abc; ed anche questo circolo sarà costante, e però il luogo geometrico del suo centro sarà anch'esso un circolo del centro D.

XV.

In questa occasione comunicherò anche un'altro teorema.

Il vertice A di un cono K di secondo grado, si trovi sopra una superficie S del medesimo grado: le due superficie avranno per intersezione commune una curva L. Preso sulla superficie S un punto arbitrario P, corrisponderà a questo un piano polare rispetto al cono K; questo piano sega, generalmente, la superficie S secondo una conica L', la quale, in generale, avrà due intersezioni B e C colla curva L. In questi punti B e C si conducano le tangenti alla conica L' le quali s'intersechino in un punto P': ciò posto, comunque il punto P si muova sulla superficie S, la retta PP' passerà sempre per un medesimo punto fisso A'.

7.

Über die Divisoren gewisser Formen der Zahlen, welche aus der Theorie der Kreistheilung. entstehen.

(Von Herrn Dr. ***E. E. Kummer***, Professor an der Universität zu Breslau.)

Wenn man die imaginären Wurzeln der Gleichung $x^p = 1$, in welcher p eine Primzahl ist, in Perioden theilt, und zwar in e Perioden von je f Gliedern, wenn $p-1 = e \cdot f$ ist, so sind diese bekanntlich die Wurzeln einer algebraischen Gleichung $e$ten Grades, in welcher der Coëfficient des höchsten Gliedes gleich Eins ist und alle übrigen ganze Zahlen sind. Ist x irgend eine imaginäre Wurzel der Gleichung $x^p = 1$ und g eine primitive Wurzel für die Primzahl p, so haben diese Perioden, welche kurz durch η, η_1, η_2, ... η_{e-1} bezeichnet werden sollen, folgende Werthe:

$$\begin{aligned}
\eta &= x + x^{g^e} + x^{g^{2e}} + \ldots + x^{g^{(f-1)e}},\\
\eta_1 &= x^g + x^{g^{e+1}} + x^{g^{2e+1}} + \ldots + x^{g^{(f-1)e+1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta_{e-1} &= x^{g^{e-1}} + x^{g^{2e-1}} + x^{g^{3e-1}} + \ldots + x^{g^{fe-1}}.
\end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\varphi(y) = (y-\eta)(y-\eta_1)(y-\eta_2)\ldots(y-\eta_{e-1}),$$

so hat man auch

$$\varphi(y) = y^e + a_1 y^{e-1} + a_2 y^{e-2} + \ldots + a_{e-1} y + a_e,$$

wo a_1, a_2, a_3, ... a_e ganze Zahlen sind, welche in jedem speciellen Fall bestimmt werden können. Wir werden nun diese ganze rationale Function $\varphi(y)$ vom $e$ten Grade als Form betrachten, unter welcher gewisse Zahlen dargestellt werden können, und namentlich die Divisoren untersuchen, welche diese Form haben kann. Zu diesem Zwecke werden wir Congruenzen anwenden, in welchen nicht nur reale ganze Zahlen, sondern auch die irrationalen, oft imaginären Perioden η, η_1, η_2, ... η_e vorkommen, und darum müssen wir zunächst den Sinn festhalten, welchen solche Congruenzen haben sollen. Bekanntlich läfst sich jede ganze rationale Function dieser Perioden, welche ganze Zahlen zu Coëfficienten hat, auf die lineäre Form $c\eta + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ldots + c_{e-1}\eta_{e-1}$ bringen, und zwar nur auf eine einzige Weise. Wir wollen also

den Begriff der Congruenz für den gegenwärtigen Zweck dahin ausdehnen, dafs zwei ganze rationale Functionen der Perioden für den Modul q, welcher eine ganze Zahl sein soll, congruent heifsen sollen, wenn in dem Unterschiede derselben, nachdem er auf die Form $c\eta + c_1\eta_1 + \ldots + c_{e-1}\eta_{e-1}$ gebracht worden ist, alle Coëfficienten c, c_1, c_2, $\ldots$ c_{e-1} durch q theilbar sind. Nach dieser Erklärung kann man hier, ebenso wie bei den gewöhnlichen Congruenzen, alle Glieder, welche den Modul q als Factor enthalten, weglassen; auch kann man diese Congruenzen ebenso mit einander addiren, subtrahiren, multipliciren und zu Potenzen erheben.

Wir gehen nun von dem bekannten Satze aus, dafs, wenn q eine Primzahl ist, die Coëfficienten b, b_1, b_2, $\ldots$ b_{q-1} des entwickelten Products

$$z(z-1)(z-2)\ldots(z-q+1) = z^q - b_1 z^{q-1} + b_2 z^{q-2} - \ldots + b_{q-1} z$$

alle durch q theilbar sind, mit Ausnahme des letzten b_{q-1}, welcher durch q dividirt den Rest -1 läfst. Es ist nemlich für jeden Werth des z dieses Product, als Product von q auf einander folgenden ganzen Zahlen, durch q theilbar, also ist auch

$$z^q - b_1 z^{q-1} + b_2 z^{q-2} - \ldots + b_{q-1} z \equiv 0 \quad \text{Mod. } q,$$

und da nach dem *Fermat*schen Satze $z^q \equiv z$ ist, so ist auch

$$-b_1 z^{q-1} + b_2 z^{q-2} - \ldots + (b_{q-1}+1) z \equiv 0 \quad \text{Mod. } q.$$

Diese Congruenz vom Grade $q-1$ kann aber nicht q verschiedene Wurzeln haben: also mufs sie identisch erfüllt werden, woraus $b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv \ldots$ $\ldots \equiv b_{q-2} \equiv b_{q-1}+1$ Mod. q folgt.

Nimmt man nun in der obigen Gleichung $z = y - \eta_k$ und läfst die durch q theilbaren Glieder weg, so erhält man die Congruenz

$$(A.) \quad (y-\eta_k)(y-1-\eta_k)(y-2-\eta_k)\ldots(y-q+1-\eta_k) \equiv (y-\eta_k)^q - (y-\eta_k) \quad \text{Mod. } q.$$

Bekanntlich sind aber in der binomischen Entwickelung einer $q$ten Potenz, wenn q eine Primzahl ist, alle Glieder, mit Ausnahme des ersten und letzten, durch q theilbar, also ist $(y-\eta_k)^k \equiv y^q - \eta_k^q$. Ferner, ist η_k ein Polynom von f Gliedern, und wenn ein solches zur $q$ten Potenz erhoben wird, so sind die Coëfficienten aller Glieder durch q theilbar, mit Ausnahme der $q$ten Potenzen der einzelnen f Glieder, also ist

$$\eta_k^q \equiv x^{qg^k} + x^{qg^{e+k}} + x^{qg^{2e+k}} + \ldots + x^{qg^{(f-1)e+k}} \quad \text{Mod. } q,$$

und wenn $q \equiv g^r$ Mod. p ist, so hat man hiernach

$$\eta_k^q \equiv \eta_{r+k} \quad \text{Mod. } q,$$

in dem besondern Falle aber, wo $q = p$ ist,

$$\eta_k^p \equiv f \text{ Mod. } p.$$

Die Congruenz $(y-\eta_k)^q \equiv y^q - \eta_k^q$ Mod. q geht also allgemein in $(y-\eta_k)^q \equiv y - \eta_{k+r}$ Mod. q über, und für den besondern Fall $q = p$ giebt sie $(y-\eta_k)^p \equiv y - f$ Mod. p.

Giebt man nun hierin dem k nach einander die Werthe $0, 1, 2, \ldots . e-1$ und bildet das Product, so erhält man

$$(\varphi(y))^p = (y-f)^e \text{ Mod. } p;$$

woraus folgt, dafs $\varphi(y)$ für $y \equiv f$ den Factor p hat, aber für keinen andern Werth des y; oder dafs die Congruenz $\varphi(y) \equiv 0$ Mod. p stets eine reelle Wurzel hat, nemlich $y = f = \frac{p-1}{e}$.

Wir kehren nun zur Untersuchung des allgemeinen Primfactors q zurück, für welchen $q = g^r$ Mod. p ist. Vermöge der Congruenz $(y-\eta_k)^q \equiv y - \eta_{k+r}$ verwandelt sich die Congruenz (*A.*) in folgende:

(*B.*) $(y-\eta_k)(y-1-\eta_k)(y-2-\eta_k)\ldots(y-q+1-\eta_k) \equiv \eta_k - \eta_{k+r}$ Mod. q.

Es sind die beiden Fälle besonders zu betrachten: erstens wo r durch e theilbar ist, und zweitens, wo dies nicht der Fall ist. Ist r durch e theilbar, so ist $\eta_k = \eta_{k+r}$, also

$$(y-\eta_k)(y-1-\eta_k)(y-2-\eta_k)\ldots(y-q+1-\eta_k) \equiv 0 \text{ Mod. } q.$$

Setzt man nun nach einander $k = 0, 1, 2, \ldots . e-1$ und bildet das Product aller dieser Congruenzen, so erhält man

$$\varphi(y)\varphi(y-1)\varphi(y-2)\ldots\varphi(y-q+1) \equiv 0 \text{ Mod. } q^e.$$

Es müssen also immer e dieser Factoren durch q theilbar sein, oder auch einige derselben den Factor q mehreremal enthalten, wenn $q \equiv g^r$ Mod. p, und r durch e theilbar ist, dafs heifst, wenn q ein $e$ter Potenzrest der Primzahl q ist. Hieraus erhält man folgenden Lehrsatz:

„Jede Primzahl, welche ein $e$ter Potenzrest von p ist, ist ein Divisor „der Form $\varphi(y)$; oder auch so: die Congruenz $\varphi(y) \equiv 0$ Mod. q hat, „wenn der Modul q eine Primzahl und zugleich $e$ter Potenzrest von p „ist, immer e reelle Wurzeln, welche in besondern Fällen auch zum „Theil einander gleich werden können."

Der besondere Fall, wo die Perioden eingliedrig, also die imaginären Wurzeln der Gleichung $x^p = 1$ selbst sind, giebt das bekannte Resultat, dafs die Congruenz $x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + x + 1 \equiv 0$ Mod. q stets $p-1$ reelle Wur-

zeln hat, wenn die Primzahl q ein $p-1$ter Potenzrest von p ist, d. h. wenn $q = 2mp+1$ ist.

Nachdem gezeigt worden, dafs alle diejenigen Primzahlen, welche $e$te Potenzreste von p sind, Divisoren der Form $\varphi(y)$ sind, ist zweitens zu untersuchen, ob diese Form, aufser diesen genannten und dem Divisor p, noch andere Divisoren haben kann, oder nicht. Es sei also wieder $q \equiv g^r$ Mod. p, aber r nicht durch e theilbar. In diesem Falle giebt die Congruenz (*B.*), wenn nach einander $k = 0, 1, 2, \ldots e-1$ gesetzt und das Product gebildet wird:

$$\varphi(y)\varphi(y-1)\varphi(y-2)\ldots\varphi(y-q+1) \equiv P \text{ Mod. } q,$$

wo $$P = (\eta-\eta_r)(\eta_1-\eta_{r+1})(\eta_2-\eta_{r+2})\ldots(\eta_{e-1}-\eta_{r+e-1}) \text{ ist.}$$

P, als symmetrische Function aller Perioden, ist eine ganze Zahl. Für bestimmte p und e kann diese Zahl, auch wenn man alle verschiedenen Werthe des r zuläfst, nur eine endliche, bestimmte und verhältnifsmäfsig sehr geringe Anzahl verschiedener Primfactoren enthalten, und da $\varphi(y)$ keine andern Primfactoren der genannten Art enthalten kann, als diejenigen, welche auch in P vorkommen, so folgt, dafs $\varphi(y)$ nur ausnahmsweise eine stets begrenzte Anzahl solcher Primfactoren enthalten kann, welche nicht $e$te Potenzreste von p sind. Um näher zu untersuchen, in welchen Fällen dergleichen ausnahmsweise Primfactoren des P, und somit auch des $\varphi(y)$, Statt haben können, gebrauchen wir die Congruenz

$$(\eta_k-\eta_{r+k})^q \equiv \eta_{k+r}-\eta_{k+2r} \text{ Mod. } q,$$

deren Richtigkeit nach den oben aufgestellten Principien in die Augen fällt. Werden beide Seiten dieser Congruenz zu wiederholten Malen zur $q$ten Potenz erhoben, so erhält man die allgemeinere Congruenz

$$(C.) \quad (\eta_k-\eta_{r+k})^{q^h} \equiv \eta_{hr+k}-\eta_{(h+1)r+k} \text{ Mod. } q.$$

Macht man hierin nacheinander $h = 0, 1, 2, \ldots e-1$ und bildet das Product, so erhält man

$$(\eta_k-\eta_{r+k})^{1+q+q^2+\ldots+q^{e-1}} \equiv (\eta_k-\eta_{r+k})(\eta_{r+k}-\eta_{2r+k})\ldots(\eta_{(e-1)r+k}-\eta_{er+k}) \text{ Mod. } q.$$

Wenn nun r keinen gemeinschaftlichen Factor mit e hat, so sind die Indices der Perioden $k, r+k, 2r+k, \ldots (e-1)r+k$, in anderer Ordnung genommen, den Indices $0, 1, 2, \ldots e-1$ congruent, für den Modul e; das Product rechterhand ist also kein anderes als das Product P, und da P nach der Voraussetzung durch q theilbar sein soll, so hat man

$$(\eta_k-\eta_{r+k})^{1+q+q^2+\ldots+q^{e-1}} \equiv 0 \text{ Mod. } q.$$

Wenn nun zur Potenz $q-1$ erhoben wird, so ist

$$(\eta_k - \eta_{r+k})^{q^e-1} \equiv 0 \text{ Mod. } q,$$

und, wenn mit $\eta_k - \eta_{r+k}$ multiplicirt wird,

$$(\eta_k - \eta_{k+r})^{q^e} \equiv 0 \text{ Mod. } q,$$

woraus nach der Congruenz (*C.*) folgt:

$$\eta_k - \eta_{r+k} \equiv 0 \text{ Mod. } q;$$

welches unmöglich ist. Das Product P hat also keinen Primfactor q von der Art, dafs $q \equiv g^r$ Mod. p, wo r keinen gemeinschaftlichen Factor mit e hat. Für den Fall also, wo e Primzahl ist, hat man folgenden Lehrsatz:

„Die Form $\varphi(y)$ hat, wenn der Grad derselben e eine Primzahl ist, aufser „dem Divisor p nur solche Divisoren, welche $e$te Potenzreste von p sind."

Für den Fall aber, wo der Grad der Form $\varphi(y)$ keine Primzahl ist, kann man das gefundene Resultat folgendermaafsen aussprechen.

„Die Form $\varphi(y)$ hat aufser dem Divisor p im allgemeinen nur solche „Primzahlen zu Divisoren, welche $e$te Potenzreste von p sind; aufserdem „aber kann sie auch eine endliche bestimmte Anzahl anderer Divisoren „haben, welche, wenn e die von Eins verschiedenen Divisoren $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. „enthält, αte oder βte oder γte Potenzreste von p sein müssen."

Man kann die Bedingungen, unter welchen $\varphi(y)$ solche besondere Divisoren enthält, die nicht $e$te Potenzreste sind, noch etwas genauer angeben. Wenn nemlich r und e den gröfsten gemeinschaftlichen Factor α enthalten, und $r = r'\alpha$, $e = e'\alpha$ ist, so setze man in der Congruenz (*C.*) nach einander $h = 0, 1, 2, \ldots e'-1$ und bilde das Product der so erhaltenen Congruenzen:

$$\eta_k - \eta_{r+k})^{1+q+q^2+\ldots+q^{e'-1}} \equiv (\eta_k - \eta_{r+k})(\eta_{r+k} - \eta_{2r+k}) \ldots (\eta_{(e'-1)r+k} - \eta_{e'r+k}).$$

Giebt man hierin wieder dem k die Werthe 0, 1, 2, $\ldots$ $\alpha-1$ und bildet das Product, so wird dieses Product auf der rechten Seite gleich P; wovon man sich sogleich überzeugt, wenn man bemerkt, dafs die Zahlen von der Form $hr+k$ für $h = 0, 1, 2, \ldots e'-1$ und $k = 0, 1, 2, \ldots \alpha-1$, wenn $r = r'\alpha$ und $e = e\alpha$, für den Modul e alle Reste 0, 1, 2, 3, $\ldots$ $e-1$ geben. Man hat also, da P durch q theilbar sein soll,

$$\{(\eta - \eta_r)(\eta_1 - \eta_{r+1}) \ldots (\eta_{\alpha-1} - \eta_{\alpha+r-1})\}^{1+q+q^2+\ldots+q^{e'-1}} \equiv 0 \text{ Mod. } q.$$

Erhebt man wieder zur Potenz $q-1$ und multiplicirt mit $(\eta-\eta_r)(\eta_1-\eta_{r+1}) \ldots (\eta_{\alpha-1}-\eta_{\alpha+r-1})$, so folgt hieraus

$$\{(\eta - \eta_r)(\eta_1 - \eta_{r+1}) \ldots (\eta_{\alpha+1} - \eta_{\alpha+r-1})\}^{q^{e'}} \equiv 0 \text{ Mod. } q,$$

welches vermöge der Congruenz (*C.*) folgende einfachere Form annimmt:

$$(\eta-\eta_r)(\eta_1-\eta_{r+1})\ldots.(\eta_{\alpha-1}-\eta_{\alpha+r-1})\equiv 0 \quad \text{Mod. } q.$$

Es müssen also schon die ersten α Factoren des Products P den Factor q enthalten, damit P oder $\varphi(y)$ denselben enthalten könne. Man könnte durch diese einschränkende Bedingung auf die Vermuthung kommen, dafs diese ausnahmsweisen Factoren, welche nicht $e$te Potenzreste sind, auch wenn e eine zusammengesetzte Zahl ist, überhaupt gar nicht vorkommen dürften: dafs dieses indefs nicht der Fall ist, vielmehr wirklich dergleichen Factoren Statt haben, kann man an folgendem einfachen Beispiele sehen. Nimmt man $p=109$, $e=6$, so erhält man nach bekannten Methoden:

$$\varphi(y)=y^6+y^5-45y^4-10y^3+135y^2+9y-27,$$

woraus sich leicht für $y=0, 1, 2, 3, 4, 5$ folgende Werthe des $\varphi(y)$ berechnen lassen: $\varphi(0)=-3^3$; $\varphi(1)=2^6$; $\varphi(2)=-173$; $\varphi(3)=-2^6\cdot 3^3$; $\varphi(4)=-4871$; $\varphi(5)=-2^6\cdot 113$. Die hierin vorkommenden Divisoren 2 und 3 sind keine 6ten Potenzreste von 109; dieselben sind also solche ausnahmsweise Divisoren; und es ist 2 ein cubischer Rest und 3 quadratischer Rest von 109; welches sehr wohl mit dem oben gefundenen Lehrsatze stimmt. Übrigens sind 2 und 3 im gegenwärtigen Falle die einzigen Primfactoren von $\varphi(y)$, welche nicht sechste Potenzreste sind.

Wir zeigen nun noch von zwei wichtigen speciellen Fällen, dafs für sie dergleichen Factoren, welche nicht $e$te Potenzreste von p sind, niemals Statt haben können: nemlich für den Fall, wo die Perioden eingliedrig, und wo sie zweigliedrig sind. Ist $e=p-1$ und $f=1$, so ist $\eta=x$, $\eta_1=x^g$, $\eta_2=x^{g^2}$ etc.; es ist also

$$P=(x-x^g)(x^g-x^{g^2})\ldots.(x^{g^{p-2}}-x^{g^{p-1}}),$$

und wenn man von dem ersten Factor x, vom zweiten x^g, vom dritten x^{g^2} etc., heraushebt, so wird

$$P=(1-x^{g-1})(1-x^{g(g-1)}\ldots.(1-x^{g^{p-2}(g-1)}),$$

und da

$$(z-x^m)(z-x^{mg})\ldots.(z-x^{m.g^{p-2}})\equiv z^{p-1}+z^{p-2}+\ldots.z+1$$

ist, so hat man, wenn $z=1$ und $m=g-1$ genommen wird,

$$P=p.$$

Da nun P keinen andern Factor enthält als p, so folgt hieraus der bekannte Lehrsatz: dafs die Form $y^{p-1}+y^{p-2}+\ldots.+y+1$ aufser dem Divi-

sor p nur solche Divisoren enthalten kann, welche $p-1$te Potenzreste von p sind, deren lineäre Form also $q = 2mp+1$ ist.

Wenn ferner die Perioden zweigliedrig sind, also $e = \frac{1}{2}(p-1)$, $f = 2$ ist, so ist $\eta = x + x^{-1}$, $\eta_1 = x^g + x^{-g}$, $\eta_2 = x^{g^2} + x^{-g^2}$ etc., und es wird für diesen Fall bekanntlich

$$\varphi(y) = y^e + y^{e-1} - \frac{e-1}{1}y^{e-2} - \frac{e-2}{1}y^{e-3} + \frac{(e-2)(e-3)}{1\cdot 2}y^{e-4} + \frac{(e-3)(e-4)}{1\cdot 2}y^{e-5} - \ldots.$$

Ferner ist

$$\eta_k - \eta_{r+k} = x^{g^k} + x^{-g^k} - x^{g^{r+k}} - x^{-g^{r+k}},$$

welcher Ausdruck folgendermaafsen in Factoren zerfällt:

$$\eta_k - \eta_{r+k} = x^{g^k}(1 - x^{(g^r-1)g^k})(1 - x^{-(g^r+1)g^k}).$$

Giebt man nun dem k die Werthe 0, 1, 2, ... $p-2$ und bildet das Product, so erhält man leicht

$$P^2 = p^2, \quad \text{also} \quad P = \pm p.$$

In diesem Falle hat also P ebenfalls keinen andern Divisor als p, woraus folgt, dafs die Form

$$\varphi(y) = y^e + y^{e-1} - \frac{e-1}{1}y^{e-2} - \frac{e-2}{1}y^{e-3} + \ldots.$$

aufser dem Divisor p nur solche Divisoren hat, welche $\frac{1}{2}(p-1)$te Potenzreste von p sind, also von der Form $2mp \pm 1$.

Dieselbe Methode, welche in dem Vorhergehenden für die Form $\varphi(y)$ angewendet wurde, giebt fast ganz in derselben Weise die Primfactoren einer weit allgemeineren, sehr merkwürdigen Form vom $e$ten Grade mit e unbestimmten Zahlen. Wenn man nemlich folgende zusammengehörige lineäre Functionen der Perioden:

$$\begin{aligned}
F(\eta) &= z\eta + z_1\eta_1 + z_2\eta_2 + \ldots. + z_{e-1}\eta_{e-1},\\
F(\eta_1) &= z\eta_1 + z_1\eta_2 + z_2\eta_3 + \ldots. + z_{e-1}\eta,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
F(\eta_{e-1}) &= z\eta_{e-1} + z_1\eta + z_2\eta_1 + \ldots. + z_{e-1}\eta_{e-2}
\end{aligned}$$

mit einander multiplicirt, so wird das Product derselben

$$\Psi = F(\eta)F(\eta_1)F(\eta_2)\ldots.F(\eta_{e-1})$$

eine homogene Form vom $e$ten Grade der e unbestimmten Zahlen z, z_1, z_2, ... z_{e-1}, mit ganzzahligen Coëfficienten; welche Form, wie wir sogleich zeigen

werden, in Beziehung auf ihre Divisoren ganz mit der oben untersuchten specielleren Form $\varphi(y)$ übereinstimmt. Wir beweisen zunächst folgenden Lehrsatz:

„Jede Primzahl q, welche ein $e$ter Potenzrest von p ist, so wie auch p „selbst, ist ein Divisor der Form Ψ."

Untersuchen wir zuerst den Divisor p, so haben wir, nach denselben Principien, welche oben angewendet wurden,

$$F(\eta_k)^p \equiv (x + x_1 + x_2 + \ldots + x_{e-1})f. \quad \text{Mod } p,$$

also, wenn die unbestimmten Zahlen $x, x_1, x_2, \ldots x_{e-1}$ so bestimmt werden, dafs ihre Summe durch p theilbar ist, so wird $F(\eta_k)^p \equiv 0$ Mod. p, und wenn man $k = 0, 1, 2, \ldots e-1$ setzt und diese Congruenzen mit einander multiplicirt, so erhält man $\Psi^p \equiv 0$ Mod. p, also auch $\Psi \equiv 0$ Mod. p; p ist also ein Divisor der Form Ψ.

Um weiter zu beweisen, dafs auch jede Primzahl q, welche ein $e$ter Potenzrest von p ist, immer Divisor von Ψ sei, setze ich die zweite Periode η als ganze rationale Function der ersten Periode η dargestellt; welches bekanntlich immer möglich ist. Es sei also $\eta_1 = \Theta(\eta)$, so ist $\eta_2 = \Theta\Theta(\eta)$, $\eta_3 = \Theta\Theta\Theta(\eta)$ etc. Statt η aber werde eine unbestimmte Gröfse y genommen und folgender Ausdruck gebildet:

$$F(y) \cdot F(\Theta y) \cdot F(\Theta\Theta y) \ldots . F(\Theta^{(e-1)} y) - \Psi,$$

welcher eine ganze rationale Function von y sein wird. Derselbe verschwindet offenbar, wenn $y = \eta$ oder $y = \eta_1$ oder $y = \eta_2$ etc. genommen wird, und mufs deshalb den Factor $(y-\eta)(y-\eta_1)(y-\eta_2) \ldots . (y-\eta_{e-1})$ enthalten, welchen wir oben durch $\varphi(y)$ bezeichnet haben. Es ist demnach

$$F(y) F(\Theta y) (F\Theta\Theta y) \ldots . F(\Theta^{(e-1)} y) - \Psi = \varphi(y) \cdot \Phi,$$

wo auch Φ eine ganze rationale Function von y bedeutet. Wird nun für y irgend eine Wurzel der Congruenz $\varphi(y) = 0$ Mod. q genommen (welche, wenn q ein $e$ter Potenzrest von p ist, immer e reale Wurzeln hat, wie wir oben gezeigt haben), so hat man:

$$F(y) F(\Theta y) F(\Theta\Theta y) \ldots . F(\Theta^{(e-1)} y) \equiv \Psi \quad \text{Mod. } q.$$

Wenn also irgend ein Factor dieses Productes durch q theilbar wird, so wird allemal auch Ψ durch q theilbar. Es lassen sich daher die unbestimmten Zahlen $x, x_1, x_2, \ldots x_{e-1}$ immer so bestimmen, dafs die Form Ψ den Divisor q erhält, und die Bestimmung derselben ist einfach die, dafs, wenn man in

$$F(\eta) = x\eta + x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \ldots + x_{e-1}\eta_{e-1}$$

für $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{e-1}$ nicht mehr die Wurzeln der Gleichung $\varphi(g) = 0$,

sondern die Wurzeln der Congruenz $\varphi(y) \equiv 0$ Mod. q, aber in der gehörigen Ordnung genommen, substituirt hat, $F(\eta) \equiv 0$ Mod. q werden mufs.

Die Primfactoren, welche $e$te Potenzreste von p sind, machen auch hier die hauptsächlichsten Divisoren der Form Ψ aus, und aufser diesen haben gewisse andere nur ausnahmsweise Statt, deren Bedingungen wir jetzt näher untersuchen wollen. Es sei q eine Primzahl, von der Art, dafs $q \equiv g^r$ Mod. p und r nicht durch e theilbar ist, so ist

$$F(\eta)^q \equiv F(\eta_r) \quad \text{Mod. } q.$$

Erhebt man dies nun zu wiederholten Malen zur Potenz q, so erhält man

$$F(\eta)^{q^h} \equiv F(\eta_{hr}) \quad \text{Mod. } q.$$

Setzt man nach einander $h = 0, 1, 2, 3, \ldots e-1$ und multiplicirt die so erhaltenen Congruenzen in einander, so wird

$$F(\eta)^{1+q+q^2+\ldots+q^{e-1}} \equiv F(\eta)F(\eta_r)F(\eta_{2r}) \ldots F(\eta_{(e-1)r}) \quad \text{Mod. } q.$$

Wenn nun r und e keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so sind die Indices $0, r, 2r, 3r, \ldots (e-1)r$ den Indices $0, 1, 2, \ldots e-1$, in anderer Ordnung genommen, congruent für den Modul e, also ist das Product rechterhand gleich Ψ. Soll nun Ψ den Divisor q enthalten, so folgt, dafs

$$F(\eta)^{1+q+q^2+\ldots+q^{e-1}} \equiv 0 \quad \text{Mod. } q$$

sein mufs, woraus, ebenso wie oben, $F(\eta) \equiv 0$ Mod. q folgt. Damit aber $F(\eta)$ durch q theilbar sei, müssen alle einzelnen Coëfficienten der Perioden, also die Unbestimmten $x, x_1, x_2, \ldots x_{e-1}$, durch q theilbar sein. Hieraus erhalten wir folgenden Lehrsatz:

„Wenn die unbestimmten Zahlen der Form Ψ nicht alle einen gemeinschaftlichen Factor haben, so enthält diese Form aufser dem Divisor p nur solche Primfactoren, welche $e$te Potenzreste von p sind; oder: wenn e die von Eins verschiedenen Divisoren $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ enthält, so kann die Form auch solche Primfactoren enthalten, welche αte oder βte oder γte ... Potenzreste von p sind."

Daraus geht auch folgender Zusatz hervor:

„Wenn die unbestimmten Zahlen der Form Ψ nicht alle einen gemeinschaftlichen Factor enthalten, und der Grad e dieser Form ist eine Primzahl, so enthält dieselbe aufser dem Divisor p nur solche Divisoren, welche $e$te Potenzreste von p sind."

Ist e nicht eine Primzahl, sondern α ein Divisor von e, so sei $q \equiv g^r$ Mod. p und α der gröfste gemeinschaftliche Factor von r und e, so dafs $r \equiv r'\alpha$ und

$e = e'\alpha$. In diesem Falle hat man, vermöge der Congruenz

$$F(\eta_k^{q^h}) \equiv F(\eta_{rh+k}) \quad \text{Mod. } q,$$

wenn nach einander $h = 0, 1, 2, \ldots e'-1$ gesetzt wird und sodann für jeden einzelnen dieser Werthe des h die Zahl k die Werthe $0, 1, 2, \ldots \alpha-1$ bekommt,

$$\{F(\eta)F(\eta_1)F(\eta_2)\ldots F(\eta_{\alpha-1})\}^{1+q+q^2+\ldots+q^{e'-1}} \equiv \Psi \quad \text{Mod. } q;$$

denn das Product rechter Hand wird offenbar gleich Ψ, weil $hr+k$ für die angegebenen Werthe des h und k allen den Zahlen $0, 1, 2, \ldots e-1$ congruent wird, für den Modul e. Soll nun Ψ den Factor q haben, so folgt, dafs

$$\{F(\eta)F(\eta_1)\ldots F(\eta_{\alpha-1})\}^{1+q+q^2+\ldots+q^{e'-1}} \equiv 0 \quad \text{Mod. } q$$

sein mufs, woraus man leicht folgert, dafs auch

$$F(\eta)F(\eta_1)F(\eta_2)\ldots F(\eta_{\alpha-1}) \equiv 0 \quad \text{Mod. } q$$

sein mufs. Damit also Ψ einen Primfactor q habe, welcher nicht $e$ter Potenzrest, sondern nur αter Potenzrest von p ist, wo α ein Divisor von e, mufs allemal schon das Product der ersten α Factoren des Ψ diesen Factor q enthalten.

8.

Neues Theorem der analytischen Mechanik.

(Von Herrn *C. G. J. Jacobi*, Prof. und Akademiker zu Berlin.)

(Aus den Monatsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1838.)

In einer Abhandlung von *Enke* im Berliner Jahrbuch für 1837 „über die speciellen Störungen" findet man die partiellen Differentialquotienten der Werthe, welche in der Theorie der elliptischen Bewegung eines Himmelskörpers für seine Coordinaten x, y, z und die Componenten seiner Geschwindigkeit x', y', z' erhalten werden. Die Elemente, in Bezug auf welche an dem angeführten Orte die partiellen Differentialquotienten genommen werden, sind a die halbe grofse Achse, ε der Werth der mittleren Anomalie für $t = 0$, e die Excentricität der Ellipse, ω der Winkel zwischen dem Perihel und aufsteigenden Knoten, Ω der aufsteigende Knoten der Ebene der Bahn mit der Ebene der xy, i die Neigung der Ebene der Bahn gegen dieselbe Coordinaten-Ebene. Da die Anzahl der partiell zu differentiirenden Ausdrücke, so wie die Anzahl der Gröfsen, nach welchen jeder differentiirt wird, *sechs* beträgt, so wird man im Ganzen 36 solcher partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$ etc. haben, welche S. 305 und S. 309 der erwähnten Abhandlung übersichtlich zusammengestellt sind. Diese 36 Ausdrücke werden gebraucht, um die Coëfficienten der *Lagrange*schen Störungsformeln zu bilden, in welchen die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction Ω, in Bezug auf die Elemente a, ε etc. genommen, durch die Differentiale der gestörten Elemente $\frac{da}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$ etc. ausgedrückt werden. Man kann hieraus umgekehrt die Ausdrücke der Gröfsen $\frac{da}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$ etc. durch die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \Omega}{\partial a}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}$ etc. ableiten. Aber *Poisson* hat Störungsformeln gegeben, durch welche man direct diese Ausdrücke findet. Um in diesen letzteren Störungsformeln die Coëfficienten zu bestimmen, hat man die *sechs* Integralgleichungen der elliptischen Bewegung nach den Gröfsen a, ε etc. aufzulösen, so dafs diese Gröfsen Functionen von x, y, z, x', y', z' und von t werden, und dann diese Functionen nach x, y, z, x', y', z' partiell zu differentiiren. Man wird auf diese Weise wieder 36 Ausdrücke

$\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$ etc. erhalten, aus welchen die Coëfficienten der ***Poisson***schen Formeln zusammengesetzt sind.

Statt der Gröfsen a, ε etc. kann man beliebige, aber von einander unabhängige, sechs Combinationen derselben als Elemente einführen. Hat die Zahl k dieselbe Bedeutung wie in der angeführten Abhandlung, d. h. ist k^2 die Gröfse der anziehenden Kraft für die Einheit der Distanz, so will ich statt a die Gröfse $\frac{k^2}{2a}$, statt ε die Zeit des Periheliums $= -\frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}\cdot\varepsilon$, statt e die Quadratwurzel des halben Parameters, mit k multiplicirt, oder die Gröfse $k\sqrt{(a(1-e^2))}$, statt i die Gröfse $k\sqrt{p}.\cos i$ als Elemente einführen. Setzt man

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{2a} &= \alpha, & k\sqrt{p} &= \beta, & k\sqrt{p}\cdot\cos i &= \gamma, \\ -\frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}\cdot\varepsilon &= \alpha', & \omega &= \beta', & \Omega &= \gamma', \end{aligned}$$

so wird man leicht aus den Ausdrücken $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$ etc. die partiellen Differentialquotienten von x, y, z, $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, $z' = \frac{dz}{dt}$, in Bezug auf α, β, γ, α', β', γ' genommen, oder die 36 Ausdrücke $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ etc. ableiten können. Ebenso wird man, wenn die Ausdrücke $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ etc. bekannt sind, daraus leicht die 36 Ausdrücke $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ etc. finden. Aber wenn man diese neuen, nur wenig modificirten, Elemente wählt, und die partiellen Differentialquotienten der letztern Art mit den partiellen Differentialquotienten der erstern Art vergleicht, so wird man den merkwürdigen Satz finden, ***dafs die 36 partiellen Differentialquotienten*** $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ ***etc. den 36 partiellen Differentialquotienten*** $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \beta}$ ***etc. gleich oder von ihnen nur durch das Zeichen verschieden sind. In der That hat man:***

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \alpha} &= -\frac{\partial \alpha'}{\partial x'}, & \frac{\partial x}{\partial \beta} &= -\frac{\partial \beta'}{\partial x'}, & \frac{\partial x}{\partial \gamma} &= -\frac{\partial \gamma'}{\partial x'}, \\
\frac{\partial x}{\partial \alpha'} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x'}, & \frac{\partial x}{\partial \beta'} &= \frac{\partial \beta}{\partial x'}, & \frac{\partial x}{\partial \gamma'} &= \frac{\partial \gamma}{\partial x'}, \\
\frac{\partial x'}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \alpha'}{\partial x}, & \frac{\partial x'}{\partial \beta} &= -\frac{\partial \beta'}{\partial x}, & \frac{\partial x'}{\partial \gamma} &= \frac{\partial \gamma'}{\partial x}, \\
\frac{\partial x'}{\partial \alpha'} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial x}, & \frac{\partial x'}{d\beta'} &= -\frac{\partial \beta}{\partial x}, & \frac{\partial x'}{\partial \gamma'} &= -\frac{\partial \gamma}{\partial x},
\end{aligned}$$

und ganz ähnliche Formeln, wenn man y und z für x setzt. Da α' die Zeit des Periheliums ist, so kommen in den Integralgleichungen der elliptischen Bewegung die Gröfsen t und α' nur in der Verbindung $t-\alpha'$ vor; man hat ferner zufolge des Satzes von der lebendigen Kraft:

$$\alpha = \frac{k^2}{2a} = \frac{k^2}{\sqrt{(xx+yy+zz)}} - \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y'+z'z').$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha'} = -\frac{dx'}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{-k^2 x}{(xx+yy+zz)^{\frac{3}{2}}},$$

woraus man sieht, dafs die Gleichung $\frac{dx'}{d\alpha'} = -\frac{d\alpha}{dx}$ und die ähnlichen in Bezug auf y und x die ***Differentialgleichungen des Problems*** selber sind, die also nur besondere Formeln aus einem Systeme ***ganz ähnlicher*** sind, die aus den Integralgleichungen abgeleitet werden können. Es giebt eine unendliche Menge Systeme von Elementen, die man für α, β etc. wählen kann, für welche die obigen Formeln ebenfalls gelten; alle diese Systeme können aus einer allgemeinen Formel gefunden werden.

Ich habe das Beispiel der elliptischen Bewegung eines Himmelskörpers gewählt, weil in diesem das Theorem durch die bekannten Formeln ohne Schwierigkeit verificirt werden kann. Aber es ist das für dieses Beispiel aufgestellte Theorem nur ein besonderer Fall eines allgemeinen, welches für alle Probleme der Mechanik gilt, in welchen das Princip der Erhaltung der Summe der lebendigen Kräfte Statt findet, und auch aufserdem für den Fall, in welchem die Kräftefunction aufser den Coordinaten noch die Zeit t ***explicite*** enthält, wenn man nämlich in den ***Lagrange***'schen Formeln der Dynamik ***Kräftefunction*** diejenige Function nennt, deren partielle Differentialquotienten, in Bezug auf die rechtwinklichten Coordinaten der Puncte des Systems genommen, die auf diese Puncte in der Richtung der Coordinatenachsen wirkenden Kräfte geben. Nach einer allgemeinen Formel, welche eine willkürliche Function involvirt, kann man immer solche Systeme von Elementen finden, für die mit den obigen ganz analoge Formeln gelten. Auch führt eine besondere Methode der Integration, welche ich an einem andern Orte mittheilen werde, schon von selber auf solches System Elemente. Wenn das System materieller Puncte ganz frei ist, so werden in allen mechanischen Problemen von der bezeichneten Gattung die dem Werthe $t=0$ entsprechenden Werthe der Coordinaten und der nach den Coordinaten-

Achsen zerlegten Geschwindigkeiten der materiellen Puncte ein derartiges System Elemente. Wenn zwischen den n Puncten irgend welche Verbindungen Statt finden, welche durch $3n-m$ Bedingungsgleichungen gegeben seien, so kann man die Position der Puncte immer durch m von einander unabhängige Gröfsen $q_1, q_2, \ldots q_m$ bestimmen. Setzt man $q_i' = \frac{dq_i}{dt}$ und drückt die halbe Summe der lebendigen Kräfte T durch $q_1, q_2, \ldots q_m, q_1', q_2', \ldots q_m'$ aus, so werden ein System Elemente der genannten Art die dem $t=0$ entsprechenden Werthe der Gröfsen $q_1, q_2 \ldots q_m$ und der Gröfsen

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}, \quad \ldots \quad p_m = \frac{\partial T}{\partial q_m'}.$$

Nennt man diese Anfangswerthe $q_1^0, q_2^0, \ldots q_m^0, p_1^0, p_2^0, \ldots p_m^0$, so hat man immer:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_\varkappa^0} = -\frac{\partial p_\varkappa^0}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial p_\varkappa^0} = \frac{\partial q_\varkappa^0}{\partial p_i},$$
$$\frac{\partial p_i}{\partial q_\varkappa^0} = \frac{\partial p_\varkappa^0}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_\varkappa^0} = -\frac{\partial q_\varkappa^0}{\partial q_i},$$

in welchen Formeln jeder der beiden Indices i und $\varkappa$ alle Werthe $1, 2 \ldots m$ annehmen kann. Die partiellen Differentialquotienten links vom Gleichheitszeichen setzen voraus, dafs man in die Integralgleichungen des Problems die Gröfsen q_i^0 und p_i^0 als die willkürlichen Constanten eingeführt und diese Gleichungen dann nach den Gröfsen q_i und p_i aufgelöst hat, so dafs jede derselben eine Function von t und von den $2m$ Gröfsen q_i^0, p_i^0 wird. Umgekehrt setzen die partiellen Differentialquotienten rechts vom Gleichheitszeichen voraus, dafs man die Integralgleichungen nach den Gröfsen q_i^0, p_i^0 aufgelöst hat, so dafs jede dieser Gröfsen eine Function der Zeit t und der $2m$ Gröfsen q_i und p_i wird. Man sieht leicht, dafs man die letztern Ausdrücke aus den erstern blofs dadurch erhalten kann, dafs man q_i und q_i^0, p_i und p_i^0 mit einander vertauscht und $-t$ statt t setzt.

Für jedes System von Elementen, welches die im Vorigen erwähnte Eigenschaft besitzt, erhalten die Störungsformeln eine möglichst einfache Gestalt, indem das Differential jedes gestörten Elements einem einzigen partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction gleich wird, dessen Coëfficient nur $+1$ oder -1 ist, wie dies für die Elemente q_i^0, p_i^0 bekannt ist.

Königsberg, den 21. Nov. 1838.

9.

Über die Additionstheoreme der Abelschen Integrale zweiter und dritter Gattung.

(Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi.*)

1.

Es sei R eine gegebne ganze Function von x vom $2n$ten Grade,

$$1. \quad R = \alpha_1 x^{2n} + \alpha_2 x^{2n-1} + \alpha_3 x^{2n-2} \ldots + 1;$$

V eine ganze Function von x vom $n$ten Grade, in welcher man den Coëfficient von x^n der Einheit gleich setze; ferner a eine Constante und

$$2. \quad xV^2 - a^2 R = f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{2n+1}) = x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} \ldots + a_{2n+1}.$$

Die in V vorkommenden Coëfficienten und die Gröfse a betrachte man als unabhängige Veränderliche, während dagegen die Coëfficienten der Function R unverändert bleiben sollen. Zwischen den ebenfalls veränderlichen $2n+1$ Wurzeln der Gleichung (2.) folgen dann aus dem Abelschen Theorem n transcendente Gleichungen, wodurch n Wurzeln als Functionen der übrigen $n+1$ bestimmt werden. Wenn nämlich m einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$ annimmt und man die Zeichen der Wurzelgröfse unter dem Integralzeichen gehörig bestimmt, so wird

$$3. \quad \int \frac{x_1^m dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{x_2^m dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \ldots + \int \frac{x_{2n+1}^m dx_{2n+1}}{\sqrt{(x_{2n+1} R(x_{2n+1}))}} = 0.$$

Die Anfangs- und Endgränzen der Integrale sind die beiden Systeme der Wurzeln zweier Gleichungen von der Form (2.), in denen sich a und die Coëfficienten von V verändert haben, während die Function R ungeändert geblieben ist.

Entwickelt man den Ausdruck

$$4. \quad \Pi = \frac{1}{\sqrt{(xR)}} \log \frac{\sqrt{(x)}.V + a\sqrt{R}}{\sqrt{(x)}.V - a\sqrt{R}}$$

nach den absteigenden Potenzen von x,

$$5. \quad \Pi = \frac{\Pi_0}{x^{n+1}} + \frac{\Pi_1}{x^{n+2}} + \frac{\Pi_2}{x^{n+3}} \text{ etc.},$$

so findet *Abel* ferner für die Werthe von m, welche $\geqq n$ sind,

$$6.\quad \int\frac{x_1^{n+i}\,dx_1}{\sqrt{(x_1R(x_1))}}+\int\frac{x_2^{n+i}\,dx_2}{\sqrt{(x_2R(x_2))}}\ldots.+\int\frac{x_{2n+1}^{n+i}\,dx_{2n+1}}{\sqrt{(x_{2n+1}R(x_{2n+1}))}}=A_i.$$

Um die Entwicklungscoëfficienten A_i durch die Coëfficienten von $f(x)$ oder die Gröfsen x_1, x_2 etc. und durch die gegebnen Coëfficienten von R darzustellen, setze ich für $\sqrt{(x)}\cdot V$ vermöge (2.) den Ausdruck $\sqrt{(f(x)+a^2R)}$, wodurch man

$$7.\quad A=\frac{1}{\sqrt{(xR)}}\log\frac{\sqrt{(f(x)+a^2R)}+a\sqrt{R}}{\sqrt{(f(x)+a^2R)}-a\sqrt{R}}$$

erhält. Setzt man $y=\dfrac{a\sqrt{R}}{\sqrt{f(x)}}$, so wird

$$\sqrt{(xR)}A=\log\frac{\sqrt{(1+y^2)}+y}{\sqrt{(1+y^2)}-y}=2\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)}}$$
$$=2y-\frac{1}{3}y^3+\frac{3}{4\cdot5}y^5-\frac{3\cdot5}{4\cdot6\cdot7}y^7+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot6\cdot8\cdot9}y^9-\ldots.$$

und daher

$$8.\quad A=\frac{2}{\sqrt{x}.}\int_0^a\frac{\partial a}{\sqrt{\{f(x)+a^2R\}}}=\frac{2a}{\sqrt{(xf(x))}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{a^3R}{\sqrt{x}\sqrt{f(x)^3}}+\frac{3}{4\cdot5}\cdot\frac{a^5R^2}{\sqrt{x}\sqrt{f(x)^5}}\text{ etc.}$$

Aus dieser Formel kann man zur Bestimmung von A_i folgende leichte Regel ableiten.

„*Man entwickle den Ausdruck* $(1+b_1z+b_2z^2\ldots.+b_{2n+1}z^{2n+1})^{-\frac{1}{2}}$ *nach*
„*den aufsteigenden Potenzen von* z, *setze in dem Coëfficienten von*
„z^i *für* b_1, b_2 *etc. die Gröfsen* $a_1+\alpha_1$, $a_2+\alpha_2$ *etc., entwickle alle*
„*Producte und Potenzen dieser Binome und multiplicire jeden Term,*
„*der den Factor* $\alpha_1^{\mu_1}\alpha_2^{\mu_2}\ldots.$ *enthält, noch mit* $\dfrac{a^{2(\mu_1+\mu_2\ldots.)+1}}{2(\mu_1+\mu_2\ldots.)+1}$, *so*
„*wird der Ausdruck, welchen man erhält, der Werth von* $\frac{1}{2}A_i$."

Auf diese Weise findet man

$$9.\quad\begin{cases}\frac{1}{2}A_0=a,\\ \frac{1}{2}A_1=-\frac{1}{2}(a_1a+\frac{1}{3}\alpha_1a^3),\\ \frac{1}{2}A_2=-\frac{1}{2}(a_2a+\frac{1}{3}\alpha_2a^3)+\frac{3}{2\cdot4}\left(a_1^2a+2a_1\alpha_1\cdot\frac{a^3}{3}+\alpha_1^2\cdot\frac{a^5}{5}\right),\\ \frac{1}{2}A_3=-\frac{1}{2}(a_3a+\frac{1}{3}\alpha_3a^3)+\frac{3}{4}\left(a_1a_2\cdot a+(a_1\alpha_2+a_2\alpha_1)\frac{a^3}{3}+\alpha_1\alpha_2\frac{a^5}{5}\right)\\ \qquad\qquad-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\left(a_1^3\cdot a+3a_1^2\alpha_1\cdot\frac{a^3}{3}+3a_1\alpha_1^2\cdot\frac{a^5}{5}+\alpha_1^3\cdot\frac{a^7}{7}\right),\\ \qquad\text{u. s. w.}\end{cases}$$

Man hat in diesen Formeln die auf a_{2n+1} und α_{2n+1} folgenden Gröfsen $=0$ und $\alpha_{2n+1}=1$ zu setzen. Da man aus (2.) den Werth

10. $$a = \sqrt{(-a_{2n+1})} = \sqrt{(x_1 x_2 \ldots . x_{2n+1})}$$

findet, so giebt die erste der Formeln (9.) die einfache Gleichung

11. $$\int \frac{x_1^n dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{x_2^n dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \ldots . + \int \frac{x_{2n+1}^n dx_{2n+1}}{\sqrt{(x_{2n+1} R(x_{2n+1}))}} = 2\sqrt{(x_1 x_2 \ldots . x_{2n+1})},$$

welche für $n = 1$, wenn man die Zeichen der Quadratwurzeln unter dem Integralzeichen gehörig bestimmt, auf die bekannte Additionsformel der zweiten Gattung der elliptischen Functionen zurückkommt.

Man erhält dieselben Formeln (9.) für den allgemeineren Fall, wenn man noch einen Werth x_{2n+2} hinzunimmt und wieder

12. $$\int \frac{x_1^{n+i} dx_1}{\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{x_2^{n+i} dx_2}{\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \ldots . + \int \frac{x_{2n+2}^{n+i} dx_{2n+2}}{\sqrt{(x_{2n+2} R(x_{2n+2}))}} = A_i$$

setzt. Die Gröfsen a, a_1, ... a_{2n+2} werden dann durch die Gleichung

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots . (x - x_{2n+2}) = x^{2n+2} + a_1 x^{2n+1} + a_2 x^{2n+1} \ldots . + a_{2n+2}$$

bestimmt; der Ausdruck, dessen $(-\frac{1}{2})$te Potenz zu entwickeln ist, wird $1 + b_1 y + b_2 y^2 \ldots . + b_{2n+2} y^{2n+2}$. In den Formeln (9.), welche man aus der Entwicklung dieses Ausdrucks nach der oben angegebnen Regel ableitet, hat man die auf a_{2n+2} und α_{2n+1} folgenden Gröfsen a_{2n+3}, α_{2n+2} etc. $= 0$ und wieder $\alpha_{2n+1} = 1$ zu setzen. Die Gröfse a wird hier aber durch keine so einfache Formel wie (10.) bestimmt. Die Zahl dieser Gröfsen a, mit deren Hülfe man die Gröfsen A_i rational durch die Werthe x_1, x_2 etc. darstellen kann, vermehrt sich bei demselben R immer um eine, wenn die Zahl der Integrale, welche das Aggregat (6.) bilden, um zwei zunimmt.

Ich bemerke noch, dafs man für A statt des Ausdrucks (4.) eigentlich die Differenz zweier solcher Ausdrücke zu setzen hätte, welche den beiden Systemen der Anfangs- und Endgränzen der Integrale entsprechen. Es reicht aber hin in (6.) eines der Integrale und in (12.) zwei der Integrale von $x = 0$ an beginnen zu lassen, und auch in dem allgemeineren Falle, wenn man ein Aggregat von $2n + m$ Integralen betrachtet, m Integrale von der Gränze 0 an zu nehmen, weil dann immer die abzuziehende Function A verschwindet.

2.

Nach *Abel* findet man für die dritte Gattung

13. $$\int \frac{dx_1}{(\alpha - x_1)\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{dx_2}{(\alpha - x_2)\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \ldots . + \int \frac{dx_{2n+1}}{(\alpha - x_{2n+1})\sqrt{(x_{2n+1} R(x_{2n+1}))}} = A(\alpha),$$

wenn $A(\alpha)$ den Werth der oben (4.) definirten Function $A(x)$ für $x=\alpha$ bedeutet. Dieser Werth $A(\alpha)$ kann, wie ich im Folgenden zeigen will, durch Einführung von Gröfsen, welche von neuen transcendenten Gleichungen abhängen, eine merkwürdige Form annehmen, welche für $n=1$ das bekannte Additionstheorem der dritten Gattung der elliptischen Integrale giebt.

Man kann die Function $n$ten Grades $\frac{V}{a}$ dadurch bestimmen, dafs sie vermöge (2.) für $x = x_1, x_2, \ldots . x_{n+1}$ dieselben Werthe wie die gegebne Function $\sqrt{\frac{R}{x}}$ annimmt. Man bestimme jetzt zwei andre ganze Functionen von x vom $(n+1)$ten Grade, Y und Z, durch die Bedingung, dafs jede von ihnen für die Werthe $x=x_1, x_2, \ldots . x_{n+1}$ dieselben Werthe wie $\frac{xV}{a}$ oder wie $\sqrt{(xR(x))}$ annehmen, und aufserdem noch für $x=\alpha$ die Function Y den Werth $+\sqrt{(\alpha R(\alpha))}$, die Function Z den Werth $-\sqrt{(\alpha R(\alpha))}$ erhalten soll. Da zufolge dieser Annahme $\frac{x}{a}V-Y$ und $\frac{x}{a}V-Z$ für die Werthe $x = x_1, x_2, \ldots . x_{n+1}$ verschwinden müssen, so erhält man diese Functionen Y und Z sogleich durch die Formeln

$$14.\quad \begin{cases} Y = \frac{x}{a}.V - r.\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{n+1})}{(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\ldots.(\alpha-x_{n+1})}, \\ Z = \frac{x}{a}.V - s.\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{n+1})}{(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\ldots.(\alpha-x_{n+1})}, \end{cases}$$

wenn man wegen der letzten Bedingung die Constanten r und s durch die Gleichungen

$$15.\quad r = \frac{\alpha}{a}V(\alpha) - \sqrt{(\alpha R(\alpha))}, \qquad s = \frac{\alpha}{a}V(\alpha) + \sqrt{(\alpha R(\alpha))}$$

bestimmt. Hier ist $V(\alpha)$ der Werth von V für $x=\alpha$ und daher zufolge (4.)

$$16.\quad A(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}} \log \frac{s}{r}.$$

Nach den gemachten Voraussetzungen müssen die beiden Ausdrücke $(2n+2)$ter Ordnung Y^2-xR, Z^2-xR durch das Product

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{n+1})(x-\alpha)$$

theilbar sein. Man setze daher

$$17.\quad \begin{cases} Y^2 - xR = \\ r_1(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{n+1})(x-\alpha)(x-y_1)(x-y_2)\ldots.(x-y_n), \\ Z^2 - xR = \\ s_1(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_{n+1})(x-\alpha)(x-z_1)(x-z_2)\ldots.(x-z_n). \end{cases}$$

Da die Function xR weder einen constanten Term enthält noch die Potenz x^{2n+2}, welche die höchste Potenz von x ist, welche in den Ausdrücken (17.) vorkommt, so wird man, wenn man respective in den Functionen Y und Z den Coëfficient von x^{n+1} durch den constanten Term dividirt, die Quotienten

$$(x_1 x_2 \ldots . x_{n+1} . \alpha y_1 y_2 \ldots . y_n)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (x_1 x_2 \ldots . x_{n+1} . \alpha z_1 z_1 \ldots . z_n)^{-\frac{1}{2}}$$

erhalten. Die Werthe dieser Quotienten kann man aber auch anderseits aus den Gleichungen (14.) entnehmen, wenn man bemerkt, dafs in $\frac{x}{a}V$ der Coëfficient von x^{n+1} den Werth $\frac{1}{a}$ hat und der constante Term $=0$ ist. Durch Vergleichung der beiden Werthe, welche man auf diese Weise für jeden dieser Quotienten erhält, findet man, wenn man dieselben noch mit $x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}$ multiplicirt,

$$18. \quad \begin{cases} (-1)^n \sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}}{\alpha y_1 y_2 \ldots . y_n}} = (\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \ldots . (\alpha - x_{n+1}) \frac{1}{ar} - 1, \\ (-1)^n \sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}}{\alpha z_1 z_2 \ldots . z_n}} = (\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \ldots . (\alpha - x_{n+1}) \frac{1}{as} - 1, \end{cases}$$

woraus

$$19. \quad \frac{s}{r} = \frac{\sqrt{\alpha}\, V(\alpha) + a\sqrt{R(\alpha)}}{\sqrt{\alpha}\, V(\alpha) - a\sqrt{R(\alpha)}} = \frac{1 + (-1)^n \sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}}{\alpha y_1 y_2 \ldots . y_n}}}{1 + (-1)^n \sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}}{\alpha z_1 z_2 \ldots . z_n}}}$$

folgt. Hieraus erhält man vermöge (13.) und (16.)

$$20. \quad A(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}} \log \frac{1 + (-1)^n \sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}}{\alpha y_1 y_4 \ldots . y_n}}}{1 + (-1)^n \sqrt{\frac{x_1 x_2 \ldots . x_{n+1}}{\alpha z_1 z_2 \ldots . z_n}}} =$$

$$\int \frac{dx_1}{(\alpha - x_1)\sqrt{(x_1 R(x_1))}} + \int \frac{dx_2}{(\alpha - x_2)\sqrt{(x_2 R(x_2))}} \ldots . + \int \frac{dx_{2n+1}}{(\alpha - x_{2n+1})\sqrt{(x_{2n+1} R(x_{2n+1}))}}.$$

Die in der vorstehenden Formel vorkommenden Hülfsgröfsen y_1, y_2 etc.; z_1, z_2 etc., welche aus x_1, x_2, ... x_{n+1}, α vermittelst der Gleichungen (17.) bestimmt werden, kann man aber auch nach dem *Abel*schen Theorem durch transcendente Gleichungen definiren und erhält dann, wenn man noch $w_1, w_2, \ldots . w_n$ für x_{n+2}, x_{n+3}, ... x_{2n+1} schreibt, und die diesen Variabeln entsprechenden Integrale mit entgegengesetzten Zeichen nimmt, folgendes Theorem.

Theorem.

„Aus $n+2$ gegebnen Gröfsen x_1, x_2, ... x_{n+1}, α bestimme man drei Systeme von n Gröfsen w_1, w_2, ... w_n; y_1, y_2, ... y_n;

$z_2, z_2, \ldots z_n$ durch die drei Systemen von n transcendenten Gleichungen,

$$\int\frac{w_1^m\,dw_1}{\sqrt{(w_1R(w_1))}}+\int\frac{w_2^m\,dw_2}{\sqrt{(w_2R(w_2))}}\cdots+\int\frac{w_n^m\,dw_n}{\sqrt{(w_nR(w_n))}}$$
$$=\int\frac{x_1^m\,dx_1}{\sqrt{(x_1R(x_1))}}+\int\frac{x_2^m\,dx_2}{\sqrt{(x_2R(x_2))}}\cdots+\int\frac{x_{n+1}^m\,dx_{n+1}}{\sqrt{(x_{n+1}R(x_{n+1}))}},$$
$$\int\frac{y_1^m\,dy_1}{\sqrt{(y_1R(y_1))}}+\int\frac{y_2^m\,dy_2}{\sqrt{(y_2R(y_2))}}\cdots+\int\frac{y_n^m\,dy_n}{\sqrt{(y_nR(y_n))}}$$
$$=\int\frac{x_1^m\,dx_1}{\sqrt{(x_1R(x_1))}}+\int\frac{x_2^m\,dx_2}{\sqrt{(x_2R(x_2))}}\cdots+\int\frac{x_{n+1}^m\,dx_{n+1}^m}{\sqrt{(x_{n+1}R(x_{n+1}))}}+\int\frac{\alpha^m\,d\alpha}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}},$$
$$\int\frac{z_1^m\,dz_1}{\sqrt{(z_1R(z_1))}}+\int\frac{z_2^m\,dz_2}{\sqrt{(z_2R(z_2))}}\cdots+\int\frac{z_n^m\,dz_n}{\sqrt{(z_nR(z_n))}}$$
$$=\int\frac{x_1^m\,dx_1}{\sqrt{(x_1R(x_1))}}+\int\frac{x_2^m\,dx_2}{\sqrt{(x_2R(x_2))}}\cdots+\int\frac{x_{n+1}^m\,dx_{n+1}}{\sqrt{(x_{n+1}R(x_{n+1}))}}-\int\frac{\alpha^m\,d\alpha}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}},$$

in welchen $R(x)$ eine gegebne Function von x vom $2n^{ten}$ Grade bedeutet und m jeden der n Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$ annehmen kann. Man erhält dann zwischen den Integralen dritter Gattung folgende Gleichung:

$$\int\frac{dw_1}{(\alpha-w_1)\sqrt{(w_1R(w_1))}}+\int\frac{dw_2}{(\alpha-w_2)\sqrt{(w_2R(w_2))}}\cdots+\int\frac{dw_n}{(\alpha-w_n)\sqrt{(w_nR(w_n))}}=$$
$$\int\frac{dx_1}{(\alpha-x_1)\sqrt{(x_1R(x_1))}}+\int\frac{dx_2}{(\alpha-x_2)\sqrt{(x_2R(x_2))}}\cdots+\int\frac{dx_{n+1}}{(\alpha-x_{n+1})\sqrt{(x_{n+1}R(x_{n+1}))}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(\alpha R(\alpha))}}\log\frac{1+(-1)^n\sqrt{\frac{x_1x_2\ldots x_{n+1}}{\alpha y_1y_2\ldots y_n}}}{1+(-1)^n\sqrt{\frac{x_1x_2\ldots x_{n+1}}{\alpha z_1z_2\ldots z_n}}}.$$

Man sieht aus diesem Theorem, dafs die Additionsformel für die dritte Gattung der *Abel*schen Integrale dieselbe Form wie bei den elliptischen Integralen annimmt. Auch in diesem Theorem, so wie in der Formel (13.), mufs man im Allgemeinen von dem logarithmischen Ausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen einen ähnlichen, den Anfangsgränzen der Integrale entsprechenden, abziehn. Aber es reicht hin, eines der Integrale von $x=0$ an zu nehmen, weil in diesem Falle der Anfangswerth von a und mithin auch der Anfangswerth von $\Lambda(\alpha)$ verschwindet.

Berlin, den 25. August 1845.

10.

Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function.

(Von Herrn Professor *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.)

1.

Die *Lagrangesche* Interpolationsformel, welche dazu dient, eine Reihe von n Werthen durch eine *ganze* Function $(n-1)$ten Grades darzustellen, ist von *Cauchy* durch eine Formel verallgemeinert worden, welche eine Reihe von $n+m$ Werthen durch eine *gebrochne* Function darstellt, deren Zähler und Nenner respective vom $(n-1)$ten und $m$ten Grade sind, und welche sich für $m=0$ auf die *Lagrangesche* Function selber reducirt. Sind u_0, u_1 etc. die Werthe, welche die gebrochne Function u annehmen soll, wenn x die Werthe x_0, x_1 etc. erhält, so ist der von *Cauchy* für u gegebne Ausdruck (*Analyse algèbr.* S. 528),

$$u = \frac{u_0 u_1 \ldots u_m \cdot \dfrac{(x-x_{m+1})(x-x_{m+2})\ldots(x-x_{m+n-1})}{(x_0-x_{m+1})\ldots(x_0-x_{m+n-1})\times\ldots\times(x_m-x_{m+1})\ldots(x_m-x_{m+n-1})} + \text{etc.}}{u_0 u_1 \ldots u_{m-1} \cdot \dfrac{(x_0-x)(x_1-x)\ldots(x_{m-1}-x)}{(x_0-x_m)\ldots(x_0-x_{m+n-1})\times\ldots\times(x_{m-1}-x_m)\ldots(x_{m-1}-x_{m+n-1})} + \text{etc.}}.$$

Aus dem hingeschriebnen Term des Zählers und Nenners bildet man leicht alle übrigen, indem man im Zähler statt $0, 1, \ldots m$ beliebige $m+1$ und im Nenner statt $0, 1, \ldots m-1$ beliebige m von den Indices $0, 1, 2, \ldots m+n-1$ setzt. Man kann diese Formel dadurch deduciren, dafs man die lineären Gleichungen, von welchen die Aufgabe abhängt, auflöst, und die Determinanten, welche man für den Zähler und Nenner von u findet, entwickelt. Aber die unentwickelten Determinanten, durch welche man auf mannichfache Art den Zähler und Nenner von u darstellen kann, werden bisweilen mit gröfserem Vortheil angewandt werden, und ich will diese verschiednen Darstellungsweisen um so eher mittheilen, als die Darstellung gegebner Werthe durch gebrochne rationale Functionen in der Theorie der *Abelschen* Transcendenten von so grofser Wichtigkeit ist.

Es sei die gesuchte Function $u = \frac{N(x)}{D(x)}$, wo $N(x)$ und $D(x)$ die ganzen Functionen vom $(n-1)$ten und $m$ten Grade bedeuten, welche ihren Zähler und Nenner bilden sollen, so hat man aus den $m+n$ lineären Gleichungen

$$N(x_0) = u_0 D(x_0), \quad N(x_1) = u_1 D(x_1), \quad \text{etc.}$$

die Verhältnisse der $m+n+1$ Coëfficienten von $N(x)$ und $D(x)$ zu bestimmen, wodurch man diese Functionen selbst, abgesehn von einem gemeinschaftlichen constanten Factor, erhält. Man kann aber auch aus diesen Gleichungen zuerst die n Coëfficienten von $N(x)$ eliminiren und dann die Verhältnisse der $m+1$ Coëfficienten von $D(x)$ aus den nach der Elimination erhaltnen Gleichungen bestimmen. Hiezu setze man

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{m+n-1}), \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

und bilde für die ganzen positiven Werthe von p, welche $\leqq m-1$ sind, die Gleichungen

$$\Sigma \frac{x_i^p N(x_i)}{f'(x_i)} = \Sigma \frac{u_i x_i^p D(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Dehnt man für jeden der Werthe von p diese Summen über alle $m+n$ Werthe von x_i aus, so verschwinden nach der bekannten Theorie der Partialbrüche die Summen linker Hand vom Gleichheitszeichen, und man erhält die m Gleichungen,

$$1. \quad \Sigma \frac{u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = 0, \quad \Sigma \frac{x_i u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = 0, \quad \ldots. \quad \Sigma \frac{x_i^{m-1} u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = 0.$$

Diese m Gleichungen enthalten jetzt nur noch die $m+1$ Coëfficienten der Function $D(x)$ als Unbekannte, deren Verhältnisse aus ihnen zu bestimmen sind.

Setzt man

$$\frac{x_0^p \cdot u_0}{f'(x_0)} + \frac{x_1^p \cdot u_1}{f'(x_1)} \ldots. + \frac{x_{m+n-1}^p \cdot u_{m+n-1}}{f'(x_{m+n-1})} = v_p,$$

und den Nenner

$$D(x) = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \ldots. + \alpha_m x^m,$$

so werden die m Gleichungen (1.):

$$2. \quad \begin{cases} v_0 \cdot \alpha + v_1 \cdot \alpha_1 + v_2 \cdot \alpha_2 \ldots. + v_m \cdot \alpha_m = 0, \\ v_1 \cdot \alpha + v_2 \cdot \alpha_1 + v_3 \cdot \alpha_2 \ldots. + v_{m+1} \cdot \alpha_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{m-1} \cdot \alpha + v_m \cdot \alpha_1 + v_{m+1} \cdot \alpha_2 \ldots. + v_{2m-1} \cdot \alpha_m = 0, \end{cases}$$

in welchen die Coëfficienten v gegebne Gröfsen sind. Substituirt man die aus diesen Gleichungen sich ergebenden Verhältnisse der Unbekannten $\alpha, \alpha_1, \ldots. \alpha_m$ in den Ausdruck $\alpha + \alpha_1 x \ldots. + \alpha_m x^m$, *so erhält man, abgesehn von einem constanten Factor,* $D(x)$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$3. \quad \begin{cases} 1 & x & x^2 & \ldots. & x^m \\ v_0 & v_1 & v_2 & \ldots. & v_m \\ v_1 & v_2 & v_3 & \ldots. & v_{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{m-1} & v_m & v_{m+1} & \ldots. & v_{2m-1}. \end{cases}$$

Setzt man den constanten Factor $= 1$, so erhält man für $m = 1$,

$$D(x) = v_1 - v_0 x,$$

für $m = 2$,

$$D(x) = v_1 v_3 - v_2^2 + (v_1 v_2 - v_0 v_3) x + (v_0 v_2 - v_1^2) x^2,$$

für $m = 3$,

$$\begin{aligned} D(x) = \quad & v_1 v_3 v_5 + 2 v_2 v_3 v_4 - v_1 v_4^2 - v_2^2 v_5 - v_3^3 \\ & + (v_1 v_2 v_5 + v_0 v_4^2 + v_2 v_3^2 - v_0 v_3 v_5 - v_1 v_3 v_4 - v_2^2 v_4) x \\ & + (v_0 v_2 v_5 + v_1 v_2 v_4 + v_1 v_3^2 - v_0 v_3 v_4 - v_1^2 v_5 - v_2^2 v_3) x^2 \\ & + (v_0 v_3^2 + v_1^2 v_4 + v_2^3 - v_0 v_2 v_4 - 2 v_1 v_2 v_3) x^3, \end{aligned}$$

u. s. w.

Der constante Term wird aus dem Coëfficienten der höchsten Potenz x^m erhalten, wenn man sämmtliche Indices um 1 erhöht und, wenn m ungerade ist, alle Zeichen ändert. Allgemeiner erhält man den Coëfficient von x^k aus dem Coëfficienten von x^{m-k}, wenn man sämmtliche Indices von $2m-1$ abzieht und, wenn m ungerade ist, alle Zeichen ändert.

Man kann für die Function $D(x)$ durch folgende Betrachtungen eine einfachere Form finden. Wenn in dem Schema der Gröfsen, aus welchen eine Determinante gebildet wird, $a_k^{(i)}$ die in der $(i+1)$ten Horizontalreihe und $(k+1)$ten Verticalreihe befindliche Gröfse bedeutet, so ändert sich nach einem bekannten Satze die Determinante nicht, wenn man für jedes $a_1^{(i)}$ setzt $a_1^{(i)} - \lambda a_0^{(i)}$, für jedes $a_2^{(i)}$ setzt $a_2^{(i)} - \lambda_1 a_1^{(i)} - \mu_1 a_0^{(i)}$, u. s. w., wo λ, λ_1, μ_1 etc. beliebige, von i unabhängige, Constanten bedeuten; oder, wie ich der Kürze wegen sagen will, die aus einem Systeme Gröfsen gebildete Determinante ändert sich nicht, wenn man von jeder Verticalreihe die vorhergehenden, mit beliebigen Constanten multiplicirt, abzieht. Das Gleiche gilt in Bezug auf die Horizontalreihen des Schemas der Gröfsen, aus denen man die Determinante bildet. Wenn man von jeder Verticalreihe blofs die unmittelbar vorhergehende, mit derselben Gröfse x multiplicirt, abzieht, so erhält man hieraus den allgemeinen Satz, *dafs die Determinanten der Gröfsen*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & x & x^2 & \ldots. & x^n \\ a^{(0)} & a' & a'' & \ldots. & a^{(p)} \\ a_1^{(0)} & a_1' & a_1'' & \ldots. & a_1^{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p-1}^{(0)} & a_{p-1}' & a_{p-1}'' & \ldots. & a_{p-1}^{(p)} \end{array}$$

und der Gröfsen

$$\begin{array}{llll} a' - a^{(0)}x & a'' - a'x & \ldots. & a^{(p)} - a^{(p-1)}x \\ a_1' - a_1^{(0)}x & a_1'' - a_1'x & \ldots. & a_1^{(p)} - a_1^{(p-1)}x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p-1}' - a_{p-1}^{(0)}x & a_{p-1}'' - a_{p-1}'x & \ldots. & a_{p-1}^{(p)} - a_{p-1}^{(p-1)}x \end{array}$$

einander gleich sind. Transformirt man auf diese Weise die Gröfsen (3.), so erhält man, wenn

$$w_p = v_{p+1} - x v_p$$

gesetzt wird, folgenden Satz:

„*Es sei*

$$\frac{x_0^p(x_0-x)u_0}{f'(x_0)} + \frac{x_1^p(x_1-x)u_1}{f'(x_1)} \ldots. + \frac{x_{m+n-1}^p(x_{m+n-1}-x)u_{m+n-1}}{f'(x_{m+n-1})} = w_p,$$

so wird $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen

$$4. \quad \begin{cases} w_0 & w_1 & \ldots. & w_{m-1} \\ w_1 & w_2 & \ldots. & w_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{m-1} & w_m & \ldots. & w_{2m-2}. \end{cases}$$"

Man erhält nach diesem Satz, wenn man wieder den constanten Factor $= 1$ setzt, für $m = 1$,

$$D(x) = w_0,$$

für $m = 2$,

$$D(x) = w_0 w_2 - w_1^2,$$

für $m = 3$,

$$D(x) = w_0 w_2 w_4 + 2 w_1 w_2 w_3 - w_0 w_3^2 - w_1^2 w_4 - w_2^3,$$

u. s. w.

Die *Cauchysche* Formel giebt für den Nenner einen Ausdruck, welcher aus $\frac{(n+m)(n+m-1)\ldots.(n+1)}{1 \cdot 2 \ldots. m}$ Gliedern besteht. Nehmen wir an, was bei dieser Untersuchung verstattet ist, dafs der Nenner nicht von höherm Grade als der Zähler ist, so wird $n \geqq m+1$, und daher die Zahl der Terme der *Cauchyschen* Formel gröfser oder so grofs als die Zahl $\frac{(2m+1)2m(2m-1)\ldots.(m+2)}{1 \cdot 2 \ldots. m}$, welche, so lange $m \geqq 7$, die Zahl der Terme der oben aus den Gröfsen w gebildeten Determinante, durch welche $D(x)$ dargestellt worden ist, übertrifft.

Wenn die Symmetrie der Formeln in Bezug auf die $m+n$ Werthe von x und u nicht berücksichtigt wird, so kann man die Gröfsen, aus denen die

Determinante gebildet wird, durch eine neue Transformation vereinfachen. Man setze nämlich in (4.) statt der zweiten Verticalreihe die Gröfsen

$$w_1 - x_0 w_0, \quad w_2 - x_0 w_1, \quad \ldots \quad w_m - x_0 w_{m-1},$$

statt der dritten Verticalreihe die Gröfsen

$$w_2 - (x_0 + x_1) w_1 + x_0 x_1 w_0, \quad w_3 - (x_0 + x_1) w_2 + x_0 x_1 w_1, \text{ u. s. w.},$$

statt der vierten Verticalreihe die Gröfsen

$$w_3 - (x_0 + x_1 + x_2) w_2 + (x_1 x_2 + x_2 x_0 + x_0 x_1) w_1 - x_0 x_1 x_2 w_0, \text{ u. s. w. u. s. w.},$$

so erhält man folgenden Satz:

„*Es sei*

$$f_i(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_{m+n-1}),$$

ferner

$$\frac{x_i^p (x_i - x) . u_i}{f_i'(x_i)} + \frac{x_{i+1}^p (x_{i+1} - x) . u_{i+1}}{f_i'(x_{i+1})} \ldots + \frac{x_{m+n-1}^p (x_{m+n-1} - x) . u_{m+n-1}}{f_i'(x_{m+n-1})} = U_p^{(i)},$$

so wird $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, die Determinante der Gröfsen

$$5. \quad \begin{cases} U_0^{(0)} & U_0' & \ldots & U_0^{(m-1)} \\ U_1^{(0)} & U_1' & \ldots & U_1^{(m-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ U_{m-1}^{(0)} & U_{m-1}' & \ldots & U_{m-1}^{(m-1)} \end{cases}$$

.“

In diesem Theorem sind $U_0^{(0)}, U_1^{(0)}, \ldots U_{m-1}^{(0)}$ dieselben Gröfsen wie $w_0, w_1, \ldots w_{m-1}$.

Man erhält noch eine weitre Vereinfachung, wenn man auf ähnliche Art die Horizontalreihen der Gröfsen (5.) transformirt. Man setze nämlich statt der zweiten Horizontalreihe dieser Gröfsen die folgende:

$$U_1^{(0)} - x_{m-1} U_0^{(0)}, \quad U_1' - x_{m-1} U_0', \quad \ldots \quad U_1^{(m-1)} - x_{m-1} U_0^{(m-1)},$$

statt der dritten die folgende:

$$U_2^{(0)} - (x_{m-1} + x_m) U_1^{(0)} + x_{m-1} x_m U_0^{(0)}, \quad U_2' - (x_{m-1} + x_m) U_1' + x_{m-1} x_m U_0', \text{ etc.}$$

u. s. f.; so bleibt wieder der Werth der Determinante unverändert, und man erhält jetzt folgendes Theorem:

„*Es sei*

$$f_{i,k}(x) =$$

$$(x - x_i)(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_{m-2})(x - x_{m-1+k})(x - x_{m+k}) \ldots (x - x_{m+n-1}),$$

ferner

$$\frac{(x_i - x)u_i}{f'_{i,k}(x_i)} + \frac{(x_{i+1} - x)u_{i+1}}{f'_{i,k}(x_{i+1})} \cdots + \frac{(x_{m-2} - x)u_{m-2}}{f'_{i,k}(x_{m-2})}$$
$$+ \frac{(x_{m-1+k} - x)u_{m-1+k}}{f'_{i,k}(x_{m-1+k})} + \frac{(x_{m+k} - x)u_{m+k}}{f'_{i,k}(x_{m+k})} \cdots + \frac{(x_{m+n-1} - x)u_{m+n-1}}{f'_{i,k}(x_{m+n-1})}$$
$$= V_k^{(i)},$$

so wird $D(x)$, *abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen*

$$6. \quad \begin{cases} V_0^{(0)} & V_0' & \cdots & V_0^{(m-1)} \\ V_1^{(0)} & V_1' & \cdots & V_1^{(m-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{m-1}^{(0)} & V_{m-1}' & \cdots & V_{m-1}^{(m-1)} \end{cases}$$

Hier sind $V_0^{(0)}$, V_0', ... $V_0^{(m-1)}$ dieselben Gröfsen wie $U_0^{(0)}$, U_0', ... $U_0^{(m-1)}$, und daher $V_0^{(0)} = w_0$, welche Gröfse allein unverändert geblieben ist.

Transformirt man auf ähnliche Art die letzten m Horizontalreihen der Gröfsen (3.), so erhält man folgenden Satz:

„*Es sei*

$$\frac{x_i^p u_i}{f'_i(x_i)} + \frac{x_{i+1}^p u_{i+1}}{f'_i(x_{i+1})} \cdots + \frac{x_{m+n-1}^p u_{m+n-1}}{f'_i(x_{m+n-1})} = W_p^{(i)},$$

wo wieder

$$f_i(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_{m+n-1}),$$

so wird $D(x)$, *abgesehn von einem constanten Factor, die Determinante der Gröfsen*

$$7. \quad \begin{cases} 1 & x & x^2 & \cdots & x^m \\ W_0^{(0)} & W_1^{(0)} & \cdots & & W_m^{(0)} \\ W_0' & W_1' & \cdots & & W_m' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_0^{(m-1)} & W_1^{(m-1)} & \cdots & & W_m^{(m-1)} \end{cases}$$

Transformirt man aber auf ähnliche Art die Verticalreihen der Gröfsen (3.), so erhält man den Satz, *dafs* $D(x)$, *abgesehn von einem constanten Factor, gleich wird der Determinante der Gröfsen*

$$8. \quad \begin{cases} 1 & x - x_0 & (x - x_0)(x - x_1) & \cdots & (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{m-1}) \\ W_0^{(0)} & W_0' & W_0'' & \cdots & W_0^{(m)} \\ W_1^{(0)} & W_1' & W_1'' & \cdots & W_1^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{m-1}^{(0)} & W_{m-1}' & W_{m-1}'' & \cdots & W_{m-1}^{(m)} \end{cases}.$$

Endlich kann man wieder die m letzten Horizontalreihen dieser Gröfsen transformiren, und erhält dann den folgenden Satz:

„*Setzt man*

$$X_k^{(i)} = \frac{u_i}{F'_{i,k}(x_i)} + \frac{u_{i+1}}{F'_{i,k}(x_{i+1})} \cdots + \frac{u_{m-1}}{F'_{i,k}(x_{m-1})}$$
$$+ \frac{u_{m+k}}{F'_{i,k}(x_{m+k})} + \frac{u_{m+k+1}}{F'_{i,k}(x_{m+k+1})} \cdots + \frac{u_{m+n-1}}{F'_{i,k}(x_{m+n-1})},$$

wo wieder

$$F_{i,k}(x) = (x-x_i)(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{m-1})$$
$$(x-x_{m+k})(x-x_{m+k+1})\ldots(x-x_{m+n-1}),$$

so wird $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen

$$9.\quad \begin{cases} 1 & x-x_0 & (x-x_0)(x-x_1) & \ldots & (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1}) \\ X_0^{(0)} & X_0' & X_0'' & \ldots & X_0^{(m)} \\ X_1^{(0)} & X_1' & X_1'' & \ldots & X_1^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{m-1}^{(0)} & X_{m-1}' & X_{m-1}'' & \ldots & X_{m-1}^{(m)} \end{cases}$$

.“

Aus diesen beiden letzten Theoremen erhält man eine nach den Gröfsen $x-x_0$, $(x-x_0)(x-x_1)$ etc. geordnete Darstellung der Function $D(x)$.

2.

Man kann auch sogleich dem System der m Gleichungen (1.) selber solche verschiedne Formen geben, die unmittelbar auf die verschiednen für $D(x)$ gefundnen Determinante führen. Man erhält nämlich verschiedne Formen des Systems der m Gleichungen (1.) durch die Betrachtung, dafs die Gleichung

$$\Sigma \frac{x_i^p u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = \Sigma \frac{x_i^p N(x_i)}{f'(x_i)} = 0$$

nur erfordert, dafs $f(x)$ den Grad $n+p$ übersteige. Es ist daher nicht nöthig, für $f(x)$ das Product von allen $m+n$ Factoren $x-x_i$ anzunehmen, sondern man wird immer Gleichungen von der vorstehenden Form erhalten können, wofern nur die Zahl dieser Factoren die Zahl n übertrifft, wobei aber jedesmal wenn $n+k+1$ die Zahl der Factoren von $f(x)$ ist, der Exponent p nur einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots k$ annehmen darf. Die Summation mufs in allen diesen Fällen nur auf solche Werthe von x_i ausgedehnt werden, welche in den lineären

Factoren $x - x_i$ vorkommen, die man zur Bildung der Function $f(x)$ ausgewählt hat, oder solche, für welche $f(x_i) = 0$ wird, was man überall im Folgenden zum richtigen Verständnifs der Summenzeichen festzuhalten hat. Die verschiednen Annahmen, die man hiernach für $f(x)$ machen kann, ergeben eine sehr grofse Menge Gleichungen von der Form

$$10. \qquad \Sigma \frac{x_i^p u_i D(x_i)}{f'(x_i)} = 0,$$

welche sämmtlich in Bezug auf die Coëfficienten von $D(x)$ lineär sind, und von denen m von einander unabhängige die Verhältnisse dieser Coëfficienten und mithin die Function $D(x)$ selbst, abgesehn von einem constanten Factor, bestimmen. Alle diese Gleichungen lassen sich aus den m Gleichungen (1.) ableiten und es werden daher alle Systeme von m von einander unabhängigen Gleichungen (10.) nur verschiedne Formen desselben Systems (1.) sein, welchen wiederum verschiedne Formen der Gröfsen, aus welchen man die der Function $D(x)$ proportionale Determinante zu bilden hat, entsprechen werden. Ich will jetzt die zwei hauptsächlichsten dieser Formen näher angeben.

1°. Man bilde m Gleichungen (10.), indem man für $f(x)$ immer nur das Product aus $n+1$ Factoren und daher $p = 0$ setzt, von den $n+1$ Factoren ferner n unverändert läfst, während man für die $(n+1)$ten immer einen andern aus den m übrigen Factoren nimmt. Es sei

$$\Psi(x) = (x - x_m)(x - x_{m+1}) \ldots (x - x_{m+n-1}), \qquad \frac{u_k}{\Psi'(x_k)} = s_k,$$

$$\frac{s_m x_m^p}{x_m - x_i} + \frac{s_{m+1} x_{m+1}^p}{x_{m+1} - x_i} \ldots + \frac{s_{m+n-1} x_{m+n-1}^p}{x_{m+n-1} - x_i} + \frac{u_i x_i^p}{\Psi'(x_i)} = t_p^{(i)},$$

so erhält man auf diese Weise, wenn man $f(x) = \Psi(x)(x - x_i)$ und für i nach und nach die Indices 0, 1, ... $m-1$ setzt, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha + x \cdot \alpha_1 \ldots + x^m \cdot \alpha_m &= D(x), \\
t_0^{(0)} \cdot \alpha + t_1^{(0)} \cdot \alpha_1 \ldots + t_m^{(0)} \cdot \alpha_m &= 0, \\
t_0' \cdot \alpha + t_1' \cdot \alpha_1 \ldots + t_m' \cdot \alpha_m &= 0, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
t_0^{(m-1)} \cdot \alpha + t_1^{(m-1)} \cdot \alpha_1 \ldots + t_m^{(m-1)} \cdot \alpha_m &= 0,
\end{aligned}$$

und daher

$$\frac{1}{\alpha}(\Sigma \pm t_1^{(0)} t_2' \ldots t_m^{(m-1)}) . D(x)$$

gleich der Determinante der Gröfsen

$$11.\quad \begin{cases} 1 & x & x^2 & \ldots. & x^m \\ t_0^{(0)} & t_1^{(0)} & t_2^{(0)} & \ldots. & t_m^{(0)} \\ t_0' & t_1' & t_2' & \ldots. & t_m' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_0^{(m-1)} & t_1^{(m-1)} & t_2^{(m-1)} & \ldots. & t_m^{(m-1)}. \end{cases}$$

2°. Setzt man für $f(x)$ nach und nach

$$\begin{aligned} &\Psi(x).(x-x_{m-1}) \\ &\Psi(x).(x-x_{m-1})(x-x_{m-2}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Psi(x).(x-x_{m-1})(x-x_{m-2})\ldots.(x-x_0), \end{aligned}$$

und immer $p=0$, so erhält man aus (10.) m Gleichungen, welche für $D(x)$ die aus den Gröfsen (7.) gebildete Determinante ergeben.

Andre Formen der lineären Gleichungen, durch welche die Function $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, bestimmt wird, und daher auch andre Formen der Elemente der dieser Function proportionalen Determinante erhält man, wenn man $D(x)$ auf andre Arten als nach den Potenzen von x entwickelt. Es sei z. B.

$$12.\quad D(x) = \delta_0 + \delta_1(x-x_0) + \delta_2(x-x_0)(x-x_1) \ldots. + \delta_m(x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{m-1}),$$

wo δ_0, δ_1 etc. constante Coëfficienten bedeuten, so findet man,

3°. wenn man den Ausdruck (12.) in die m Gleichungen (1.) substituirt, in welchen $f(x)$ das aus allen $m+n$ Factoren gebildete Product bedeutet, $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen (8.).

4°. Wenn man aus der Gleichung (10.) m Gleichungen bildet, indem man immer $p=0$ und für $f(x)$ zuerst das vollständige Product aus allen $m+n$ Factoren setzt, dann aber nach und nach die Factoren

$$x-x_m,\quad (x-x_m)(x-x_{m-1}),\quad \ldots.\quad (x-x_m)(x-x_{m+1})\ldots.(x-x_{2m-2})$$

fortläfst, und substituirt man in diesen m Gleichungen für $D(x)$ seinen Ausdruck (12.), so erhält man $D(x)$ der Determinante der Gröfsen (9.) proportional.

Wenn man $D(x)$ durch den Ausdruck (12.) darstellt, so wird man im Allgemeinen für die Coëfficienten der Unbekannten δ_0, δ_1 etc. in den m Gleichungen vereinfachte Ausdrücke dadurch erhalten, dafs man für $f(x)$ das Product

aus den m Factoren $x-x_0$, $x-x_1$, ... $x-x_{m-1}$ und aus $n-m+1$ oder einer gröfsern Zahl andern setzt, welche man beliebig aus den n übrigen Factoren $x-x_m$, $x-x_{m+1}$, ... $x-x_{m+n-1}$ auswählen kann. Es werden nämlich in dem Aggregate, welches den Coëfficient von δ_i bildet, immer die in u_0, u_1, ... u_{i-1} multiplicirten Terme verschwinden, und in jedem andern, in u_k multiplicirten, Term wird sich der Factor

$$(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{i-1})$$

fortheben.

Man kann aber auch statt der constanten Coëfficienten von $D(x)$ Functionen von x als die Unbekannten der lineären Gleichungen, durch welche man $D(x)$ bestimmen will, einführen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

5°. Es sei

$$\begin{aligned} D &= \alpha+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3\ldots.+\alpha_m x^m,\\ D_1 &= \alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2\ldots\ldots\ldots+\alpha_m x^{m-1},\\ D_2 &= \alpha_2+\alpha_3 x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_m x^{m-2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ D_{m-1} &= \alpha_{m-1}+\alpha_m x, \qquad D_m=\alpha_m, \end{aligned}$$

woraus

$$\alpha=D-xD_1,\quad \alpha_1=D_1-xD_2,\quad \ldots.\quad \alpha_{m-1}=D_{m-1}-xD_m,\quad \alpha_m=D_m,$$

und daher

$$13.\qquad D(x_i)=D+(x_i-x)D_1+x_i(x_i-x)D_2\ldots.+x_i^{m-1}(x_i-x)D_m$$

folgt. Setzt man

$$\Sigma\frac{x_i^p(x_i-x)u_i}{f'(x_i)}=w_p,\qquad \Sigma\frac{x_i^p u_i}{f'(x_i)}=v_p,$$

so erhält man durch Substitution des Ausdrucks (13.) in (10.), wenn $f(x)$ vom $(n+1+p)$ten oder einem höhern Grade angenommen wird,

$$14.\qquad 0=v_pD+w_pD_1+w_{p+1}D_2\ldots.+w_{p+m-1}D_m.$$

Nimmt man beliebige m von einander unabhängige Gleichungen (14.), so hat man m lineäre Gleichungen zwischen den Unbekannten $D, D_1, \ldots. D_m$, aus denen man ihre Verhältnisse bestimmen kann. Die $m+1$ partiellen Determinanten *), welche auf diese Weise den Functionen $D, D_1, D_2, \ldots. D_m$ proportional ge-

*) Wenn man mehr Verticalreihen als Horizontalreihen oder mehr Horizontalreihen als Verticalreihen hat, so nenne ich die Determinanten, welche dadurch, dafs man eine gleiche Zahl Horizontal- und Verticalreihen mit einander combinirt, erhalten werden, *partielle Determinanten*.

funden werden, müssen mit ihnen respective von demselben Grade sein. Denn da alle Gröfsen w in den Gleichungen (17.) lineäre Functionen von x und nur die Gröfsen v constant sind, so sind die den Unbekannten D und D_1 proportionalen Determinanten eben so wie diese selbst Functionen von x vom $m$ten und $(m-1)$ten Grade. Da ferner in unsrer Untersuchung α einen beliebigen Werth annehmen kann, so werden im Allgemeinen D und D_1 keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Wenn aber zwei ganze Functionen D und D_1, die keinen gemeinschaftlichen Factor haben, zweien anderen ganzen Functionen E und E_1 proportional und D und E von demselben Grade sind, so mufs $\frac{D}{E} = \frac{D_1}{E_1}$ eine Constante sein *). Es werden daher die Functionen D, D_1, D_2, ... D_m aus den partiellen Determinanten, denen sie vermöge der m Gleichungen (14.) proportional gefunden werden, durch Multiplication mit einer Constante erhalten und daher mit ihnen von demselben Grade sein. Es folgt hieraus, dafs sich in den Determinanten, welche den Functionen D_2, D_3, ... D_m proportional sind und deren einzelne Terme alle auf den $(m-1)$ten Grad steigen, respective die höchste, die beiden höchsten etc. oder endlich alle Potenzen von x fortheben müssen.

Nimmt man für $f(x)$ die vollständige Function vom $(m+n)$ten Grade und giebt, wie es für diesen Fall verstattet ist, dem Exponenten p die Werthe $0, 1, 2, \ldots m-1$, so ergiebt sich aus den so erhaltnen m Gleichungen das Resultat, dafs $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, der aus den Gröfsen (4.) gebildeten Determinante gleich ist. Nimmt man zu den Gröfsen (4.) noch aus (3.) die Gröfsen $v_0, v_1, \ldots v_{m-1}$ als $(m+1)$te Verticalreihe hinzu, so sieht man, dafs die übrigen partiellen Determinanten den Functionen niedreren Grades $D_1, D_2, \ldots D_m$ proportional werden.

6°. Ich will jetzt als Unbekannte die ganzen Functionen von x annehmen, welche man, wenn man $D(x)$ hintereinander durch $x-x_0$, $x-x_1$, $x-x_2$, ... $x-x_{m-1}$ dividirt, successive als Quotienten erhält. Man findet die hierauf bezüglichen Formeln durch folgende Betrachtungen.

Das 5te Lemma des 3ten Buchs der *Newtonschen Principia* enthält bekanntlich folgenden Satz. „*Wenn* y_0, y_1, y_2 *etc. die Werthe einer Func-*

*) Wenn nämlich $DE_1 - D_1E = 0$, so mufs für alle Werthe von x, für welche D verschwindet, auch E verschwinden, weil D und D_1 keinen gemeinschaftlichen Factor haben; sind daher D und E von demselben Grade, so können sie nur durch einen constanten Factor verschieden sein.

tion y sind, welche den Werthen x_0, x_1, x_2 etc. der Variable x entsprechen, und man

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=y'_0,\quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=y'_1,\quad \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=y'_2 \quad \text{etc.},$$
$$\frac{y'_1-y'_0}{x_2-x_0}=y''_0,\quad \frac{y'_2-y'_1}{x_3-x_1}=y''_1,\quad \frac{y'_3-y'_2}{x_4-x_2}=y''_2 \quad \text{etc.},$$
$$\frac{y''_1-y''_0}{x_3-x_0}=y'''_0,\quad \frac{y''_2-y''_1}{x_4-x_1}=y'''_1,\quad \frac{y''_3-y''_2}{x_5-x_2}=y'''_2 \quad \text{etc.}$$

setzt, so wird

$$y=y_0+y'_0(x-x_0)+y''_0(x-x_0)(x-x_1)+y'''_0(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ \textit{etc.}"$$

Ist y eine ganze rationale Function der $p$ten Ordnung, so erhält man den vollständigen Ausdruck dieser Function, wenn man ihre $p+1$ Werthe y_0, y_1, ... y_p kennt und die vorstehende Reihe bis zu dem Term

$$y_0^{(p)}(x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{p-1})$$

fortsetzt. Allgemein kann die Formel, wie *Newton* will, zur Interpolation benutzt werden. Die Ausdrücke von y'_0, y''_0 etc. durch die gegebnen Werthe sind

$$15.\quad \begin{cases} y'_0 = \dfrac{y_0}{x_0-x_1}+\dfrac{y_1}{x_1-x_0}, \\ y''_0 = \dfrac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\dfrac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\dfrac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Setzt man in diese Formeln $y=D(x)$, betrachtet ferner $D(x)$ selbst als den ersten der gegebnen Werthe, dagegen $D(x_i)$ als den gesuchten Werth, so erhält man

$$16.\ D(x_i)=D+D'(x_i-x)+D''(x_i-x)(x_i-x_0)+D'''(x_i-x)(x_i-x_0)(x_i-x_1)$$
$$\ldots.+D^{(m)}(x_i-x)(x_i-x_0)\ldots.(x_i-x_{m-2}),$$

wo D', D'', ... $D^{(m)}$ zufolge (15.) durch die folgenden Gleichungen bestimmt werden,

$$D=D(x),$$
$$D'=\frac{D(x)}{x-x_0}+\frac{D(x_0)}{x_0-x},$$
$$D''=\frac{D(x)}{(x-x_0)(x-x_1)}+\frac{D(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)}+\frac{D(x_1)}{(x_1-x)(x_1-x_0)},$$
$$\text{etc.}$$

Diese Ausdrücke sind sämmtlich ganze Functionen von x, und man sieht aus

ihrer Zusammensetzung leicht, dafs man sie als Quotienten erhält, wenn man die erste von ihnen $D(x)$ durch die Gröfsen $x-x_0$, $(x-x_0)(x-x_1)$ etc. dividirt. Man kann dieselben auch successive bilden, indem D'' der Quotient der Division von D' durch $x-x_1$, D''' der Quotient der Division von D'' durch $x-x_2$ wird, etc. Substituirt man den Ausdruck (16.) in m von einander unabhängige Gleichungen (10.), und betrachtet darin die $m+1$ Gröfsen D, D', ... $D^{(m)}$ als Unbekannte, so kann man wieder, wie oben bei den Functionen D, D_1, D_2 etc., zeigen, dafs sie von den aus ihren Coëfficienten gebildeten partiellen Determinanten nur durch einen constanten Factor unterschieden sein können, und sich deshalb in den Determinanten, welche den $m-1$ Functionen D'', D''', ... $D^{(m)}$ proportional sind, die höchste Potenz von x, die beiden höchsten u. s. w. oder endlich alle Potenzen von x fortheben müssen.

Die Coëfficienten von D, D' etc. in den m aus (10.) erhaltnen Gleichungen vereinfachen sich, wenn $f(x)$ in (10.) den Factor $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})$ enthält. Setzt man wieder $f_i(x) = \frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})}$, so erhält man aus (10.) die Gleichung

$$17. \quad S\cdot D + S_1\cdot D' + S_2\cdot D'' \ldots + S_m\cdot D^{(m)} = 0,$$

wo

$$18. \quad S = \Sigma \frac{u_i x_i^p}{f'(x_i)}, \quad S_1 = \Sigma \frac{u_i x_i^p (x_i - x)}{f'(x_i)}, \quad S_2 = \Sigma \frac{u_i x_i^p (x_i - x)}{f_1'(x_i)}, \quad \ldots.$$

$$\ldots. \quad S_m = \Sigma \frac{u_i x_i^p (x_i - x)}{f_{m-1}'(x_i)}.$$

Nimmt man für $f(x)$ den vollständigen Ausdruck vom $(m+n)$ten Grade an und bildet die m Gleichungen, indem man nach und nach in (18.) für p seine Werthe 0, 1, 2, ... $m-1$ setzt, so erhält man aus denselben $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, gleich der Determinante der Gröfsen (5.). Bildet man aber die m Gleichungen, indem man in (18.) $p=0$ und für $f(x)$ nach und nach die Functionen

$$f(x), \quad \frac{f(x)}{x-x_{m-1}}, \quad \frac{f(x)}{(x-x_{m-1})(x-x_m)}, \quad \ldots. \quad \frac{f(x)}{(x-x_{m-1})(x-x_m)\ldots(x-x_{2m-3})}$$

setzt, deren erste wieder die vollständige Function $(m+n)$ten Grades ist, so erhält man $D(x)$, abgesehn von einem constanten Factor, der Determinante der Gröfsen (6.) gleich. Durch ganz ähnliche Determinanten erhält man aber auch, zufolge der vorstehenden Betrachtungen, die ganzen Functionen, welche sich als die Quotienten der Division von $D(x)$ durch $x-x_0$, $(x-x_0)(x-x_1)$ u. s. w. ergeben.

3.

Den Zähler $N(x)$ kann man, abgesehn von einem constanten Factor, unmittelbar aus dem Nenner $D(x)$ erhalten, wenn man nur für die Gröfsen u_0, u_1 etc. ihre reciproken Werthe $\frac{1}{u_0}$, $\frac{1}{u_1}$ etc. setzt, und gleichzeitig m und n in $n-1$ und $m+1$ ändert, so dafs umgekehrt der Nenner von der Ordnung $n-1$, der Zähler von der Ordnung m wird. Denn die Aufgabe, die Gröfsen u_0, u_1 etc. durch den Bruch $\frac{N(x)}{D(x)}$ darzustellen, ist dieselbe wie die Aufgabe, die Gröfsen $\frac{1}{u_0}$, $\frac{1}{u_1}$ etc. durch den Bruch $\frac{D(x)}{N(x)}$ darzustellen. Es bleibt dann noch übrig, den constanten Factor, mit welchem der Quotient der beiden so gefundnen Determinanten multiplicirt werden mufs, zu bestimmen, wozu einer der gegebnen Werthe des Bruchs hinreicht.

Da der Nenner als eine Determinante vom $m$ten Grade gefunden wurde, (wenn man den ***Grad der Determinante*** nach der Zahl der Horizontal- oder Verticalreihen der Gröfsen, aus denen sie gebildet ist, bestimmt,) so wird auf die angegebne Weise der Zähler als eine Determinante vom $(n-1)$ten Grade erhalten werden. Wenn daher der Grad des Zählers und Nenners sehr verschieden ist, so wird die eine Determinante von einem hohen Grade werden, während die andre von einem niedern Grade sein kann. Man wird aber aus dem Folgenden ersehen, dafs man auch immer den Zähler durch eine Determinante vom $(m+1)$ten Grade darstellen kann. Diese Darstellung wird einfacher als die obige, wenn die Grade des Zählers und Nenners um zwei oder mehr Einheiten verschieden sind und man, wie es nach der oben gemachten Bemerkung verstattet ist, die Aufgabe so stellt, dafs der Nenner vom niedrigeren Grade als der Zähler wird. Auch wird man bei dieser Darstellung der Bestimmung des hinzuzufügenden constanten Factors überhoben.

Es sei $\varphi(x)$ eine Function von x vom $n$ten oder einem höhern Grade und das Product von einer entsprechenden Anzahl der lineären Factoren $x-x_0$, $x-x_1$ etc. Man hat dann durch die bekannten Formeln der Theorie der Partialbrüche,

$$-\frac{N(x)}{\varphi(x)} = \Sigma \frac{N(x_r)}{(x_r-x)\varphi'(x_r)} = \Sigma \frac{u_r D(x_r)}{(x_r-x)\varphi'(x_r)},$$

wo man unter dem Summenzeichen für r alle diejenigen Indices $0, 1, 2, \ldots m+n-1$ zu setzen hat, für welche $\varphi(x_r) = 0$ wird. Setzt man für $D(x)$

wieder $\alpha + \alpha_1 x \ldots . + \alpha_m x^m$ und

$$\Sigma \frac{x_r^p u_r}{(x_r - x)\varphi'(x_r)} = T_p,$$

so giebt die vorstehende Formel:

$$-\frac{N(x)}{\varphi(x)} = \alpha T_0 + \alpha_1 T_1 \ldots . + \alpha_m T_m.$$

Wenn man daher die Gröfsen α, α_1 etc. den partiellen Determinanten der Gleichungen (2.) §. 1. *gleich* setzt, oder der constante Factor, mit welchem die Determinanten multiplicirt werden müssen, überall $= 1$ angenommen wird, *so wird* $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$19. \quad \begin{cases} T_0 & T_1 & \ldots . & T_m \\ v_0 & v_1 & \ldots . & v_m \\ v_1 & v_2 & \ldots . & v_{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{m-1} & v_m & \ldots . & v_{2m-1}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen v dieselben sind wie in (3.).

Transformirt man auf dieselbe Art wie zu Ende des §. 1. die m letzten Horizontalreihen, so erhält man $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ gleich der Determinante der Gröfsen

$$20. \quad \begin{cases} T_0 & T_1 & \ldots . & T_m \\ W_0^{(0)} & W_1^{(0)} & \ldots . & W_m^{(0)} \\ W_0' & W_1' & \ldots . & W_m' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ W_0^{(m-1)} & W_1^{(m-1)} & \ldots . & W_m^{(m-1)}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen W dieselben wie in (7.) sind.

Multiplicirt man in (19.) jede Verticalreihe mit x und zieht sie von der folgenden ab, *so ergiebt sich, wenn*

$$\Sigma \frac{u_r x_r^p}{\varphi'(x_r)} = S_p$$

gesetzt wird, die Function $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$21. \quad \begin{cases} T_0 & S_0 & S_1 & \ldots . & S_{m-1} \\ v_0 & w_0 & w_1 & \ldots . & w_{m-1} \\ v_1 & w_1 & w_2 & \ldots . & w_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{m-1} & w_{m-1} & w_m & \ldots . & w_{2m-2}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen w dieselben wie in (4.) sind. Der in dieser Determinante in T_0 multiplicirte Ausdruck ist der Nenner $D(x)$.

Um die Gröfsen (21.) noch weiter zu reduciren, will ich annehmen, dafs die Function $\varphi(x)$ dem Product

$$(x-x_{m-1})(x-x_m)\ldots(x-x_{m+n-2})$$

entweder gleich sei oder dieses Product als Factor enthalte. Ferner sei

$$\varphi_k(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-x_{m-1})(x-x_m)\ldots(x-x_{m+k-2})}, \qquad S_p^{(k)} = \Sigma \frac{x_r^p u_r}{\varphi_k'(x_r)},$$

wenn die Summe nur auf diejenigen Indices r erstreckt wird, für welche $\varphi_k(x_r) = 0$ wird. Wenn man jetzt auf die §. 1. angewandte Art sowohl die m letzten Horizontalreihen als die m letzten Verticalreihen der Gröfsen (21.) transformirt, *so erhält man* $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$22. \quad \begin{cases} T_0 & S_0^{(0)} & S_0' & \ldots & S_0^{(m-1)} \\ W_0^{(0)} & V_0^{(0)} & V_1^{(0)} & \ldots & V_{m-1}^{(0)} \\ W_0' & V_0' & V_1' & \ldots & V_{m-1}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ W_0^{(m-1)} & V_0^{(m-1)} & V_1^{(m-1)} & \ldots & V_{m-1}^{(m-1)}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen V dieselben wie in (6.) sind.

Es sei jetzt

$$T_p^{(k)} = \Sigma \frac{x_r^p u_r}{(x_r - x)\varphi_k'(x_r)},$$

wo immer wieder die Summation nur auf diejenigen Indices r sich erstreckt, für welche $\varphi_k(x_r) = 0$ wird. Man hat dann die Formeln,

$$(x-x_{m-1})T_p + S_p^{(0)} = T_p',$$
$$(x-x_m)T_p' + S_p' = T_p'',$$
u. s. w.

Ferner ist, wenn die Gröfsen $X_k^{(i)}$ dieselbe Bedeutung wie in (9.) haben,

$$(x-x_{m-1})W_0^{(i)} + V_0^{(i)} = X_1^{(i)},$$
$$(x-x_m)X_1^{(i)} + V_1^{(i)} = X_2^{(i)},$$
u. s. w.

Wenn man die Gröfsen der ersten Verticalreihe in (22.) sämmtlich mit $x - x_{m-1}$ multiplicirt, so wird der Werth der ganzen Determinante mit derselben Gröfse multiplicirt und daher $= -\frac{N(x)}{\varphi_1(x)}$. Addirt man nach der Multiplication zu den

Gröfsen der ersten Verticalreihe respective die unveränderten Gröfsen der zweiten Verticalreihe, so wird die erste Verticalreihe

$$T_0', \quad X_1^{(0)}, \quad X_1', \quad \ldots \ldots \quad X_1^{(m-1)},$$

während sich der Werth der Determinante $-\frac{N(x)}{\varphi_1(x)}$ nicht ändert. Multiplicirt man die letztern Gröfsen mit $x-x_m$ und addirt dann respective die Gröfsen der dritten Verticalreihe, so wird die erste Verticalreihe

$$T_0'', \quad X_2^{(0)}, \quad X_2', \quad \ldots \ldots \quad X_2^{(m-1)},$$

während die Determinante $-\frac{N(x)}{\varphi_2(x)}$ wird. Fährt man so fort, so erhält man den Satz, *dafs* $-\frac{N(x)}{\varphi_m(x)}$ *gleich ist der Determinante der Gröfsen*

$$23. \quad \begin{vmatrix} T_0^{(m)} & S_0^{(0)} & S_0' & \ldots & S_0^{(m-1)} \\ X_m^{(0)} & V_0^{(0)} & V_1^{(0)} & \ldots & V_{m-1}^{(0)} \\ X_m' & V_0' & V_1' & \ldots & V_{m-1}' \\ X_m'' & V_0'' & V_1'' & \ldots & V_{m-1}'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_m^{(m-1)} & V_0^{(m-1)} & V_1^{(m-1)} & \ldots & V_{m-1}^{(m-1)} \end{vmatrix}.$$

Transformirt man die m letzten Verticalreihen in (20.) auf dieselbe Art, wie in §. 1. die Gröfsen (8.) in (9.) transformirt wurden, *so erhält man* $-\frac{N(x)}{\varphi(x)}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$24. \quad \begin{vmatrix} T_0 & T_0' & T_0'' & \ldots & T_0^{(m)} \\ X_0^{(0)} & X_1^{(0)} & X_2^{(0)} & \ldots & X_m^{(0)} \\ X_0' & X_1' & X_2' & \ldots & X_m' \\ X_0'' & X_1'' & X_2'' & \ldots & X_m'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_0^{(m-1)} & X_1^{(m-1)} & X_2^{(m-1)} & \ldots & X_m^{(m-1)} \end{vmatrix},$$

wo nur die erste Horizontalreihe die Variable x enthält.

Setzt man für $\varphi(x)=f(x)$ die vollständige Function $(n+m)$ten Grades und

$$R_p = \Sigma \frac{x_r^p u_r}{(x_r-x) f'(x_r)},$$

so verwandeln sich in der ersten Horizontalreihe von (19.) die Gröfsen T_p in die Gröfsen R_p. Man hat zwischen diesen und den Gröfsen

$$v_p = \Sigma \frac{x_r^p u_r}{f'(x_r)},$$

welche die übrigen Horizontalreihen in (19.) bilden, die Gleichungen

$$x\boldsymbol{R}_p + \boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{R}_{p+1}.$$

Wenn man daher in (19.) für die Gröfsen $\boldsymbol{T}_p$ in der ersten Horizontalreihe die Gröfsen $\boldsymbol{R}_p$ setzt und dann zu der zweiten Horizontalreihe die erste, mit x multiplicirt, addirt, so verwandelt sich die zweite Horizontalreihe in $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots . \boldsymbol{R}_{m+1}$; addirt man diese, mit x multiplicirt, zur dritten Horizontalreihe, so verwandelt sich die dritte Horizontalreihe in $\boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_3, \ldots . \boldsymbol{R}_{m+2}$. Fährt man auf diese Weise fort, wobei der Werth der Determinante nicht geändert wird, und wählt für den Nenner $\boldsymbol{D}(x)$ die Bestimmung durch die Determinante der Gröfsen (4.), so erhält man folgenden Satz.

Theorem I.

„*Es sei*

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_{m+n-1}),$$

$$\boldsymbol{R}_p = \frac{x_0^p u_0}{(x_0-x)f'(x_0)} + \frac{x_1^p u_1}{(x_1-x)f'(x_1)} \ldots . + \frac{x_{m+n-1}^p u_{m+n-1}}{(x_{m+n-1}-x)f'(x_{m+n-1})},$$

$$w_p = \frac{x_0^p (x_0-x) u_0}{f'(x_0)} + \frac{x_1^p (x_1-x) u_1}{f'(x_1)} \ldots . + \frac{x_{m+n-1}^p (x_{m+n-1}-x) u_{m+n-1}}{f'(x_{m+n-1})},$$

so wird

$$25. \quad -\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{N(x)}{\boldsymbol{D}(x)} = \frac{\Sigma \pm \boldsymbol{R}_0^{(0)} \boldsymbol{R}_1' \ldots . \boldsymbol{R}_m^{(m)}}{\Sigma \pm w_0^{(0)} w_1' \ldots . w_{m-1}^{(m-1)}},$$

wenn man nach Bildung der beiden Determinanten in jedem ihrer Terme respective $\boldsymbol{R}_{\alpha+\beta}$ und $w_{\alpha+\beta}$ für $\boldsymbol{R}_\alpha^{(\beta)}$ und $w_\alpha^{(\beta)}$ setzt."

Aus dem Ausdrucke, welchen in der *Lagrangeschen* Interpolationsformel der Coëfficient der höchsten Potenz der Variable erhält, bildet man nach einer einfachen Regel die gesuchte Function selbst. Sind nämlich $x_0, x_1, \ldots . x_p$ die Werthe von x, für welche eine ganze Function $p$ten Grades die Werthe $u_0, u_1, \ldots . u_p$ annehmen soll, und ist $F(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_p)$, so wird der Coëfficient von x^p in der gesuchten Function,

$$\frac{u_0}{F'(x_0)} + \frac{u_1}{F'(x_1)} \ldots . + \frac{u_p}{F'(x_p)},$$

und man erhält aus diesem Ausdrucke die gesuchte Function selbst, wenn man darin für $u_0, u_1, \ldots . u_p$ respective $\frac{u_0}{x-x_0}, \frac{u_1}{x-x_1}, \ldots . \frac{u_p}{x-x_p}$ setzt und mit $F(x)$ multiplicirt. Ganz dieselbe Regel gilt, wie man aus dem Theorem I. sieht, bei der Darstellung gegebner Werthe durch eine gebrochne

rationale Function für die Bildung des Zählers. Aber auch für den Nenner $D(x)$ gilt eine ähnliche noch einfachere Bildungsweise, indem man nur nöthig hat, um diese Function zu erhalten, in dem algebraischen Ausdrucke des Coëfficienten ihres höchsten, mit x^m multiplicirten, Terms statt u_0, u_1 etc. respective $u_0(x-x_0)$, $u_1(x-x_1)$ etc. zu setzen. Man hat daher folgendes Theorem.

Theorem II.

„Wenn man eine rationale gebrochne Function von x, deren Nenner auf den m^{ten} Grad steigt, durch die Werthe u_0, u_1, u_2 etc. bestimmt, welche dieselbe für die Werthe x_0, x_1, x_2 etc. der Variable x annimmt, so werden die algebraischen Ausdrücke der Coëfficienten der höchsten Potenz von x im Zähler und Nenner ganze homogene Functionen von u_0, u_1, u_2 etc. vom $(m+1)^{ten}$ und m^{ten} Grade, und man erhält aus ihnen den Zähler und Nenner selbst, wenn man respective für u_0, u_1, u_2 etc. in dem einen Ausdrucke die Gröfsen

$$\frac{u_0}{x-x_0}, \quad \frac{u_1}{x-x_1}, \quad \frac{u_2}{x-x_2} \quad \text{etc.}$$

und in dem andern Ausdrucke die Gröfsen

$$u_0(x-x_0), \quad u_1(x-x_1), \quad u_2(x-x_2) \quad \text{etc.}$$

setzt, und hierauf den ersten Ausdruck noch mit dem Product sämmtlicher Factoren $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ etc. multiplicirt.“

Das Theorem I. zeigt auch noch, dafs die Coëfficienten der höchsten Potenz der Variable im Zähler und im Nenner beide einem ähnlichen Bildungsgesetz unterworfen sind, in der Art, dafs dieser Coëfficient im Zähler so gebildet wird, wie der Coëfficient der höchsten Potenz von x in einem Nenner, welcher auf den $(m+1)$ten Grad steigt. Man erkennt dies, so wie das Theorem II., auch mit grofser Leichtigkeit aus der von *Cauchy* gegebnen Formel.

Auf dieselbe Art wie §. 1. die Gröfsen w in die Gröfsen V transformirt wurden, kann man auch die Gröfsen R transformiren. Setzt man wieder

$$f_{i,k}(x) = (x-x_i)(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{m-2}) \times (x-x_{m-1+k})(x-x_{m+k})\ldots(x-x_{m+n-1}),$$

ferner

$$Q_k^{(i)} = \Sigma \frac{(x_r-x)u_r}{f'_{i,k}(x_r)},$$

wo man die Summation nur auf diejenigen Indices r ausdehnt, für welche

$f_{i,k}(x_r) = 0$ wird, *so erhält man*

$$26. \quad -\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\Sigma \pm Q_0^{(0)} Q_1' \ldots . Q_m^{(m)}}{\Sigma \pm V_0^{(0)} V_1' \ldots . V_{m-1}^{(m-1)}}.$$

Man kann in den Ausdrücken der Gröfsen R und w oder der Gröfsen Q und V überall $x - x_r$ für $x_r - x$ setzen, wenn man gleichzeitig in den Formeln (25.) und (26.) das Minuszeichen links vom Gleichheitszeichen fortläfst, da für jene Änderungen der Bruch den entgegengesetzten Werth annimmt.

4.

Man kann aus dem Theorem I. die von *Cauchy* angegebne Form des Bruchs u auf folgende Weise ableiten. Setzt man

$$q_r = \frac{u_r(x_r - x)}{f'(x_r)} = \frac{u_r(x_r - x)}{(x_r - x_0)(x_r - x_1) \ldots . (x_r - x_{m+n-1})},$$

wo im Nenner der Factor $x_r - x_r$ fortzulassen ist, so wird

$$w_p = q_0 x_0^p + q_1 x_1^p \ldots . + q_{m+n-1} x_{m+n-1}^p.$$

Führt man statt $w_{\alpha+\beta}$ den allgemeineren Ausdruck

$$w_\alpha^{(\beta)} = q_0 x_0^\alpha y_0^\beta + q_1 x_1^\alpha y_1^\beta \ldots . + q_{m+n-1} x_{m+n-1}^\alpha y_{m+n-1}^\beta$$

ein, so wird zufolge des Theorems I.

$$D(x) = \Sigma \pm w_0^{(0)} w_1' \ldots . w_{m-1}^{(m-1)},$$

wenn man nach Bildung der Determinante überall $y_r = x_r$ setzt. Aber zufolge eines von *Cauchy* und auch von mir später bewiesenen Satzes (s. *Crelle* Journal Bd. 22. S. 308 folg.) wird die vorstehende Determinante gleich der Summe aller Gröfsen, welche sich bilden lassen, wenn man in dem Producte

$$q_0 q_1 \ldots . q_{m-1} \Sigma \pm x_0^0 x_1^1 \ldots . x_{m-1}^{m-1} \Sigma \pm y_0^0 y_1^1 \ldots . y_{m-1}^{m-1}$$

für die untern Indices auf alle mögliche Arten je m verschiedne Indices aus der Zahl der Indices $0, 1, 2, \ldots . m+n-1$ setzt. Man hat aber ferner für jede solche Combination nach einer bekannten, zuerst von *Vandermonde* bemerkten Formel

$$\Sigma \pm x_0^0 x_1^1 \ldots . x_{m-1}^{(m-1)} =$$
$$(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \ldots . (x_{m-1} - x_0)(x_{m-1} - x_1) \ldots . (x_{m-1} - x_{m-2}),$$

und es wird daher, wenn man $y_r = x_r$ setzt, in $D(x)$ jeder mit $q_0 q_1 \ldots . q_{m-1}$ multiplicirte Term

$$q_0 q_1 \ldots . q_{m-1} \{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \ldots . (x_{m-1} - x_0)(x_{m-1} - x_1) \ldots . (x_{m-1} - x_{m-2})\}^2$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} u_0 u_1 \ldots . u_{m-1} (x_0 - x)(x_1 - x) \ldots . (x_{m-1} - x)}{(x_0 - x_m)(x_0 - x_{m+1}) \ldots . (x_0 - x_{m+n-1})(x_1 - x_m)(x_1 - x_{m+1}) \ldots . (x_1 - x_{m+n-1}) \ldots . (x_{m-1} - x_m)(x_{m-1} - x_{m+1}) \ldots . (x_{m-1} - x_{m+n-1})}.$$

Der Complexus dieser Terme ist der Nenner der *Cauchyschen* Formel, mit $(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ multiplicirt. Ganz auf dieselbe Art wird aus dem im Theorem I. gegebnen Zähler der gebrochnen Function der Zähler der *Cauchyschen* Formel gefunden.

Man findet auch auf einmal den Zähler und Nenner der *Cauchyschen* Formel durch folgende Betrachtung. Es sei

$$D = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \ldots + \alpha_m x^m, \quad N = a + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

so hat man $n+m+1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
D\{a + x\ a_1 \ldots\ldots + x^{n-1} a_{n-1}\} &= N\{\alpha + x\ \alpha_1 \ldots\ldots + x^m \alpha_m\},\\
a + x_0 a_1 \ldots\ldots + x_0^{n-1} a_{n-1} &= u_0\{\alpha + x_0 \alpha_1 \ldots\ldots + x_0^m \alpha_m\},\\
a + x_1 a_1 \ldots\ldots + x_1^{n-1} a_{n-1} &= u_1\{\alpha + x_1 \alpha_1 \ldots\ldots + x_1^m \alpha_m\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a + x_{m+n-1} a_1 \ldots + x_{n+m-1}^{n-1} a_{n-1} &= u_{n+m-1}\{\alpha + x_{n+m-1}\alpha_1 \ldots + x_{n+m-1}^m \alpha_m\},
\end{aligned}$$

aus welchen man die $n+m+1$ Unbekannten a, a_1 etc., α, α_1 etc. eliminiren kann, und dann eine Bedingungsgleichung $\nabla = 0$ erhält, in welcher ∇ die aus den $n+m+1$ Horizontal- und Verticalreihen der Coëfficienten der Unbekannten gebildete Determinante ist. Nach einer von *Laplace* gemachten Bemerkung kann jede Determinante als ein Aggregat von Producten einfacherer Determinanten dargestellt werden, wenn man die Verticalreihen in zwei Gruppen theilt und auf alle mögliche Arten immer zwei partielle Determinanten der beiden Gruppen, welche sich auf verschiedne Horizontalreihen beziehen, mit einander multiplicirt. Bei der Determinante ∇ sondern sich die Verticalreihen von selbst in die beiden Gruppen der n ersten und $m+1$ letzten Verticalreihen. Sondert man ferner die Terme von ∇, je nachdem sie mit D oder N multiplicirt sind, in zwei verschiedne Aggregate, so erhält man die Bedingungsgleichung in folgender Form:

$$0 = \nabla =$$
$$D \cdot S(\Sigma \pm x^0 x_0^1 x_1^2 \ldots x_{n-2}^{n-1} \times u_{n-1} u_n \ldots u_{n+m-1} \Sigma \pm x_{n-1}^0 x_n^1 \ldots x_{n+m-1}^m)$$
$$+ N \cdot S(\Sigma \pm x_0^0 x_1^1 x_2^2 \ldots x_{n-1}^{n-1} \times u_n\ u_{n+1} \ldots u_{n+m-1} \Sigma \pm x^0\ x_n^1 \ldots x_{n+m-1}^m).$$

Man wird hier die einzelnen Terme jeder mit Σ bezeichneten Determinante durch Vertauschung der Exponenten erhalten, und dann die beiden Summen S bilden, indem man für die Indices $0, 1, \ldots n-2$ oder $0, 1, \ldots n-1$ je $n-1$ oder n aus den Indices $0, 1, 2, \ldots n+m-1$ und für die Indices $n-1, n, \ldots n+m-1$ oder $n, n+1, \ldots n+m-1$ die $m+1$ oder m übrigen nimmt. Bezeichnet man mit $P(a, b, c, \ldots)$ das Product aus den Differenzen der Gröfsen $a, b, c, \ldots$, so wird die gefundne Gleichung, wenn

man nach der oben angeführten Formel die Determinanten durch die Producte der Differenzen ersetzt,

$$0 = D \cdot S(u_{n-1} u_n \ldots u_{n+m-1} P(x, x_0, x_1, \ldots x_{n-2}) P(x_{n-1}, x_n, \ldots x_{n+m-1}))$$
$$+ N \cdot S(u_n u_{n+1} \ldots u_{n+m-1} P(x_0, x_1, \ldots x_{n-1}) P(x, x_n, x_{n+1}, \ldots x_{n+m-1})).$$

Die verschiednen Zeichen, mit welchen die Producte P genommen werden können, müssen nach der Natur der Determinante ∇ so bestimmt werden dafs, wenn man die Gröfsen D und N und die Gröfsen $u_0, u_1, \ldots u_{n+m-1}$ einander gleich setzt und zwei beliebige von den $m+n+1$ Gröfsen $x, x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1}$ mit einander vertauscht, der ganze Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen den entgegengesetzten Werth annimmt. Wenn man daher diesen Ausdruck mit dem Product $P(x, x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1})$ dividirt, so mufs derselbe in Bezug auf die $m+n+1$ Gröfsen symmetrisch werden, und es werden umgekehrt, wenn dieser Quotient in Bezug auf alle Gröfsen $x, x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1}$ symmetrisch wird, alle Zeichen so, wie es die Bedingungen der Determinantenbildung fordern, bestimmt sein. Bezeichnet man mit

$$\{(A, B, C, \ldots)(A', B', C', \ldots)\}$$

das Product aus allen Differenzen der Gröfsen $A, B, C \ldots$ von den Gröfsen $A', B', C' \ldots$, indem man immer die zweiten von den ersten abzieht,

$$\{(A, B, C, \ldots)(A', B', C', \ldots)\}$$
$$= (A-A')(A-B')(A-C') \ldots (B-A')(B-B') \ldots (C-A') \ldots,$$

so erhält man auf die angegebne Art die Gleichung

$$0 = DS \cdot \frac{u_{n-1} u_n \ldots u_{n+m-1}}{\{(x, x_0, x_1, \ldots x_{n-2})(x_{n-1}, x_n, \ldots x_{n+m-1})\}}$$
$$+ NS \cdot \frac{u_n u_{n+1} \ldots u_{n+m-1}}{\{(x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1})(x_n, x_{n+1}, \ldots x_{n+m-1}, x)\}},$$

wo der Ausdruck rechts, wie verlangt wurde, wenn $D = N$ und $u_0 = u_1 \ldots = u_{n+m-1}$, in Bezug auf alle Gröfsen $x, x_0, x_1, \ldots x_{n+m-1}$ symmetrisch ist, wenngleich sich das Summenzeichen nur auf die $m+n$ Gröfsen $x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1}$ bezieht. Entnimmt man aus dieser Gleichung den Werth von $\frac{N}{D}$ und multiplicirt Zähler und Nenner mit $(x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_{m+n-1})$, so erhält man die *Cauchysche* Formel.

5.

Die im Theorem I. dem Zähler und Nenner der gebrochnen Function gegebne Form kann mit besonderm Vortheil in dem Fall angewandt werden, wenn alle oder mehrere der Gröfsen $x_0, x_1, \ldots x_{m+n-1}$ untereinander gleich

werden. Ist

$$f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_r)F(x)$$

und bedeutet $\Psi(x)$ eine beliebige Function von x, so verwandelt sich bekanntlich, wenn

$$x_0 = x_1 \ldots = x_r = a$$

wird, das Aggregat

$$\frac{\Psi(x_0)}{f'(x_0)} + \frac{\Psi(x_1)}{f'(x_1)} \ldots + \frac{\Psi(x_r)}{f'(x_r)}$$

in den Differentialausdruck

$$\frac{d^r.\Psi(a)\{F(a)\}^{-1}}{\Pi(r).da^r},$$

wo $1.2\ldots.r = \Pi(r)$. Man kann hienach sogleich die Gröfsen angeben, in welche sich in den oben aufgestellten Sätzen die verschiednen Systeme von Elementen, aus denen die Determinanten zu bilden sind, verwandeln, wenn $r+1$ von den Gröfsen x_0, x_1 etc. denselben Werth a erhalten, für welchen dann die entsprechenden Werthe von u und seiner r ersten Differentialquotienten gegeben sein müssen.

Man nehme insbesondre an, dafs *alle* Gröfsen x_0, x_1, x_2, ... x_{n+m-1} derselben Gröfse a gleich seien, und dafs für diesen Werth von x sowohl der Werth des gesuchten Bruchs als auch die Werthe seiner $n+m-1$ ersten Differentialquotienten gegeben seien. Bezeichnet man den gesuchten Bruch mit

$$\chi(x) = u,$$

so werden die verschiednen §. 1. eingeführten Gröfsen,

$$v_p = \frac{d^{m+n-1}.a^p\chi(a)}{\Pi(m+n-1)\cdot da^{m+n-1}},$$

$$w_p = \frac{d^{m+n-1}.a^p(a-x)\chi(a)}{\Pi(m+n-1)\cdot da^{m+n-1}},$$

$$U_p^{(i)} = \frac{d^{m+n-i-1}.a^p(a-x)\chi(a)}{\Pi(m+n-i-1)\cdot da^{m+n-i-1}},$$

$$V_k^{(i)} = \frac{d^{m+n-i-k-1}.(a-x)\chi(a)}{\Pi(m+n-i-k-1)\cdot da^{m+n-i-k-1}},$$

$$W_p^{(i)} = \frac{d^{m+n-i-1}.a^p\chi(a)}{\Pi(m+n-i-1)\cdot da^{m+n-i-1}},$$

$$X_k^{(i)} = \frac{d^{m+n-i-k-1}\chi(a)}{\Pi(m+n-i-k-1)\cdot da^{m+n-i-k-1}}.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man aus §. 1. für den Fall, dafs die $m+n$ Werthe x_0, x_1 etc. einander gleich sind, *sechs* verschiedne Darstellungen des Nenners $D(x)$ durch eine Determinante.

Die §. 3. eingeführten Gröfsen werden, wenn man dort $\varphi(x)$ vom $n$ten Grade annimmt,

$$\varphi(x) = (x-a)^n, \qquad \varphi_k(x) = (x-a)^{n-k},$$

$$S_0^{(k)} = \frac{d^{n-k-1}\cdot\chi(a)}{\Pi(n-k-1)\cdot da^{n-k-1}},$$

$$T_0^{(k)} = \frac{d^{n-k-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-k-1)\cdot da^{n-k-1}},$$

$$R_p = \frac{d^{n+m}\cdot a^p(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n+m)\cdot da^{n+m}},$$

$$Q_k^{(i)} = \frac{d^{n+m-i-k-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n+m-i-k-1)\cdot da^{n+m-i-k-1}}.$$

Substituirt man diese Werthe in (19.) — (25.), so erhält man den Zähler $N(x)$ auf ***sieben*** verschiedne Arten durch eine Determinante ausgedrückt.

Es wird zweckmäfsig sein, bei Anordnung der Gröfsen, aus welchen man die Determinanten zu bilden hat, von den niedrigsten Differentialen zu beginnen, weshalb man in den betreffenden Schemas von dem entgegengesetzten Ende der Diagonale ausgehn mufs. Ich werde zugleich der Kürze halber durch χ_0 und χ_p die Ausdrücke

$$\chi(a) = \chi_0, \qquad \frac{d^p\chi(a)}{\Pi(p)\cdot da^p} = \chi_p$$

bezeichnen.

Setzt man hiernach

$$D_0 = V_{m-1}^{(m-1)} = \frac{d^{n-m+1}\cdot(a-x)\chi(a)}{\Pi(n-m+1)\cdot da^{n-m+1}} = (a-x)\chi_{n-m+1} + \chi_{n-m};$$

$$D_i = \frac{d^{n-m+i+1}\cdot(a-x)\chi(a)}{\Pi(n-m+i+1)\cdot da^{n-m+i+1}} = (a-x)\chi_{n-m+i+1} + \chi_{n-m+i};$$

so ergiebt die Darstellung von $D(x)$ durch die Gröfsen (6.),

$$27. \qquad D(x) = \Sigma \pm D_0^{(0)} D_1' D_2'' \ldots D_{m-1}^{(m-1)},$$

wenn man nach Bildung der Determinante überall $D_{\alpha+\beta}$ für $D_\alpha^{(\beta)}$ schreibt.

Braucht man das Schema (9.), ***so erhält man $D(x)$ gleich der Determinante der Gröfsen***

$$28. \quad \begin{cases} \chi_{n-m} & \chi_{n-m+1} & \ldots & \chi_{n-1} & \chi_n \\ \chi_{n-m+1} & \chi_{n-m+2} & \ldots & \chi_n & \chi_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \chi_{n-1} & \chi_n & \ldots & \chi_{m+n-2} & \chi_{m+n-1} \\ (x-a)^m & (x-a)^{m-1} & \ldots & x-a & 1. \end{cases}$$

Wählt man zur Bestimmung des Zählers die Gröfsen (22.), (23.) oder (24.), *so wird für den Fall der Gleichheit aller* x_i *der Ausdruck* $-\frac{N(x)}{(x-a)^n}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$29.\quad \begin{cases} D_0 & D_1 & \cdots & D_{m-1} & \chi_n \\ D_1 & D_2 & \cdots & D_m & \chi_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{m-1} & D_m & \cdots & D_{2m-2} & \chi_{n+m-1} \\ \chi_{n-m} & \chi_{n-m+1} & \cdots & \chi_{n-1} & \frac{d^{n-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-1)\cdot da^{n-1}} \end{cases};$$

oder $-\frac{N(x)}{(x-a)^{n-m}}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$30.\quad \begin{cases} D_0 & D_1 & \cdots & D_{m-1} & \chi_{n-m} \\ D_1 & D_2 & \cdots & D_m & \chi_{n-m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{m-1} & D_m & \cdots & D_{2m-2} & \chi_{n-1} \\ \chi_{n-m} & \chi_{n-m+1} & \cdots & \chi_{n-1} & \frac{d^{n-m-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-m-1)\cdot da^{n-m-1}} \end{cases};$$

oder wieder $-\frac{N(a)}{(x-a)^n}$ *gleich der Determinante der Gröfsen*

$$31.\quad \begin{cases} \chi_{n-m} & \chi_{n-m+1} & \cdots & \chi_n \\ \chi_{n-m+1} & \chi_{n-m+2} & \cdots & \chi_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \chi_{n-1} & \chi_n & \cdots & \chi_{n+m-1} \\ \frac{d^{n-m-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-m-1)\cdot da^{n-m-1}} & \frac{d^{n-m}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-m)\cdot da^{n-m}} & \cdots & \frac{d^{n-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-1)\cdot da^{n-1}} \end{cases}.$$

Endlich erhält man aus (26.)

$$32.\quad -\frac{1}{(x-a)^{n+m}}\cdot\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\Sigma\pm N_0^{(0)} N_1' \cdots N_m^{(m)}}{\Sigma\pm D_0^{(0)} D_1' \cdots D_{m-1}^{(m-1)}},$$

wenn man nach Bildung der beiden Determinanten überall $N_{\alpha+\beta}$ *und* $D_{\alpha+\beta}$ *für* $N_\alpha^{(\beta)}$ *und* $D_\alpha^{(\beta)}$ *schreibt und*

$$-N_i = \frac{d^{n-m+i-1}\cdot(x-a)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-m+i-1)\cdot da^{n-m+i-1}}$$

$$= \frac{1}{(x-a)^{n-m+i}}\{\chi_0 + \chi_1(x-a) + \chi_2(x-a)^2 \cdots + \chi_{n-m+i-1}(x-a)^{n-m+i-1}\},$$

$$-D_i = \frac{d^{n-m+i+1}\cdot(x-a)\chi(a)}{\Pi(n-m+i+1)\cdot da^{n-m+i+1}} = (x-a)\chi_{n-m+i+1} - \chi_{n-m+i}$$

setzt. Man kann in diesen Formeln gleichzeitig N, N_i, D_i für $-N$, $-N_i$, $-D_i$ schreiben.

In der aus den Gröfsen (30.) gebildeten Determinante ist das Aggregat der Terme, welche mit $\frac{d^{n-1}\cdot(a-x)^{-1}\chi(a)}{\Pi(n-1)\cdot da^{n-1}}$ multiplicirt werden, dem Nenner $D(x)$ gleich. Dieser Theil der Determinante ist der einzige, welcher entwickelt negative Potenzen von $x-a$ darbietet. Da nun aber der Bruch $-\frac{N(x)}{(x-a)^n}$, welchem die Determinante gleich ist, *nur* negative Potenzen von $x-a$ enthält, wenn man den Zähler $N(x)$ nach Potenzen von $x-a$ entwickelt, so wird man aus diesem Theile den Werth der ganzen Determinante oder den Bruch $-\frac{N(x)}{(x-a)^n}$ selbst erhalten, wenn man nach geschehner Entwicklung alle positiven Potenzen von $x-a$ fortwirft. Multiplicirt man mit $(x-a)^n$, so folgt hieraus, ***dafs man den Zähler $N(x)$ erhält, wenn man den Nenner $D(x)$ nach den Potenzen von $x-a$ entwickelt, ihn mit***

$$(x-a)^n\frac{d^{n-1}\cdot(x-a)^{-1}\chi(a)}{1.2....(n-1)\cdot da^{n-1}} = \chi_0+\chi_1(x-a)+\chi_2(x-a)^2....+\chi_{n-1}(x-a)^{n-1}$$

multiplicirt und nur diejenigen Potenzen von $x-a$ beibehält, welche die $(n-1)$te nicht übersteigen.

6.

Man findet die im Vorigen aus den allgemeinen Formeln abgeleiteten Resultate auch unmittelbar durch folgende Betrachtungen.

Entwickelt man eine Function $\chi(x)$ nach den aufsteigenden Potenzen von $x-a$, so erhält man nach dem ***Taylorschen*** Satz, wenn man die im vorigen Paragraph angewandte Bezeichnung benutzt,

$$\chi(x) = \chi_0+\chi_1(x-a)+\chi_2(x-a)^2....+\chi_{n+m-1}(x-a)^{n+m-1}+\text{ etc.}$$

Ist $\chi(x)=\frac{N(x)}{D(x)}$, wo $N(x)$ und $D(x)$ ganze Functionen von x respective vom $(n-1)$ten und $m$ten Grade sind, und setzt man

$$D(x) = \beta+\beta_1(x-a)+\beta_2(x-a)^2....+\beta_m(x-a)^m,$$

so wird das Product dieses Ausdrucks mit der vorstehenden Entwicklung von $\chi(x)$ der Zähler $N(x)$. Es müssen daher alle die $(n-1)$te übersteigenden Potenzen von $x-a$ verschwinden, welches der zu Ende des vorigen Paragraphs gefundne Satz ist. Man erhält auf diese Weise die folgenden Gleichungen:

$$33.\quad \begin{cases} 0 = \beta_m \chi_{n-m} + \beta_{m-1}\chi_{n-m+1} \cdots + \beta\chi_n, \\ 0 = \beta_m \chi_{n-m+1} + \beta_{m-1}\chi_{n-m+2} \cdots + \beta\chi_{n+1}, \\ 0 = \beta_m \chi_{n-m+2} + \beta_{m-1}\chi_{n-m+3} \cdots + \beta\chi_{n+2} \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Aus m von diesen Gleichungen findet man die Werthe, welche den $m+1$ Coëfficienten β, β_1, ... β_m proportional sind, und wenn man dieselben in den für $D(x)$ angenommnen Ausdruck substituirt, so ergiebt sich für $D(x)$ die aus den Gröfsen (28.) gebildete Determinante.

Man kann noch bemerken, ***dafs man, wenn man die*** $m+1$ ***Gröfsen*** β, β_1 ***etc. aus beliebigen*** $m+1$ ***von den Gleichungen*** (33.) ***eliminirt, Bedingungen zwischen den Differentialen der Function*** $\chi(x)$ ***erhält, die Statt finden müssen, so oft*** $\chi(x)$ ***ein rationaler Bruch ist, dessen Zähler und Nenner respective auf den*** $(n-1)^{ten}$ ***und*** m^{ten} ***Grad steigen.*** Nimmt man die $m+1$ ersten von den Gleichungen (33.), so wird die Bedingung

$$34.\quad \Sigma \pm \vartheta_0^{(0)} \vartheta_1' \vartheta_2'' \ldots . \vartheta_m^{(m)} = 0,$$

wenn man nach Bildung der Determinante $\vartheta_a^{(\beta)} = \chi_{n-m+a+\beta}$ setzt. Da a eine ganz allgemeine Gröfse ist, so kann man in den Functionen χ_i auch x für a setzen.

Es werde $N(x)$, nach den Potenzen von $x-a$ entwickelt,

$$N(x) = \gamma + \gamma_1(x-a) + \gamma_2(x-a)^2 \ldots . + \gamma_{n-1}(x-a)^{n-1}.$$

Diesen Ausdruck mufs man nach dem Vorigen erhalten, wenn man die Entwicklung von $\chi(x)$ mit dem Nenner $D(x) = \beta + \beta_1(x-a) + \beta_2(x-a)^2 \ldots . + \beta_m(x-a)^m$ multiplicirt. Man braucht hiebei nur die n ersten Terme der Entwicklung von $\chi(x)$ beizubehalten, weil aus den folgenden nur höhere Potenzen von $x-a$ als die $(n-1)$te hervorgehn, ***so dafs*** $N(x)$ ***gleich wird dem Producte***

$$\{\beta + \beta_1(x-a) + \beta_2(x-a)^2 \ldots . + \beta_m(x-a)^m\}$$
$$\times \{\chi_0 + \chi_1 \cdot (x-a) + \chi_2 \cdot (x-a)^2 \ldots . + \chi_{n-1} \cdot (x-a)^{n-1}\},$$

wenn man nach geschehner Multiplication die Potenzen von $x-a$, ***welche die*** $(n-1)$***te übersteigen, fortwirft.*** Man erhält auf diese Weise

$$\frac{N(x)}{(x-a)^n} = \beta_m \frac{d^{n-m-1} \cdot (x-a)^{-1} \chi(a)}{\Pi(n-m-1)\, da^{n-m-1}} + \beta_{m-1} \frac{d^{n-m} \cdot (x-a)^{-1} \chi(a)}{\Pi(n-m)\, da^{n-m}} \ldots .$$
$$+ \beta \cdot \frac{d^{n-1} \cdot (x-a)^{-1} \chi(a)}{\Pi(n-1)\, da^{n-1}}.$$

Substituirt man in diese Formel die Gröfsen, denen zufolge (33.) die Coëffi-

cienten β_m, β_{m-1}, ... β proportional sind, so erhält man die im vorigen Paragraph für $\frac{N(x)}{(x-a)^n}$ gefundne, aus den Gröfsen (31.) gebildete Determinante.

Man kann die Functionen $D(x)$ und $N(x)$ für den hier betrachteten Fall auf ähnliche Art wie in §. 2. durch Gleichungen von verschiedner Form bestimmen. Es ist nämlich

$$35. \quad \frac{d^r \cdot x^p \chi(x) D(x)}{dx^r} = 0,$$

wenn $r \geqq n+p$, da $x^p D(x) \chi(x) = x^p N(x)$ eine ganze Function von x vom $(n+p-1)$ten Grade ist. Man hat daher, wenn man mit $\Pi(r)$ dividirt und nach geschehner Differentiation den Werth $x = a$ substituirt, ferner

$$\chi_i^{(p)} = \frac{d^i \cdot a^p \chi(a)}{\Pi(i) \cdot da^i}$$

setzt, die allgemeine Gleichung,

$$36. \quad \chi_r^{(p)} \cdot D(a) + \chi_{r-1}^{(p)} \cdot \frac{d \cdot D(a)}{da} + \chi_{r-2}^{(p)} \cdot \frac{d^2 \cdot D(a)}{\Pi 2 \cdot da^2} \cdots + \chi_{r-m}^{(p)} \cdot \frac{d^m \cdot D(a)}{\Pi(m) \cdot da^m} = 0,$$

oder auch, wenn $r \geqq n+i+k$,

$$37. \quad \chi_r^{(i)} \cdot a^k D(a) + \chi_{r-1}^{(i)} \cdot \frac{d \cdot a^k D(a)}{da} + \chi_{r-2}^{(i)} \cdot \frac{d \cdot a^k D(a)}{\Pi 2 \cdot da^2} \cdots + \chi_{r-m-k}^{(i)} \cdot \frac{d^{m+k} \cdot a^k D(a)}{\Pi(m+k) \cdot da^{m+k}} = 0.$$

Substituirt man in (35.) für $D(x)$ den Ausdruck $\alpha + \alpha_1 x \ldots + \alpha_m x^m$, so erhält man:

$$38. \quad \alpha \cdot \frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{da^r} + \alpha_1 \cdot \frac{d^r \cdot a^{p+1} \chi(a)}{da^r} + \alpha_2 \cdot \frac{d^r \cdot a^{p+2} \chi(a)}{da^r} \cdots + \alpha_m \cdot \frac{d^r \cdot a^{p+m} \chi(a)}{da^r} = 0.$$

Wenn man in dieser Formel dem Exponenten p die Werthe 0, 1, 2, ... $m-1$ giebt und immer $r \geqq n+p$ und zu gleicher Zeit $r \leqq n+m-1$ annimmt, so werden in den auf diese Art erhaltnen Gleichungen die Coëfficienten von α, α_1 etc. gegebne Gröfsen, da die Differentialquotienten von $\chi(a)$ bis zum $(n+m-1)$ten als gegeben angesehn werden. Wählt man daher aus der Zahl dieser Gleichungen beliebige m von einander unabhängige, so kann man daraus die Verhältnisse von α, α_1 etc. und daher $D(x)$ selber, abgesehn von einem constanten Factor, bestimmen. Man erhält dann $D(x)$ nach den Potenzen von x geordnet. Eben so würde man aus m von einander unabhängigen Gleichungen (36.), wenn in ihnen immer $n+p \leqq r \leqq n+m-1$ angenommen wird, die Verhältnisse von $D(a)$ und seiner m ersten Differentialquotienten finden, und hierdurch die Entwicklung von $D(x)$ nach den Potenzen von $x-a$ erhalten. Solche Systeme von m von einander unabhängigen Gleichungen erhält man zum Beispiel, wenn man $p = 0$ und für r nach und nach n, $n+1$, ... $n+m-1$, oder $r = m+n-1$ und für p nach einander die Werthe 0, 1, 2, ... $m-1$ setzt.

Führt man wie in §. 2. statt der Coëfficienten α, α_1 etc. die Functionen $D_0 = D(x)$, $D_1 = \frac{D-\alpha}{x}$, $D_2 = \frac{D_1-\alpha_1}{x}$ etc. ein, so erhält man aus (13.), indem man $x_i = a$ setzt,

$$39. \quad D(a) = D_0 + (a-x)D_1 + a(a-x)D_2 \ldots + a^{m-1}(a-x)D_m.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (35.), nachdem man darin $x = a$ gesetzt hat, so erhält man die Gleichung

$$40. \quad \frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{da^r} \cdot D_0 + \frac{d^r \cdot a^p (a-x)\chi(a)}{da^r} \cdot D_1 + \frac{d^r \cdot a^{p+1}(a-x)\chi(a)}{da^r} \cdot D_2$$
$$\ldots + \frac{d^r \cdot a^{p+m-1}(a-x)\chi(a)}{da^r} \cdot D_m = 0.$$

Führt man in die Gleichung

$$\frac{d^r \cdot a^p \chi(a) D(a)}{da^r} = 0$$

für $D(a)$ den Ausdruck

$$D(x) + \frac{dD(x)}{dx}(a-x) + \frac{d^2 D(x)}{1\!1 2 \cdot dx^2}(a-x)^2 \ldots + \frac{d^m D(x)}{1\!1 m \cdot dx^m}(a-x)^m = D(a)$$

ein, so erhält man zwischen den Unbekannten $D(x)$, $\frac{dD(x)}{dx}$ etc. folgende lineäre Gleichung

$$41. \quad \frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{da^r} \cdot D(x) + \frac{d^r \cdot a^p (a-x)\chi(a)}{da^r} \cdot \frac{dD(x)}{dx} + \frac{d^r \cdot a^p (a-x)^2 \chi(a)}{da^r} \cdot \frac{d^2 D(x)}{1\!1 2 \cdot dx^2}$$
$$\ldots + \frac{d^r \cdot a^p (a-x)^m \chi(a)}{da^r} \cdot \frac{d^m D(x)}{1\!1 m \cdot dx^m} = 0.$$

Die Gröfsen $D^{(i)}$ und S_i in §. 2. verwandeln sich, wenn die Function $f(x)$ vom $(r+1)$ten Grade angenommen und $x_0 = x_1 = x_2 \ldots = a$ wird, in folgende:

$$D^{(0)} = D(x); \quad D^{(i)} = \frac{D(x)}{(x-a)^p} - \frac{d^{p-1} \cdot \frac{D(a)}{x-a}}{1\!1(p-1)da^{p-1}}$$
$$= \frac{d^i D(a)}{1\!1 i \cdot da^i} + \frac{d^{i+1} D(a)}{1\!1(i+1) \cdot da^{i+1}}(x-a) \ldots + \frac{d^m D(a)}{1\!1 m \cdot da^m}(x-a)^{m-i},$$

$$S = \frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{1\!1 r \cdot da^r}, \quad S_i = \frac{d^{r-i+1} \cdot a^p (a-x)\chi(a)}{1\!1(r-i+1) \cdot da^{r-i+1}}.$$

Substituirt man diese Werthe der Gröfsen S_i, so ergiebt die Formel (17.) §. 2. zwischen den Unbekannten $D^{(0)}, D', D'', \ldots D^{(m)}$ die lineäre Gleichung:

$$42. \quad \frac{d^r \cdot a^p \chi(a)}{\Pi r \cdot da^r} \cdot D^{(0)} + \frac{d^r \cdot a^p (a-x) \chi(a)}{\Pi r \cdot da} \cdot D' + \frac{d^{r-1} \cdot a^p (a-x) \chi(a)}{\Pi (r-1) \cdot da^{r-1}} \cdot D''$$

$$\ldots + \frac{d^{r-m+1} \cdot a^p (a-x) \chi(a)}{\Pi (r-m+1) \cdot da^{r-m+1}} \cdot D^{(m)} = 0.$$

Bildet man m von einander unabhängige Gleichungen (40.), so werden D_0, D_1, $\ldots$ D_m den partiellen Determinanten ihrer Coëfficienten gleich, multiplicirt mit einem gemeinschaftlichen Factor. Eben so erhält man $D(x)$, $\frac{dD(x)}{dx}$, $\ldots$ $\frac{d^m D(x)}{\Pi m \cdot dx^m}$ aus m von einander unabhängigen Gleichungen (41.) und $D^{(0)}, D', \ldots D^{(m)}$ aus m von einander unabhängigen Gleichungen (42.). In allen diesen Gleichungen ist immer

$$n+p \leqq r \leqq n+m-1$$

anzunehmen. Die Gröfse $D_m = D^{(m)}$ ist, wie in §. 2., der Coëfficient der höchsten Potenz von x in $D(x)$ oder $= \frac{d^m D(x)}{\Pi m \cdot dx^m}$.

Im August 1845.

11.

Neue Darstellung der Resultante der Elimination von z aus zwei algebraischen Gleichungen $f(z)=0$ und $\varphi(z)=0$ vermittelst der Werthe welche die Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ für gegebne Werthe von z annehmen.

(Von Dr. *G. Rosenhain*, Privatdocenten in Breslau.)

Bezeichnen $f(z)$ und $\varphi(z)$ zwei ganze rationale Functionen von z vom μten und vom $m$ten Grade, so ist, wenn $\mu+m=n$ gesetzt wird, die gebrochene Function

$$1. \qquad u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

bestimmt, wenn die $n+1$ Werthe $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ bekannt sind, welche u für $n+1$ gegebene Werthe $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ von z annimmt.

Setzt man nämlich

$$2. \quad \begin{aligned} M_{0,1,2,\ldots m} = {} & (\alpha_0-\alpha_{m+1})(\alpha_1-\alpha_{m+1})(\alpha_2-\alpha_{m+1})\ldots(\alpha_m-\alpha_{m+1}) \\ & (\alpha_0-\alpha_{m+2})(\alpha_1-\alpha_{m+2})(\alpha_2-\alpha_{m+2})\ldots(\alpha_m-\alpha_{m+2}) \\ & (\alpha_0-\alpha_{m+3})(\alpha_1-\alpha_{m+3})(\alpha_2-\alpha_{m+3})\ldots(\alpha_m-\alpha_{m+3}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\alpha_0-\alpha_n)\ (\alpha_1-\alpha_n)\ (\alpha_2-\alpha_n)\ \ldots(\alpha_m-\alpha_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{n-m+1,\,n-m+2,\ldots n} = {} & (\alpha_{n-m+1}-\alpha_0)(\alpha_{n-m+1}-\alpha_1)(\alpha_{n-m+1}-\alpha_2)\ldots(\alpha_{n-m+1}-\alpha_{n-m}) \\ & (\alpha_{n-m+2}-\alpha_0)(\alpha_{n-m+2}-\alpha_1)(\alpha_{n-m+2}-\alpha_2)\ldots(\alpha_{n-m+2}-\alpha_{n-m}) \\ & (\alpha_{n-m+3}-\alpha_0)(\alpha_{n-m+3}-\alpha_1)(\alpha_{n-m+3}-\alpha_2)\ldots(\alpha_{n-m+3}-\alpha_{n-m}) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\alpha_n-\alpha_0)\quad(\alpha_n-\alpha_1)\quad(\alpha_n-\alpha_2)\ldots\quad(\alpha_n-\alpha_{n-m}) \\ = {} & (-1)^{m(n-m+1)} M_{0,1,2,\ldots n-m}, \end{aligned}$$

so wird nach einer von *Cauchy* gegebenen Formel

$$3. \quad u = \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{\Sigma \dfrac{u_0 u_1 u_2 \ldots u_m}{M_{0,1,2,\ldots m}} (z-\alpha_{m+1})(z-\alpha_{m+2})\ldots(z-\alpha_n)}{\Sigma \dfrac{u_{n-m+1} u_{n-m+2} \ldots u_n}{M_{n-m+1,\,n-m+2,\ldots n}} (\alpha_{n-m+1}-z)(\alpha_{n-m+2}-z)\ldots(\alpha_n-z)} = \frac{N}{D},$$

wo N und D den Zähler und Nenner der vorstehenden Formel bedeuten sollen.

Das Summenzeichen Σ bezieht sich auf alle Terme, welche erhalten werden, wenn man im Zähler für $0, 1, 2, \ldots m$, im Nenner für $n-m+1, n-m+2, \ldots n$ respective je $m+1$ und je m verschiedne von den $n+1$ Indices $0, 1, 2, \ldots n$ setzt.

Wenn man in N und D statt u_k seinen Werth $\frac{f(\alpha_k)}{\varphi(\alpha_k)}$ substituirt, so erhält man

$$4.\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\varphi(\alpha_0)\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n)}{(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)}N = \\ \Sigma\dfrac{f(\alpha_0)f(\alpha_1)\ldots f(\alpha_m)\varphi(\alpha_{m+1})\varphi(\alpha_{m+2})\ldots\varphi(\alpha_n)}{M_{0,1,2,\ldots m}(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_m)} \\ = \dfrac{Af(z)}{(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_n)}, \\ \dfrac{\varphi(\alpha_0)\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n)}{(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)}D = \\ (-1)^m\Sigma\dfrac{\varphi(\alpha_0)\varphi(\alpha_1)\ldots\varphi(\alpha_{n-m})f(\alpha_{n-m+1})f(\alpha_{n-m+2})\ldots f(\alpha_n)}{M_{n-m+1,n-m+2,\ldots n}(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_{n-m})} \\ = \dfrac{A\varphi(z)}{(z-\alpha_0)(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_n)}, \end{array}\right.$$

wo A einen constanten Factor bedeutet. Die Betrachtung dieses Factors ist der Gegenstand dieser Abhandlung. Ich will nämlich zeigen, dafs die Gleichung $A=0$ die Resultante der Elimination von z aus den beiden Gleichungen $f(z)=0$ und $\varphi(z)=0$ ist oder die Bedingungsgleichung, dafs die beiden Gleichungen $f(z)=0$ und $\varphi(z)=0$ eine gemeinschaftliche Wurzel haben.

Ich beweise zuerst, dafs der Factor A blofs von der Beschaffenheit der Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ abhängt, und dagegen von der Wahl der Werthe von z, für welche die Werthe dieser Functionen gegeben sein sollen, oder von den Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, gänzlich unabhängig ist. Durch Zerfällung in Partialbrüche und Vergleichung der mit demselben Nenner $z-\alpha_0$ behafteten Ausdrücke erhält man nämlich, wenn man

$$M_{0,1,2,\ldots m} = (\alpha_0-\alpha_{m+1})(\alpha_0-\alpha_{m+2})\ldots(\alpha_0-\alpha_n)M^{(0)}_{1,2,\ldots m}$$

setzt, aus der ersten der beiden Gleichungen (4.),

$$5.\quad A = \Sigma^{(0)}\frac{f(\alpha_1)f(\alpha_2)\ldots f(\alpha_m)\varphi(\alpha_{m+1})\varphi(\alpha_{m+2})\ldots\varphi(\alpha_m)}{M^{(0)}_{1,2,\ldots m}},$$

und aus der zweiten Gleichung,

$$6. \quad A = \Sigma^{(0)} \frac{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-m})f(\alpha_{n-m+1})f(\alpha_{n-m+2})\ldots f(\alpha_n)}{M^{(0)}_{n-m+1,\,n-m+2,\ldots n}}$$

$$= (-1)^{m(n-m)}\Sigma^{(0)} \frac{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n-m})f(\alpha_{n-m+1})f(\alpha_{n-m+2})\ldots f(\alpha_n)}{M^{(0)}_{1,2,\ldots n-m}},$$

wo das Summenzeichen $\Sigma^{(0)}$ andeutet, dafs man von den $n+1$ Indices $0, 1, 2, \ldots n$ den Index 0 fortzulassen hat, und sich daher die Summe nur auf die verschiedenen Terme erstreckt, welche durch Versetzung der n Indices $1, 2, \ldots n$ erhalten werden. Eben so wird auch der Index 0 bei der Bildung der Producte $M^{(0)}_{1,2,3,\ldots k}$ ausgelassen, so dafs man erhält

$$M^{(0)}_{n-m+1,\,n-m+2,\ldots n} = (-1)^{m(n-m)} M^{(0)}_{1,2,\ldots n-m}$$

$$= \begin{vmatrix} (\alpha_{n-m+1}-\alpha_1)(\alpha_{n-m+1}-\alpha_2)\ldots(\alpha_{n-m+1}-\alpha_{n-m}) \\ (\alpha_{n-m+2}-\alpha_1)(\alpha_{n-m+2}-\alpha_2)\ldots(\alpha_{n-m+2}-\alpha_{n-m}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha_n-\alpha_1)\quad(\alpha_n-\alpha_2)\ldots\quad(\alpha_n-\alpha_{n-m}) \end{vmatrix}.$$

Die beiden für A durch die Betrachtung des Zählers und Nenners gefundenen Ausdrücke (5.) und (6.) sind offenbar identisch, und da dasselbe in Bezug auf alle anderen Partialbrüche gilt, welche respective die Nenner $z-\alpha_1$, $z-\alpha_2$, ... $z-\alpha_n$ haben, so erhält man hierdurch einen Beweis der *Cauchyschen* Formel. Aber der für A gefundene Ausdruck lehrt aufserdem, dafs A von α_0 unabhängig ist, und eben so kann allgemein durch Vergleichung der mit dem Nenner $z-\alpha_r$ behafteten Partialbrüche ein von α_r unabhängiger Ausdruck von A gefunden werden. Man erhält auf diese Art $n+1$ Ausdrücke für A, von denen jeder von einer andern der $n+1$ Gröfsen α_r unabhängig ist. Daher ist A von den Gröfsen α_r überhaupt nicht abhängig, weil zwischen diesen Gröfsen keine Bedingungsgleichungen Statt finden.

Da A von den Gröfsen α_0, α_1 etc. unabhängig ist, so kann man es durch specielle Werthe dieser Gröfsen bestimmen. Es sei

$$f(z) = a_{n-m}z^{n-m} + a_{n-m-1}z^{n-m-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = a_{n-m}(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_{n-m}),$$
$$\varphi(z) = b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0 = b_m(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\ldots(z-\zeta_m).$$

Setzen wir

$$7. \quad \Delta = a^m_{n-m}\varphi(z_1)\varphi(z_2)\ldots\varphi(z_{n-m}) = (-1)^{m(n-m)}b^{n-m}_m f(\zeta_1)f(\zeta_2)\ldots f(\zeta_m),$$

so ist nach bekannten Theoremen $\Delta = 0$ die Resultante der Elimination von z aus den Gleichungen $f(z) = 0$ und $\varphi(z) = 0$ und zugleich Δ eine ganze rationale Function der Coëfficienten von $f(z)$ und $\varphi(z)$, welche die beiden

Terme $a_{n-m}^{m} b_0^{n-m}$, $(-1)^{m(n-m)} b_m^{n-m} a_0^m$ enthält, und dadurch in Bezug auf Vorzeichen und Zahlenfactoren vollkommen bestimmt ist. Setzt man in (5.)

$$\alpha_1 = \zeta_1, \quad \alpha_2 = \zeta_2, \quad \ldots\ldots \quad \alpha_m = \zeta_m,$$
$$\alpha_{m+1} = z_1, \quad \alpha_{m-2} = z_2, \quad \ldots\ldots \quad \alpha_n = z_{n-m},$$

so verschwinden in dem Ausdrucke von A alle unter dem Summenzeichen begriffenen Terme, den einen ausgenommen, welcher als Norm hinter das Zeichen geschrieben ist. Für diese Werthe von α_1, α_2 etc. ferner wird

$$\Delta = (-1)^{m(n-m)} b_m^{n-m} f(\alpha_1) f(\alpha_2) \ldots . f(\alpha_m) = a_{n-m}^m \varphi(\alpha_{m+1}) \varphi(\alpha_{m+2}) \ldots . \varphi(\alpha_n)$$
$$= (-1)^{m(n-m)} a_{n-m}^m b_m^{n-m} M^{(0)}_{1,2,\ldots . m},$$

und daher, wenn man Δ für diese Ausdrücke in dem einen in der Summe (6.) nicht verschwindenden Term substituirt,

$$A = \Delta,$$

was zu beweisen war.

Wir haben also folgenden Satz, in welchem M und Σ für $M^{(0)}$ und $\Sigma^{(0)}$ geschrieben sind:

„Bezeichnet $\Delta = 0$ die Endgleichung, welche man aus den beiden algebraischen Gleichungen

$$f(z) = a_{n-m} z^{n-m} + a_{n-m-1} z^{n-m-1} + \ldots . + a_1 z + a_0 = a_{n-m}(z-z_1)(z-z_2) \ldots . (z-z_{n-m})$$
$$= 0,$$
$$\varphi(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots . + b_1 z + b_0 = b_m (z-\zeta_1)(z-\zeta_2) \ldots . (z-\zeta_m)$$
$$= 0$$

„durch Elimination von z erhält, und sind Vorzeichen und Zahlenfactoren „von Δ so bestimmt, dafs man

$$\Delta = a_{n-m}^m \varphi(z_1) \varphi(z_2) \ldots . \varphi(z_{n-m})$$
$$= (-1)^{m(n-m)} b_m^{n-m} f(\zeta_1) f(\zeta_2) \ldots . f(\zeta_m)$$

„hat, so ist

$$8. \quad \Delta = \Sigma \frac{f(\alpha_1) f(\alpha_2) \ldots . f(\alpha_m) \varphi(\alpha_{m+1}) \varphi(\alpha_{m+2}) \ldots . \varphi(\alpha_n)}{M_{1,2,\ldots . m}}$$
$$= (-1)^{m(n-m)} \Sigma \frac{\varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \ldots . \varphi(\alpha_{n-m}) f(\alpha_{n-m+1}) f(\alpha_{n-m+2}) \ldots . f(\alpha_n)}{M_{1,2,\ldots . n-m}},$$

„wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$ beliebige Gröfsen sind und durch $M_{1,2,\ldots . m}$ das Product

$$M_{1,2,\ldots . m} = (\alpha_1 - \alpha_{m+1})(\alpha_2 - \alpha_{m+1}) \ldots . (\alpha_m - \alpha_{m+1})$$
$$(\alpha_1 - \alpha_{m+2})(\alpha_2 - \alpha_{m+2}) \ldots . (\alpha_m - \alpha_{m+2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\alpha_1 - \alpha_n) \quad (\alpha_2 - \alpha_n) \quad \ldots . (\alpha_m - \alpha_n)$$

„bezeichnet wird, und die Summation sich über alle verschiedne Terme „erstreckt, welche durch Vertauschung der Indices 1, 2, ... n erhal- „ten werden."

Ich will jetzt noch einen andern Beweis dieses Satzes geben, welcher auf bekannten Eigenschaften der ganzen alternirenden Functionen beruht und nicht die Annahme besonderer Werthe der Gröfsen α_1, α_2 etc. voraussetzt. Eine alternirende Function nennen wir nach dem Vorgange von *Cauchy* jede rationale Function von mehreren Argumenten, welche in den entgegengesetzten Werth übergeht, sobald beliebige zwei von ihren Argumenten mit einander vertauscht werden. Daraus folgt, dafs jede ganze alternirende Function durch das Product aus sämmtlichen Differenzen von je zweien ihrer Argumente theilbar sein mufs, und dafs, wenn man eine alternirende Function $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ von n Argumenten entwickelt, die Entwicklung nur Terme von der Form $K\alpha_1^{a_1}\alpha_2^{a_2}\ldots\alpha_n^{a_n}$ enthalten kann, in welchen K von den Gröfsen α_k unabhängig ist und die Exponenten a_k sämmtlich von einander verschieden sind. In einer Abhandlung von *Jacobi* im 22ten Bande dieses Journals „De functionibus alternantibus", in welcher unter andern auch die Division der ganzen alternirenden Function durch das Product sämmtlicher Differenzen ihrer Argumente auf eine elegante Art wirklich ausgeführt wird, ist für dieses Product das Zeichen Π eingeführt, so dafs

$$\begin{aligned}\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = {} & (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)\\ & (\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)\\ & (\alpha_3-\alpha_4)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ & (\alpha_{n-2}-\alpha_n)\end{aligned}$$

wird. Damit das Vorzeichen bestimmt ist, soll das Product $\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ immer so gebildet werden, dafs in jedem seiner Factoren $\alpha_h-\alpha_i$ der Index $h<i$ ist. Aus der Eigenschaft, dafs jede alternirende Function der n Gröfsen α_k durch $\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ theilbar ist, wird nun in der genannten Abhandlung die wichtige Folgerung gezogen, dafs jede alternirende Function der n Gröfsen α_k, welche von niedrigerer Dimension als $\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ ist, identisch verschwinden mufs. Diese Bemerkung führt auch zu dem Beweise unseres Satzes.

Es ist nämlich

$$P = \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)\,\Pi(\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots \alpha_n)\,M_{1,2,3,\ldots m}$$

und allgemein

$$P = \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \pm\Pi(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots \alpha_{k_m})\,\Pi(\alpha_{k_{m+1}}, \alpha_{k_{m+2}}, \ldots \alpha_{k_n})M_{k_1, k_2, \ldots k_m},$$

wo man auf der rechten Seite das obere oder das untere Zeichen zu nehmen hat, je nachdem die Anzahl der Fälle, in welchen die Indices $k_1, k_2, \ldots k_m$ die übrigen $k_{m+1}, k_{m+2}, \ldots k_n$ übertreffen, gerade oder ungerade ist.

In der Gleichung (8.) steht nun auf der rechten Seite eine Summe von Brüchen, welche wir wieder mit A bezeichnen wollen und welche in Bezug auf die Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ symmetrisch ist. Vereinigt man alle in einen einzigen Bruch, so wird der gemeinschaftliche Nenner

$$P = \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n),$$

also gleich einer alternirenden Function der n Gröfsen α_k. Daher wird auch der Zähler dieses Bruchs, den wir mit V bezeichnen wollen, eine alternirende Function dieser Gröfsen werden, weil der Quotient $A = \frac{V}{P}$ unverändert bleibt, wenn man zwei von den n Gröfsen α_k miteinander vertauscht. Es ist aber

$$9. \quad V = \Sigma \pm f(\alpha_{k_1}) f(\alpha_{k_2}) \ldots f(\alpha_{k_m}) \varphi(\alpha_{k_{m+1}}) \varphi(\alpha_{k_{m+2}}) \ldots$$
$$\ldots \varphi(\alpha_{k_n}) \Pi(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots \alpha_{k_m}) \Pi(\alpha_{k_{m+1}}, \alpha_{k_{m+2}}, \ldots \alpha_{k_n}),$$

wo diejenigen Terme das Zeichen — bekommen, für welche das zugehörige

$$M_{k_1, k_2, \ldots k_m}$$

eine ungerade Anzahl Factoren $\alpha_h - \alpha_i$ enthält, in denen $h > i$ ist.

Man hat nun, wenn die Producte der Differenzen entwickelt werden, wegen der Grundeigenschaft der alternirenden Functionen,

$$P = \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \Sigma \pm \alpha_1^0 \alpha_2^1 \alpha_3^2 \ldots \alpha_n^{n-1},$$
$$\Pi(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3}, \ldots \alpha_{k_m}) = \Sigma \pm \alpha_{k_1}^0 \alpha_{k_2}^1 \alpha_{k_3}^2 \ldots \alpha_{k_m}^{m-1},$$
$$\Pi(\alpha_{k_{m+1}}, \alpha_{k_{m+2}}, \ldots \alpha_{k_n}) = \Sigma \pm \alpha_{k_{m+1}}^0 \alpha_{k_{m+2}}^1 \ldots \alpha_{k_n}^{n-m-1},$$

wo man die Summen so bildet, dafs man entweder die Exponenten oder die Indices des hinter dem Σ stehenden Ausdruckes auf alle möglichen Arten miteinander vertauscht, und die Zeichen so bestimmt dafs der ganze Ausdruck durch Vertauschung zweier Indices oder Exponenten den entgegengesetzten Werth erhält. Aus derselben Eigenschaft folgt, wie oben bemerkt wurde, dafs in der Entwicklung von V nur Terme von der Form

$$K \alpha_1^{a_1} \alpha_2^{a_2} \ldots \alpha_n^{a_n}$$

vorkommen können, in welchen K von den Gröfsen α_1, α_2 etc. unabhängig ist und sämmtliche Exponenten $a_1, a_2, \ldots a_n$ von einander verschieden sind. Nun ist aber $f(\alpha_{k_1})$ vom $(n-m)$ten, $\Pi(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots \alpha_{k_m})$ vom $(m-1)$ten Grade in Bezug auf α_{k_1}, und ebenso $\varphi(\alpha_{k_{m+1}})$ vom $m$ten, $\Pi(\alpha_{k_{m+1}}, \alpha_{k_{m+2}}, \ldots \alpha_{k_n})$ vom $(n-m-1)$ten

Grade in Bezug auf $\alpha_{k_{m+1}}$. Daher wird jeder Term des Summenausdrucks (9.) in Bezug auf jede der Gröfsen α_k höchstens vom $(n-1)$ten Grade und also jeder der Exponenten $a_k \geqq 0$ und $\leqq n-1$ sein. Da nun diese Exponenten alle von einander verschieden sein sollen, so kann V nur aus Termen von der Form

$$K\alpha_{k_1}^{0}\alpha_{k_2}^{1}\alpha_{k_3}^{2}\ldots\alpha_{k_n}^{n-1}$$

bestehn. V ist daher in Bezug auf jede der Gröfsen α_k von derselben Dimension als P, und da es zugleich durch P theilbar ist, so mufs der Quotient $\frac{V}{P}$ von den Gröfsen a_k unabhängig sein und sich nur aus den Coëfficienten der Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ zusammensetzen, und zwar wird derselbe eine ganze rationale Function dieser Coëfficienten, in Bezug auf alle von der $n$ten, in Bezug auf die Coëfficienten von $f(z)$ von der $m$ten, in Bezug auf die Coëfficienten von $\varphi(z)$ von der $(n-m)$ten Dimension.

Haben nun $f(z)$ und $\varphi(z)$ einen gemeinschaftlichen Factor $z-b$, so bekommt zufolge (9.) die alternirende Function V den Factor $(\alpha_1-b)(\alpha_2-b)\ldots(\alpha_n-b)$, in P dagegen ist dieser Factor nicht enthalten; daher mufs P den andern Factor von V, nämlich $\frac{V}{\alpha_1-b.\alpha_2-b\ldots\alpha_n-b}$ theilen, der eine alternirende Function der Gröfsen α_k bleibt. Dieser ist aber von niedrigerer Dimension als P, also mufs derselbe und mithin auch V nach der oben gemachten Bemerkung identisch verschwinden. Der Quotient $\frac{V}{P}=A$ ist also von den Coëfficienten der Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ allein abhängig und zwar eine ganze rationale Function derselben, welche in Bezug auf sämmtliche Coëfficienten von $f(z)$ von der $m$ten, in Bezug auf die Coëfficienten von $\varphi(z)$ von der $(n-m)$ten Dimension ist, und welche verschwindet, wenn $f(z)$ und $\varphi(z)$ einen gemeinschaftlichen Factor haben. Daher kann nach einem bekannten Satze von *Euler* $\frac{V}{P}$ von A nur durch einen Zahlenfactor verschieden sein. Um diesen Zahlenfactor zu finden, bemerke ich, dafs wenn man in dem obigen Ausdruck (5.) von A die Ausdrücke der Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ substituirt, die Gröfse $a_{n-m}^{m}b_0^{n-m}$ mit

$$\Sigma\frac{\alpha_1^{n-m}\alpha_2^{n-m}\ldots\alpha_n^{n-m}}{M_{1,2,\ldots m}}$$

multiplicirt wird. Dieser Ausdruck ist aber $=1$, wie sich aus der besondern Art von Zerfällung, welche *Jacobi* in seiner Abhandlung „Disquisitiones analyticae de functionibus simplicibus" behandelt hat, unmittelbar ergiebt, wenn

man in der dort gegebnen Formel

$$\Sigma \frac{\alpha_1^{n-m}\,\alpha_2^{n-m}\,\ldots\,\alpha_m^{n-m}}{M_{1,2,\ldots,m}(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_m)} = \frac{z^{n-m}}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)}$$

die beiden Seiten entwickelt und die Coëfficienten von z^{-m} einander gleich setzt. Da mithin der Coëfficient von $a_{n-m}^m b_0^{n-m}$ in $\frac{V}{P}$, ebenso wie in Δ, der Einheit gleich ist, so hat man geradezu

$$A = \frac{V}{P} = \Delta,$$

was der zu beweisende Satz ist.

Ich will noch zeigen, wie man von diesem Satze aus mit Leichtigkeit zu der *Cauchyschen* Formel gelangen kann.

Eliminirt man nämlich t aus den Gleichungen

$$10. \quad f(t) = 0 \quad \text{und} \quad (z-t)\,\varphi(t) = 0,$$

so erhält man

$$\Delta \cdot f(z) = 0$$

als resultirende Endgleichung, und ebenso ergiebt sich

$$\Delta \cdot \varphi(z) = 0$$

als Resultante der Elimination von t aus den Gleichungen

$$11. \quad (z-t)f(t) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(t) = 0.$$

Bildet man daher die Endgleichungen nach der in der Gleichung (8.) gegebenen Regel, indem man noch ein $(n+1)$tes Element α_0 hinzufügt, weil die Summe der Grade der gegebenen Gleichungen jetzt um 1 gröfser geworden ist, so erhält man

$$12. \quad \begin{cases} \Delta \cdot f(z) = \\ \Sigma \dfrac{f(\alpha_0) f(\alpha_1) \ldots f(\alpha_m)\,\varphi(\alpha_{m+1})\,\varphi(\alpha_{m+2}) \ldots \varphi(\alpha_n)(z-\alpha_{m+1})(z-\alpha_{m+2})\ldots(z-\alpha_n)}{M_{0,1,2,\ldots,m}}, \\ (-1)^{m(n-m)}\,\Delta \cdot \varphi(z) = \\ \Sigma \dfrac{\varphi(\alpha_0)\varphi(\alpha_1)\ldots\varphi(\alpha_{n-m})\,f(\alpha_{n-m+1})\ldots f(\alpha_n)(z-\alpha_{n-m+1})(z-\alpha_{n-m+2})\ldots(z-\alpha_n)}{M_{0,1,2,\ldots,n-m}}. \end{cases}$$

Sind nämlich wieder $z_1, z_2, \ldots z_{n-m}$ die Wurzeln der Gleichung $f(t) = 0$, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m$ die Wurzeln von $\varphi(t) = 0$, und a_{n-m}, b_m die Coëfficienten der höchsten Potenzen in $f(t)$ und $\varphi(t)$, so mufs nach dem oben aufgestellten

Theorem der Ausdruck, welcher in der ersten der Gleichungen (12.) zur Rechten steht, den Werth

$$a^m_{n-m}\,\varphi(z_1)\,\varphi(z_2)\ldots.\,\varphi(z_{n-m})\cdot f(z) = \Delta\cdot f(z),$$

der Ausdruck, welcher in der 2ten Gleichung (12.) zur Rechten steht, den Werth

$$b^{n-m}_m\,f(\zeta_1)\,f(\zeta_2)\ldots.\,f(\zeta_m)\cdot\varphi(z) = (-1)^{m(n-m)}\,\Delta\cdot\varphi(z)$$

erhalten. Substituirt man in der zweiten Gleichung (12.) die Gleichung

$$(-1)^{m(n-m+1)}\,M_{0,1,2,\ldots.n-m} = M_{n-m+1,\,n-m+2,\ldots.n},$$

und dividirt die beiden Gleichungen (12.) mit $\varphi(\alpha_0)\,\varphi(\alpha_1)\ldots.\,\varphi(\alpha_n)$, so erhält man zufolge (4.) den Zähler N und Nenner D der *Cauchyschen* Interpolationsformel.

Berlin, im September 1845.

12.

Über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie.

Auszug eines Schreibens an die Berliner Akad. d. W. von Herrn *C. G. J. Jacobi.*

(Abgedruckt aus den Monatsberichten der Königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin vom Jahre 1837.)

Ist x eine Wurzel der Gleichung $\frac{x^p-1}{x-1}=0$, wo p eine Primzahl ist, und g eine primitive Wurzel von p, und setzt man

$$F(\alpha) = x + \alpha x^g + \alpha^2 x^{g^2} \ldots + \alpha^{p-2} x^{g^{p-2}},$$

wo α irgend eine Wurzel der Gleichung $\frac{\alpha^{p-1}-1}{\alpha-1}=0$ bedeutet, so hat man

$$F(\alpha)F(\alpha^{-1}) = \alpha^{\frac{p-1}{2}} \cdot p.$$

Setzt man

$$F(\alpha^m)F(\alpha^n) = \psi(\alpha)F(\alpha^{m+n}),$$

so wird $\psi(\alpha)$ ein Ausdruck, der blofs die Potenzen von α in ganze Zahlen multiplicirt enthält; es ist ferner

$$\psi(\alpha)\psi(\alpha^{-1}) = p \text{ *)}.$$

Bedeutet r eine primitive Wurzel der Gleichung $r^{p-1}=1$, und setzt man in der Function

$$\psi(r) = \frac{F(r^{-m})F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})}$$

für r die Zahl g, so wird, wenn m und n positive Zahlen bedeuten die kleiner als $p-1$ sind,

$$\psi(g) \equiv -\frac{\Pi(m+n)}{\Pi m \, \Pi n} \pmod{p},$$

wo $\Pi n = 1.2.3 \ldots n$. Wenn also $m+n>p-1$, wird $\psi(g)\equiv 0 \pmod{p}$, welches letztere sich in den Anwendungen als einen der wichtigsten Sätze der Zahlentheorie erweist. Der Fall $m+n=p-1$ wird hier ausgenommen. Diese Sätze habe ich vor mehr als 10 Jahren *Gauſs* mitgetheilt.

Ich bemerke noch, dafs wenn $2\equiv g^m$, $3\equiv g^{m'} \pmod{p}$, man die beiden merkwürdigen Formeln hat:

---

*) Die Fälle, wo α_m, α_n oder α_{m+n} der Einheit gleich sind, werden hier ausgenommen.

$$F(-1)F(\alpha^2) = \alpha^{2m}F(\alpha)F(-\alpha),$$
$$F(\alpha)F(\gamma\alpha)F(\gamma^2\alpha) = \alpha^{-3m'}pF(\alpha^3),$$

in deren letzterer γ eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit ist. Ist λ ein ungerader Factor von $p-1$, so kann man durch die erste der beiden Formeln diejenigen Functionen $F(\alpha)$, in welchen α eine 2λte Wurzel der Einheit ist, rational auf die Functionen $F(\alpha)$ zurückführen, in denen α eine λte Wurzel der Einheit ist. Man erhält so für $F(-\gamma)$ den Ausdruck

$$F(-\gamma) = \sqrt{p}\cdot\sqrt[3]{\left(\gamma^{-B}\frac{A-B\sqrt{-3}}{A+B\sqrt{-3}}\right)},$$

wo $A^2+3B^2=p$. Mit Hülfe derselben Formel findet man, wenn α eine primitive 8te Wurzel der Einheit ist, und

$$p = aa+bb = cc+2dd, \quad a\equiv c\equiv -1 \pmod 4$$

gesetzt wird,

$$F(\alpha) = \sqrt{\{(-1)^{\frac{c+1}{4}}(c+d\sqrt{-2})\sqrt{((a+b\sqrt{-1})\sqrt{p})}\}},$$

ferner

$$F(\alpha)F(\alpha^2) = (-1)^{\frac{c+1}{4}+\frac{p-1}{8}}(a+b\sqrt{-1})F(a^3),$$
$$F(\alpha)F(\alpha^3) = (-1)^{\frac{p-1}{8}}(c+d\sqrt{-2})F(-1).$$

Man erhält ferner mit Hülfe der beiden Formeln, wenn γ und α eine imaginäre cubische und biquadratische Wurzel der Einheit sind:

$$F(\gamma\alpha) = \frac{F(\alpha)F(\gamma)}{a'+b'\alpha} = \frac{\sqrt{((a+b\alpha)\sqrt{p})}\sqrt[3]{\left(\frac{L+M\sqrt{-3}}{2}\cdot\sqrt{p}\right)}}{a'+b'\alpha},$$

wo

$$p = aa+bb = a'a'+b'b' = \frac{LL+3MM}{4},$$
$$a \equiv -1 \pmod 4,$$
$$a' \equiv -L \equiv -1 \pmod 3,$$
$$M \equiv 0 \pmod 3,$$
$$\frac{a'}{b'} \equiv \frac{a}{b} \pmod p.$$

Die zweifelhaften Zeichen werden immer durch Congruenzen *bestimmt* oder, wo sie von der Wahl der primitiven Wurzel g abhängen, wird diese Abhängigkeit auf eine einfache Weise angegeben; die Art dieser Abhängigkeit bildet die wichtigste Grundlage der Anwendung auf die Theorie der Potenzenreste. Ich bemerke noch, dafs wenn $p=cc+2dd$ von der Form $8n+1$ ist, c der absolut kleinste Rest ist, den die Zahl

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\frac{p+1}{2}\cdot\frac{p+3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{5(p-1)}{8}}{1.2.3\ldots\frac{p-1}{8}}$$

durch p dividirt läfst, und dafs dieser absolut kleinste Rest immer positiv oder negativ ist, je nachdem er, abgesehen vom Zeichen, die Form $4n+3$ oder $4n+1$ hat. Die Functionen $F(\alpha)$, welche man nur bestimmt hatte, wenn α eine quadratische, cubische, biquadratische Wurzel der Einheit ist, sind durch die obigen Formeln nun auch bestimmt, wenn α eine 6te, 8te, 12te Wurzel der Einheit ist, man kann also *a priori* die Wurzeln der Gleichungen vom 6ten, 8ten, 12ten Grade, die in der Kreistheilung vorkommen, vollständig auflösen, und braucht hierzu nur die Zerfällung von p in die drei Formen $xx+yy$, $xx+2yy$, $xx+3yy$. Für die Primzahlen bis 12000 habe ich diese Zerfällungen meiner Arbeit beigefügt.

Eine allgemeine Formel von grofser Wichtigkeit auch in der Anwendung der Kreistheilung auf die Theorie der quadratischen Formen ist folgende. Es sei p von der Form $\lambda n+1$, β eine primitive λte Wurzel der Einheit, α *irgend eine* Wurzel der Gleichung $\alpha^{p-1}=1$, es sei ferner $\lambda \equiv g^m \pmod{p}$, so wird, wenn λ ungerade ist:

$$F(\alpha)F(\beta\alpha)F(\beta^2\alpha)\ldots.F(\beta^{\lambda-1}\alpha) = \alpha^{-\lambda m}p^{\frac{\lambda-1}{2}}F(\alpha^\lambda),$$

wenn λ gerade ist:

$$F(\alpha)F(\beta\alpha)F(\beta^2\alpha)\ldots.F(\beta^{\lambda-1}\alpha) = (-1)^{\frac{(p-1)(\lambda-2)}{8}}p^{\frac{\lambda-2}{2}}F(-1)F(\alpha^\lambda)\ *),$$

wo, wie immer,

$$F(-1) = \sqrt{((-1)^{\frac{p-1}{2}}p)}$$

ist.

Wenn die Functionen ψ im Zusammenhange mit den Binominalcoëfficienten oder den *Euler*schen Integralen 1ster Gattung stehen, wie die Congruenz

$$\psi(g) \equiv -\frac{\Pi(m+n)}{\Pi m\,\Pi n} \pmod{p}$$

zeigt, so scheint die Vergleichung mit der Formel

$$\psi(r) = \frac{F(r^{-m})F(r^{-n})}{F(r^{-m-n})}$$

---

*) Dieser Satz ist einem *Gaufs*'schen über die *Euler*schen Integrale analog, von welchem neuerdings *Dirichlet* einen merkwürdigen Beweis gegeben hat.

darauf hinzudeuten, dafs zwischen den Functionen F und den *Euler*schen Integralen 2ter Gattung eine ähnliche Beziehung Statt finden mufs, in der Art, dafs $-\frac{1}{\Pi n}$ der Function $F(r^{-n})$ entspricht. Aber ich habe lange diese Beziehung vergeblich gesucht, bis ich sie in folgendem Satze fand.

In dem Ausdruck von $F(\alpha)$ setze man für den Exponenten g^m den ihm in Bezug auf p congruenten kleinsten positiven Rest g_m, wodurch

$$F(x, \alpha) = x + \alpha x^{g_1} + \alpha^2 x^{g_2} \ldots + \alpha^{p-2} x^{g_{p-2}}$$

wird. Es seien ferner x und α nicht Wurzeln der Einheit, sondern x eine unbestimmte Variable und α eine Zahl $\equiv g^{p-1-m} \pmod{p}$. Setzt man $x = 1 + y$ und bezeichnet mit Y_n die Entwicklung von $\{\log(1+y)\}^n$, wenn man die y^{p-1} übersteigenden Potenzen von y fortwirft: so wird für die verschiednen Zahlen α, welche man für die verschiednen Werthe von m erhält,

$$F(1+y, \alpha) \equiv -\frac{Y_m}{\Pi_m} \pmod{p},$$

wo die Congruenz für ein unbestimmtes y in Bezug auf die einzelnen Coëfficienten der Potenzen von y Statt findet. Dies ist die gesuchte Beziehung, aus welcher durch Multiplication zweier Functionen F die obige zwischen den Functionen ψ und den Binominalcoëfficienten folgt. Ich bemerke noch den Satz, dafs in der Entwicklung der $(2m)$ten Potenz von $\log(1+y)$ der Coëfficient von y^p, wenn p eine Primzahl und $> 2m+1$ ist, immer ein Vielfaches von p zum Zähler erhält, wenn man ihn auf seinen kleinsten Ausdruck bringt.

Die bisher noch nirgends angegebne wahre Form der Wurzeln der Gleichung $x^p = 1$ ist folgende. Man kann, wie bekannt, diese Wurzeln leicht durch blofse Addition aus den Functionen $F(\alpha)$ zusammensetzen. Ist λ ein Factor von $p-1$ und $\alpha^\lambda = 1$, so ist ferner bekannt, dafs $\{F(\alpha)\}^\lambda$ eine blofse Function von α ist. Man braucht aber nur diejenigen Werthe von $F(\alpha)$ zu kennen, für welche λ Potenz einer Primzahl ist. Es sei nemlich $\lambda\lambda'\lambda'' \ldots$ ein Factor von $p-1$; ferner seien λ, λ', $\lambda'' \ldots$ Potenzen verschiedener Primzahlen und α, α', $\alpha'' \ldots$ primitive λte, λ'te, λ''te .... Wurzeln der Einheit: so wird

$$F(\alpha\alpha'\alpha'' \ldots) = \frac{F(\alpha)F(\alpha')F(\alpha'') \ldots}{\psi(\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots)},$$

wo $\psi(\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots)$ eine ganze rationale Function von α, α', $\alpha'' \ldots$ bedeutet, deren Coëfficienten ganze Zahlen sind. Es kommen daher, wenn man immer die $(p-1)$ten Wurzeln der Einheit als gegeben ansieht, in dem Ausdruck von x nur Wurzelgröfsen, deren Exponenten Potenzen von Primzahlen

sind, und die Producte solcher Wurzelgröfsen vor. Wenn $\lambda = \mu^n$ und μ eine Primzahl ist, findet man die Function $F(\alpha)$ auf folgende Art. Man setze

$$F(\alpha)F(\alpha^i) = \psi_i(\alpha)F(\alpha^{i+1}),$$

so wird

$$F(\alpha) = \sqrt[\mu]{\{\psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha) \ldots . \psi_{\mu-1}(\alpha)\cdot F(\alpha^\mu)\}}$$
$$F(\alpha^\mu) = \sqrt[\mu]{\{\psi_1(\alpha^\mu)\psi_2(\alpha^\mu) \ldots . \psi_{\mu-1}(\alpha^\mu)\cdot F(\alpha^{\mu^2})\}}$$

u. s. w., zuletzt

$$F(\alpha^{\mu^{n-1}}) = \sqrt[\mu]{\{\psi_1(\alpha^{\mu^{n-1}})\psi_2(\alpha^{\mu^{n-1}}) \ldots . \psi_{\mu-2}(\alpha^{\mu^{n-1}})\cdot(-1)^{\frac{p-1}{\mu}}p\}}\ *).$$

Die $\mu-1$ Functionen ψ bestimmen nicht nur sämmtliche Gröfsen unter den Wurzelzeichen, sondern auch die gegenseitige Abhängigkeit der Wurzelgröfsen selber. Setzt man nemlich für α die verschiednen Potenzen von α, so kann man vermittelst der so erhaltnen Werthe dieser Functionen alle μ^n-1 Functionen $F(\alpha^i)$ durch die Potenzen von $F(\alpha)$ rational ausdrücken, indem alle μ^n-1 Gröfsen $\frac{[F(\alpha)]^i}{F(\alpha^i)}$ immer einem Product aus den Werthen mehrerer der $\mu-1$ Functionen $\psi(\alpha)$ gleich werden. Hierin besteht einer der gröfsten Vorzüge der hier angegebnen Methode vor der *Gauſs*'schen, indem in dieser die Auffindung der Abhängigkeit der verschiednen Wurzelgröfsen eine ganz besondere, wegen ihrer grofsen Mühseligkeit selbst für kleine Primzahlen nicht mehr ausführbare Arbeit verursacht, während die Einführung der Functionen ψ *gleichzeitig* die Gröfsen unter den Wurzelzeichen und die Abhängigkeit der Wurzelgröfsen giebt. Die Bildung der Functionen ψ geschieht nach einem überaus einfachen Algorithmus, der nur erfordert, dafs man sich aus der Tabelle für die Reste von g^m eine andre bildet, welche $g^{m'} \equiv 1 + g^m \pmod{p}$ giebt. Nach diesen Regeln hat jetzt einer meiner Zuhörer in einer von der hiesigen Universität gekrönten Preisschrift die Gleichungen $x^p = 1$ für alle Primzahlen p bis 103 vollständig aufgelöst **).

---

*) Wenn $n = 1$, lassen sich die $\mu-1$ Functionen immer auf den 6ten Theil unmittelbar zurückführen. Ich habe sogar durch eine bis $\mu = 31$ fortgesetzte Induction gefunden, dafs sich alle Functionen ψ immer durch die Werthe einer einzigen ausdrücken lassen.

**) Bei dieser Gelegenheit hat derselbe (Herr *Rosenhain*) den merkwürdigen Satz bewiesen, dafs wenn α die 5te, γ die 3te Wurzel der Einheit, p von der Form $30n+1$, $24 \equiv g^m \pmod{p}$ ist, immer $F(\alpha)F(-\gamma) = \alpha^m \cdot \frac{A+B\sqrt{-3}}{2} F(-\alpha\gamma)$ wird, wo $A \equiv -2$, $B \equiv 0 \pmod{5}$, $AA + 3BB = 4p$.

Einer der für die Zahlentheorie fruchtbarsten Sätze ist folgender. Es seien die Zahlen m, m', m'' .... positiv und kleiner als $p-1$; es werden durch m_i, m_i', m_i'' .... die kleinsten positiven Reste bezeichnet, welche im, im', im'' .... durch $p-1$ dividirt ergeben; es sei

$$m_i + m_i' + m_i'' + \ldots = n_i(p-1) + s_i,$$

wo s_i ebenfalls positiv und kleiner als $p-1$; ist ν die kleinste unter den Zahlen n_1, n_2, ... n_{p-1} und setzt man

$$F(r^{-m})F(r^{-m'})F(r^{-m''})\ldots = \chi(r)F(r^{-s}),$$

so werden die ganzzahligen Coëfficienten in $\chi(r)$ alle durch p^ν theilbar und durch keine höhere Potenz von p; setzt man $\chi(r) = p^\nu \chi'(r)$ und in $\chi'(r)$ für r die primitive Wurzel g, so wird

$$\chi'(g) \equiv \pm \frac{\Pi s}{\Pi m \, \Pi m' \, \Pi m'' \ldots} \pmod{p}.$$

Die Anwendung dieses Satzes giebt eigenthümliche Theoreme, von denen ich vor einer Reihe von Jahren ein Specimen in diesem Journal mitgetheilt habe, die Zahl der reducirten quadratischen Formen der Theiler von $yy + pzz$ betreffend, wenn p eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist *). Wenn ich diesen Theoremen die Allgemeinheit gegeben haben werde, deren sie fähig scheinen, werde ich mir die Ehre geben, sie ebenfalls der Akademie vorzulegen. Sie bilden gewissermaafsen ein Verbindungsglied zwischen den beiden Haupttheilen der höheren Arithmetik, der Kreistheilung und der Theorie der quadratischen Formen.

Die hauptsächlichste Anwendung der Kreistheilung habe ich auf die Theorie der cubischen und biquadratischen Reste gemacht, und mit grofser Leichtigkeit und Einfachheit den schönen *Gaufs*'schen Satz in seiner 2ten Abhandlung über die biquadratischen Reste, dessen bisher noch nicht bekannt gemachten Beweis derselbe als ein *mysterium maxime reconditum* bezeichnet, wahrscheinlich auf ganz verschiednem Wege abgeleitet **). Die höchste Einfachheit hat der Reciprocitätssatz für cubische Reste, dessen Beweis sich fast mit einem Striche aus den bekannten Formeln der Kreistheilung findet. Sind nämlich $\frac{L+M\sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{L'+M'\sqrt{-3}}{2}$, wo M und M' durch 3 aufgehen (auch 0

*) Für die Primzahlen von der Form $4n+1$ findet ein ganz analoger Satz Statt; die Zahl der q. R. zwischen 0 und $\frac{1}{4}p$ giebt hier die Zahl der Formen.

**) Dieser Satz betrifft die biquadratische Reciprocität zwischen zwei complexen Primzahlen $a+b\sqrt{-1}$ und $c+b\sqrt{-1}$; den ebenfalls zuerst von *Gaufs* aufgestellten Satz über deren quadratische Reciprocität hat *Dirichlet* bewiesen.

sein können), zwei complexe Primzahlen und bezeichnet man durch $\left(\frac{x+y\sqrt{-3}}{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}\right)$ diejenige der Gröfsen 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, welche in Bezug auf den Modul $\frac{L+M\sqrt{-3}}{2}$ der Potenz $(x+y\sqrt{-3})^{\frac{\frac{1}{2}(LL+3MM)-1}{3}}$ congruent ist, so wird geradezu

$$\left(\frac{\frac{1}{2}(L'+M'\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}\right) = \left(\frac{\frac{1}{2}(L+M\sqrt{-3})}{\frac{1}{2}(L'+M'\sqrt{-3})}\right).$$

Die Beweise dieser Sätze konnten in den vergangenen Wintervorlesungen ohne Schwierigkeit meinen Zuhörern mitgetheilt werden *).

Die Anwendung des *Legendre*'schen Reciprocitätssatzes auf die Untersuchung, ob eine Primzahl einer andern quadratischer Rest oder Nichtrest sei, erfordert bekanntlich die Zerfällung der successiv gefundnen Reste in Primfactoren, und die besondere Behandlung jedes derselben. *Gauſs* hat die Theorie der quadratischen Reste wesentlich vervollkommnet, indem er durch einen ihm eigenthümlichen Satz diese Untersuchung, ohne Factorenzerfällung nöthig zu haben, auf die Verwandlung eines Bruchs in einen Kettenbruch zurückgeführt hat. Ich habe die gleiche Vollkommenheit der Theorie der biquadratischen und cubischen Reste gegeben, wozu es nur einer leicht sich ergebenden Verallgemeinerung der Reciprocitätssätze bedurfte. Ist nemlich, um diese Verallgemeinerung für die quadratischen Reste anzudeuten, p irgend eine ungerade Zahl $= ff'f''\ldots$, wo $f, f', f''\ldots$ gleiche oder verschiedene Primzahlen bedeuten, so dehne ich die schöne *Legendre*'sche Bezeichnung auf zusammengesetzte Zahlen p in der Art aus, dafs ich mit $\left(\frac{x}{p}\right)$, wenn x zu p Primzahl ist, das Product $\left(\frac{x}{f}\right)\left(\frac{x}{f'}\right)\left(\frac{x}{f''}\right)\ldots$ bezeichne. Sind p und p' zwei ungerade Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, beide positiv oder auch eine positiv, die andre negativ, so hat man, ganz wie bei Primzahlen:

---

*) Diese aus vielfach verbreiteten Nachschriften der oben erwähnten Vorlesungen auch den Herrn Professoren *Dirichlet* und *Kummer* seit mehreren Jahren bekannten Beweise sind neuerdings von Herrn Dr. *Eisenstein* im 27sten Bande des *Crelle*'schen Journals S. 289 und im 28ten Bande desselben Journals S. 53 publicirt worden. Der S. 41 des 28ten Bandes von Herrn Dr. *Eisenstein* gegebne Beweis des quadratischen Reciprocitätssatzes ist der nämliche, welchen ich im Jahre 1827 *Legendre* mitgetheilt und dieser in die 3te Ausgabe seiner Zahlentheorie aufgenommen hat.

Die oben erwähnten auf die quadratischen Formen bezüglichen Sätze sind jetzt Theile einer grofsen von *Dirichlet* gegründeten Theorie geworden.

October 1845. *J.*

$$\left(\frac{p'}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p'-1}{2}}\left(\frac{p}{p'}\right),$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

und diese Formeln geben den Werth von $\left(\frac{p'}{p}\right)$ vermittelst der gewöhnlichen Verwandlung von $\frac{p'}{p}$ in einen Kettenbruch durch eine von der *Gaufs*'schen wesentlich verschiedne und einfachere Regel. Auf diese Weise erfordert die Bestimmung von $\left(\frac{p'}{p}\right)$ nur die Untersuchung, ob p und p' wirklich, wie die Definition verlangt, keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Genau dasselbe läfst sich bei den biquadratischen und cubischen Resten anwenden, für welche ich ähnliche Bezeichnungen eingeführt habe. Die Anwendung des so verallgemeinerten Zeichens $\left(\frac{x}{p}\right)$ gewährt bei einiger Übung die angenehmsten Erleichterungen.

Mit den Resten der 8ten und 5ten Potenzen, welche ganz neue Principien nöthig machen, bin ich ziemlich weit vorgerückt; sobald ich den betreffenden Reciprocitätsgesetzen die wünschenswerthe Vollendung gegeben habe, werde ich sie der Akademie mittheilen. Das Wichtigste hiebei dürfte die Aussicht sein, welche diese Prinzipien auf eine dereinstige Verallgemeinerung und Vereinfachung der höheren Arithmetik gewähren.

Eine meiner frühesten Anwendungen der Kreistheilung betrifft die cyclometrische Auflösung der *Pell*'schen Aufgabe. Aus einer vor mir liegenden von dem jetzt am Danziger Gymnasium angestellten Oberlehrer *Czwalina* angefertigten Nachschrift einer von mir vor mehreren Jahren gehaltenen Vorlesung entnehme ich folgende Sätze. Es sei p eine Primzahl von der Form $4n+1$; bezeichnet man mit a ihre quadratisehen Reste zwischen o und $\frac{1}{2}p$, so wird

$$\sqrt{p}\{\sqrt{p}\cdot y + x\} = 2^{\frac{p+1}{2}}\Pi\sin^2\frac{a\pi}{p},$$

wo $x^2 - py^2 = -4$ und durch das vorgesetzte Π das Product aus sämmtlichen Factoren $\sin^2\frac{a\pi}{p}$ bezeichnet wird. Es sei q eine Primzahl von der Form $8n+3$; bezeichnet man mit a ihre quadratischen Reste, so wird

$$x + y\sqrt{q} = \sqrt{2}\,\Pi\sin\left(\frac{a\pi}{q} + \frac{\pi}{4}\right),$$

wo $x^2 - qy^2 = -2$. Es seien q und q' zwei Primzahlen von der Form

$4n+3$, q quadratischer Rest von q'; es seien ferner respective a und a' die kleinsten positiven quadratischen Reste von q und von q', so wird

$$2^{\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q'-1}{2}} \Pi \sin\left(\frac{a\pi}{q}+\frac{a'\pi}{q'}\right) = \sqrt{q}\cdot x+\sqrt{q'}\,y,$$

wo $qx^2-q'y^2=4$, u. s. w. Wenn x und y nicht gerade sind, giebt die Cubirung der Gleichungen

$$x^2-py^2=-4, \qquad qx^2-q'y^2=4$$

die Lösung der Gleichungen

$$u^2-pv^2=-1, \qquad qu^2-q'v^2=+1.$$

I. Zerfällung der Primzahlen p von der Form $4n+1$ in die Summe zweier Quadrate *).

$$p = a^2+b^2.$$

p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b
5	1	2	257	1	16	557	19	14	853	23	18	1181	5	34	1549	35	18
13	3	2	269	13	10	569	13	20	857	29	4	1193	13	32	1553	23	32
17	1	4	277	9	14	577	1	24	877	29	6	1201	25	24	1597	21	34
29	5	2	281	5	16	593	23	8	881	25	16	1213	27	22	1601	1	40
37	1	6	293	17	2	601	5	24	929	23	20	1217	31	16	1609	3	40
41	5	4	313	13	12	613	17	18	937	19	24	1229	35	2	1613	13	38
53	7	2	317	11	14	617	19	16	941	29	10	1237	9	34	1621	39	10
61	5	6	337	9	16	641	25	4	953	13	28	1249	15	32	1637	31	26
73	3	8	349	5	18	653	13	22	977	31	4	1277	11	34	1657	19	36
89	5	8	353	17	8	661	25	6	997	31	6	1289	35	8	1669	15	38
97	9	4	373	7	18	673	23	12	1009	15	28	1297	1	36	1693	37	18
101	1	10	389	17	10	677	1	26	1013	23	22	1301	25	26	1697	41	4
109	3	10	397	19	6	701	5	26	1021	11	30	1321	5	36	1709	35	22
113	7	8	401	1	20	709	15	22	1033	3	32	1361	31	20	1721	11	40
137	11	4	409	3	20	733	27	2	1049	5	32	1373	37	2	1733	17	38
149	7	10	421	15	14	757	9	26	1061	31	10	1381	15	34	1741	29	30
157	11	6	433	17	12	761	19	20	1069	13	30	1409	25	28	1753	27	32
173	13	2	449	7	20	769	25	12	1093	33	2	1429	23	30	1777	39	16
181	9	10	457	21	4	773	17	22	1097	29	16	1433	37	8	1789	5	42
193	7	12	461	19	10	797	11	26	1109	25	22	1453	3	38	1801	35	24
229	15	2	509	5	22	809	5	28	1117	21	26	1481	35	16	1861	31	30
233	13	8	521	11	20	821	25	14	1129	27	20	1489	33	20	1873	33	28
241	15	4	541	21	10	829	27	10	1153	33	8	1493	7	38	1877	41	14

*) Ich lasse hier die Tabellen folgen, die ich in dem vorstehenden Aufsatze erwähnt habe. Die Berechnung der Tabellen I. und II. verdanke ich der Gefälligkeit des Herrn Director *Zornow*. Oct. 1845. *J.*

p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b
1889	17	40	2621	11	50	3413	7	58	4201	51	40	4993	63	32	5849	35	68
1901	35	26	2633	43	28	3433	27	52	4217	11	64	5009	65	28	5857	9	76
1913	43	8	2657	49	16	3449	43	40	4229	65	2	5021	11	70	5861	31	70
1933	13	42	2677	39	34	3457	39	44	4241	65	4	5077	71	6	5869	45	62
1949	43	10	2689	33	40	3461	31	50	4253	53	38	5081	59	40	5881	75	16
1973	23	38	2693	47	22	3459	45	38	4261	65	6	5101	51	50	5897	11	76
1993	43	12	2729	5	52	3517	59	6	4273	57	32	5113	53	48	5953	57	52
1997	29	34	2741	25	46	2529	35	48	4289	65	8	5153	23	68	5981	59	50
2017	9	44	2749	43	30	3533	13	58	4297	61	24	5189	17	70	6029	77	10
2029	45	2	2753	7	52	3541	25	54	4337	49	44	5197	29	66	6037	41	66
2053	17	42	2777	29	44	3557	49	34	4349	43	50	5209	5	72	6053	47	62
2069	25	38	2789	17	50	3581	59	10	4357	1	66	5233	7	72	6073	77	12
2081	41	20	2797	51	14	3593	53	28	4373	23	62	5237	71	14	6089	67	40
2089	45	8	2801	49	20	3613	43	42	4397	61	26	5261	70	19	6101	25	74
2113	33	32	2833	23	48	3617	41	44	4409	53	40	5273	67	28	6113	73	28
2129	23	40	2837	41	34	3637	39	46	4421	65	14	5281	41	60	6121	45	64
2137	29	36	2857	51	16	3673	37	48	4441	29	60	5297	71	16	6133	7	78
2141	5	46	2861	19	50	3677	59	14	4457	19	64	5309	53	50	6173	53	58
2153	37	28	2897	31	44	3697	49	36	4481	65	16	5333	73	2	6197	71	34
2161	15	44	2909	53	10	3701	55	26	4493	67	2	5381	65	34	6217	21	76
2213	47	2	2917	1	54	3709	53	30	4513	47	48	5393	73	8	6221	61	50
2221	45	14	2953	53	12	3733	57	22	4517	49	46	5413	63	38	6229	73	30
2237	11	46	2957	29	46	3761	25	56	4549	65	18	5417	59	44	6257	79	4
2269	37	30	2969	37	40	3769	13	60	4561	31	60	5437	69	26	6269	37	70
2273	47	8	3001	51	20	3793	33	52	4597	41	54	5441	71	20	6277	79	6
2281	45	16	3037	11	54	3797	41	46	4621	61	30	5449	43	60	6301	75	26
2293	23	42	3041	55	4	3821	61	10	4637	59	34	5477	1	74	6317	29	74
2297	19	44	3049	45	32	3833	53	32	4649	5	68	5501	5	74	6329	77	20
2309	47	10	3061	55	6	3853	3	62	4657	39	56	5521	65	36	6337	71	36
2333	43	22	3089	55	8	3877	31	54	4673	7	68	5557	9	74	6353	73	32
2341	15	46	3109	47	30	3881	59	20	4721	25	64	5569	63	40	6361	69	40
2457	41	26	3121	39	40	3889	17	60	4729	45	52	5573	47	58	6373	17	78
2377	21	44	3137	1	56	3917	61	14	4733	37	58	5581	35	66	6389	55	58
2381	35	34	3169	55	12	3929	35	52	4789	55	42	5641	75	4	6397	59	54
2389	25	42	3181	45	34	3989	25	58	4793	13	68	5653	73	18	6421	39	70
2393	37	32	3209	53	20	4001	49	40	4801	65	24	5657	61	44	6449	7	80
2417	49	4	3217	9	56	4013	13	62	4813	67	18	5669	65	38	6469	63	50
2437	49	6	3221	55	14	4021	39	50	4817	41	56	5689	75	8	6473	43	68
2441	29	40	3229	27	50	4049	55	32	4861	69	10	5093	43	62	6481	9	80
2473	13	48	2253	57	2	4057	59	24	4877	61	34	5701	15	74	6521	11	80
2477	19	46	3257	11	56	4073	37	52	4889	67	20	5717	71	26	6529	65	48
2521	35	36	3301	49	30	4093	27	58	4909	3	70	5737	51	56	6553	37	72
2549	7	50	3313	57	8	4129	23	60	4933	33	62	5741	29	70	6569	13	80
2557	21	46	3329	25	52	4133	17	62	4937	29	64	5749	57	50	6577	81	4
2593	17	48	3361	15	56	4153	43	48	4957	69	14	5801	5	76	6581	41	70
2609	47	20	3373	3	58	4157	59	26	4969	37	60	5813	73	22	6637	61	54
2617	51	4	3389	5	58	4177	9	64	4973	67	22	5821	75	14	6653	53	62

p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b
6661	81	10	7541	71	50	8329	75	52	9181	91	30	10069	87	50	11057	89	56
6673	63	52	7549	85	18	8353	87	28	9209	53	80	10093	93	38	11069	85	62
6689	17	80	7561	75	44	8369	25	88	9221	95	14	10133	23	98	11093	103	22
6701	35	74	7573	87	2	8377	51	76	9241	5	96	10141	85	54	11113	77	72
6709	25	78	7577	59	64	8389	17	90	9257	59	76	10169	13	100	11117	61	86
6733	3	82	7589	65	58	8429	77	50	9277	21	94	10177	31	96	11149	93	50
6737	31	76	7621	15	86	8461	19	90	9281	95	16	10181	95	34	11161	69	80
6761	19	80	7649	55	68	8501	55	74	9293	77	58	10193	97	28	11177	19	104
6781	75	34	7669	87	10	8513	7	92	9337	11	96	10253	83	58	11197	91	54
6793	67	48	7673	83	28	8521	85	36	9341	85	46	10273	87	52	11213	67	82
6829	77	30	7681	25	84	8537	91	16	9349	95	18	10289	17	100	11257	21	104
6833	47	68	7717	81	34	8573	43	82	9377	79	56	10301	101	10	11261	5	106
6841	21	80	7741	75	46	8581	65	66	9397	71	66	10313	43	92	11273	53	92
6857	61	56	7753	3	88	8597	89	26	9413	97	2	10321	95	36	11317	9	106
6869	55	62	7757	19	86	8609	53	80	9421	45	86	10333	27	98	11321	85	64
6917	79	26	7789	83	30	8629	23	90	9433	93	28	10337	79	64	11329	95	48
6949	15	82	7793	7	88	8641	71	60	9437	91	34	10357	39	94	11353	93	52
6961	81	20	7817	61	64	8669	85	38	9461	25	94	10369	63	80	11369	37	100
6977	71	44	7829	73	50	8677	81	46	9473	97	8	10429	5	102	11393	103	28
7001	35	76	7841	79	40	8681	91	20	9497	61	76	10433	97	32	11437	51	94
7013	17	82	7853	67	58	8689	15	92	9521	89	40	10453	7	102	11489	55	92
7057	1	84	7873	57	68	8693	73	58	9533	53	82	10457	101	16	11497	101	36
7069	75	38	7877	49	74	8713	93	8	9601	95	24	10477	99	26	11549	107	10
7109	47	70	7901	85	26	8737	41	84	9613	3	98	10501	49	90	11593	107	12
7121	55	64	7933	43	78	8741	79	50	9629	5	98	10513	73	72	11597	19	106
7129	27	80	7937	89	4	8753	17	92	9649	57	80	10529	23	100	11617	49	96
7177	11	84	7949	35	82	8761	75	56	9661	69	70	10589	85	58	11621	65	86
7193	67	52	7993	53	72	8821	89	30	9677	29	94	10597	79	66	11633	103	32
7213	83	18	8009	85	28	8837	1	94	9689	35	92	10601	101	20	11657	29	104
7229	85	2	8017	31	84	8849	65	68	9697	81	56	10613	103	2	11677	21	106
7237	81	26	8053	87	22	8861	5	94	9721	75	64	10657	81	64	11681	41	100
7253	23	82	8069	65	62	8893	53	78	9733	97	18	10709	103	10	11689	5	108
7297	39	76	8081	41	80	8929	73	60	9749	55	82	10729	27	100	11701	105	26
7309	35	78	8089	67	60	8933	47	82	9769	45	88	10733	83	62	11717	79	74
7321	61	60	8093	37	82	8941	29	90	9781	41	90	10753	103	12	11777	31	104
7333	63	58	8101	1	90	8969	35	88	9817	99	4	10781	91	50	11789	83	70
7349	25	82	8117	89	14	9001	51	80	9829	15	98	10789	95	42	11801	101	40
7369	85	12	8161	81	40	9013	87	38	9833	37	92	10837	89	54	11813	47	98
7393	47	72	8209	55	72	9029	95	2	9857	89	44	10853	97	38	11821	61	90
7417	19	84	8221	11	90	9041	95	4	9901	99	10	10861	45	94	11833	13	108
7433	53	68	8233	77	48	9049	93	20	9929	85	52	10889	67	80	11897	109	4
7457	41	76	8237	29	86	9109	55	78	9941	71	70	10909	53	90	11909	97	50
7477	9	86	8269	13	90	9133	93	22	9949	43	90	10937	11	104	11933	107	22
7481	85	16	8273	23	88	9137	71	64	9973	57	82	10949	65	82	11941	95	54
7489	33	80	8293	47	78	9157	79	54	10009	3	100	10957	99	34	11953	17	108
7517	11	86	8297	91	4	9161	85	44	10037	89	46	10973	37	98	11969	65	88
7529	77	40	8317	91	6	9173	73	62	10061	35	94	10993	57	88	11981	109	10
7537	79	36															

II. Zerfällung der Primzahlen p von der Form $6n+1$ in ein Quadrat und das Dreifache eines andern Quadrats.

$$p = A^2 + 3B^2.$$

p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B
7	2	1	433	1	12	997	5	18	1567	22	19	2143	46	3	2767	38	21
13	1	2	439	14	9	1009	31	4	1579	16	21	2161	31	20	2791	46	15
19	4	1	457	5	12	1021	7	18	1597	25	18	2179	44	9	2797	47	14
31	2	3	463	10	11	1033	29	8	1609	29	16	2203	4	27	2803	44	17
37	5	2	487	22	1	1039	26	11	1621	13	22	2221	47	2	2833	49	12
43	4	3	499	16	9	1051	32	3	1627	40	3	2239	34	19	2851	52	7
61	7	2	523	4	13	1063	14	17	1657	35	12	2251	8	27	2857	53	4
67	8	1	541	23	2	1069	31	6	1663	34	13	2269	41	14	2887	2	31
73	5	4	547	20	7	1087	2	19	1669	37	10	2281	43	12	2917	53	6
79	2	5	571	8	13	1093	11	18	1693	41	2	2287	10	27	2953	35	24
97	7	4	577	23	4	1117	23	14	1699	32	15	2293	29	22	2971	28	27
103	10	1	601	13	12	1123	16	17	1723	20	21	2311	38	17	3001	53	8
109	1	6	607	10	13	1129	19	16	1741	17	22	2341	37	18	3019	44	19
127	10	3	613	5	14	1153	31	8	1747	40	7	2347	32	21	3037	55	2
139	8	5	619	16	11	1171	32	7	1753	5	24	2371	28	23	3049	43	20
151	2	7	631	22	7	1201	1	20	1759	26	19	2377	5	28	3061	19	30
157	7	6	643	20	9	1213	25	14	1777	7	24	2383	14	27	3067	52	11
163	4	7	661	19	10	1231	34	5	1783	14	23	2389	19	26	3079	14	31
181	13	2	673	25	4	1237	35	2	1789	41	6	2437	43	14	3109	53	10
193	1	8	691	4	15	1249	7	20	1801	37	12	2467	40	17	3121	7	32
199	14	1	709	11	14	1279	14	19	1831	34	15	2473	11	28	3163	56	3
211	8	7	727	22	9	1291	28	13	1861	43	2	2503	50	1	3169	49	16
223	14	3	733	25	6	1297	23	16	1867	28	19	2521	13	28	3181	47	18
229	11	6	739	8	15	1303	34	7	1873	41	8	2539	4	29	3187	40	23
241	7	8	751	26	5	1321	11	20	1879	2	25	2551	26	25	3217	55	8
271	14	5	757	13	14	1327	2	21	1933	31	18	2557	23	26	3229	23	30
277	13	6	769	1	16	1381	37	2	1951	38	13	2593	49	8	3253	35	26
283	16	3	787	28	1	1399	34	9	1987	20	23	2617	43	16	3259	44	21
307	8	9	811	28	3	1423	10	21	1993	35	16	2647	50	7	3271	2	33
313	11	8	823	26	7	1429	29	14	1999	26	21	2659	28	25	3301	43	22
331	16	5	829	23	10	1447	38	1	2011	44	5	2671	22	27	3307	28	29
337	17	4	853	29	2	1453	1	22	2017	17	24	2677	35	22	3313	31	28
349	7	10	859	28	5	1459	28	15	2029	1	26	2683	40	19	3319	38	25
367	2	11	877	17	14	1471	38	3	2053	5	26	2689	31	24	3331	8	33
373	19	2	907	20	13	1483	20	19	2083	44	7	2707	52	1	3343	34	27
379	4	11	919	26	9	1489	17	20	2089	19	24	2713	19	28	3361	17	32
397	17	6	937	13	16	1531	32	13	2113	41	12	2719	14	29	3373	49	18
409	19	4	967	10	17	1543	26	17	2131	16	25	2731	52	3	3391	58	3
421	11	10	991	22	13	1549	31	14	2137	37	16	2749	7	30	3433	19	32

p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B
3457	55	12	4177	17	36	4999	46	31	5827	28	41	6661	37	42	7549	7	50
3463	14	33	4201	43	28	5011	56	25	5839	74	11	6673	79	12	7561	67	32
3469	1	34	4219	56	19	5023	50	29	5851	76	5	6679	46	39	7573	35	46
3499	56	11	4231	58	17	5059	4	41	5857	7	44	6691	8	47	7591	82	17
3511	58	7	4243	64	7	5077	67	14	5869	49	34	6703	34	43	7603	20	49
3517	7	34	4261	53	22	5101	49	30	5881	53	32	6709	19	46	7621	11	50
3529	59	4	4273	65	4	5107	8	41	5923	76	7	6733	49	38	7639	86	9
3541	29	30	4297	35	32	5113	35	36	5953	65	24	6763	80	11	7669	13	50
3547	32	29	4327	38	31	5119	38	35	6007	38	39	6781	73	22	7681	73	28
3559	26	31	4339	64	9	5167	62	21	6037	77	6	6793	61	32	7687	22	49
3571	52	17	4357	5	38	5179	64	19	6043	44	37	6823	14	47	7699	56	39
3583	50	19	4363	16	37	5197	65	18	6067	32	41	6829	79	14	7717	37	46
3607	58	9	4423	34	33	5209	59	24	6073	61	28	6841	67	28	7723	80	21
3613	55	14	4441	37	32	5227	52	29	6079	2	45	6871	82	7	7741	71	30
3631	38	27	4447	58	19	5233	71	8	6091	4	45	6883	16	47	7753	29	48
3637	13	34	4483	40	31	5281	47	32	6121	77	8	6907	80	13	7759	86	11
3643	56	13	4507	20	37	5323	56	27	6133	29	42	6949	59	34	7789	17	50
3673	59	8	4513	25	36	5347	28	39	6151	74	15	6961	7	48	7867	8	51
3691	4	35	4519	62	15	5407	70	13	6163	40	39	6967	82	9	7873	31	48
3697	25	32	4549	43	30	5413	11	42	6199	34	41	6991	38	43	7879	26	49
3709	41	26	4561	47	28	5419	64	21	6211	68	23	6997	83	6	7927	58	39
3727	58	11	4567	2	39	5431	62	23	6217	67	24	7027	20	47	7933	89	2
3733	61	2	4591	22	37	5437	73	6	6229	77	10	7039	58	35	7951	62	37
3739	8	35	4597	67	6	5443	20	41	6247	58	31	7057	73	24	7963	76	27
3769	61	4	4603	64	13	5449	61	24	6271	14	45	7069	71	26	7993	85	16
3793	55	16	4621	17	38	5479	74	1	6277	53	34	7129	77	20	8011	44	45
3823	50	21	4639	46	29	5503	74	3	6301	73	18	7159	46	41	8017	47	44
3847	62	1	4651	68	3	5521	73	8	6337	23	44	7177	37	44	8053	61	38
3853	49	22	4657	65	12	5527	22	41	6343	74	17	7207	2	49	8059	16	51
3877	43	26	4663	10	39	5557	35	38	6361	77	12	7213	79	18	8089	83	20
3889	1	36	4723	56	23	5563	4	43	6367	62	29	7219	4	49	8101	53	42
3907	32	31	4729	29	36	5569	41	36	6373	5	46	7237	85	2	8161	7	52
3919	62	5	4759	14	39	5581	17	42	6379	52	35	7243	56	37	8167	70	33
3931	16	35	4783	26	37	5623	74	7	6397	7	46	7297	65	32	8179	56	41
3943	26	33	4789	67	10	5641	29	40	6421	61	30	7309	31	46	8191	46	45
3967	38	29	4801	1	40	5647	10	43	6433	79	8	7321	83	12	8209	49	44
4003	56	17	4813	65	14	5653	19	42	6451	76	15	7333	85	6	8221	89	10
4021	61	10	4831	34	35	5659	56	29	6469	11	46	7351	74	25	8233	11	52
4027	52	21	4861	23	38	5683	64	23	6481	41	44	7369	59	36	8263	86	17
4051	28	33	4903	70	1	5689	67	20	6529	73	20	7393	71	28	8269	79	26
4057	13	36	4909	47	30	5701	37	38	6547	80	7	7411	28	47	8287	22	51
4093	25	34	4933	59	22	5737	43	36	6553	59	32	7417	85	8	8293	91	2
4099	64	1	4951	58	23	5743	14	43	6571	32	43	7459	16	49	8311	82	23
4111	2	37	4957	25	38	5749	61	26	6577	65	28	7477	83	14	8317	55	42
4129	49	24	4969	13	40	5779	76	1	6607	50	37	7489	41	44	8329	91	4
4153	61	12	4987	68	11	5791	46	35	6619	64	29	7507	68	31	8353	89	12
4159	22	35	4993	65	16	5821	23	42	6637	17	46	7537	25	48	8377	67	36

p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B	p	A	B
8389	91	6	8941	79	30	9547	92	19	10099	32	55	10753	95	24	11353	91	32
8419	88	15	8971	92	13	9601	97	8	10111	98	13	10771	32	57	11383	106	7
8431	2	53	9001	77	32	9613	95	14	10141	7	58	10789	101	14	11437	97	26
8443	4	53	9007	70	37	9619	88	25	10159	94	21	10831	82	37	11443	80	41
8461	31	50	9013	61	42	9631	98	3	10177	97	16	10837	67	46	11467	32	59
8467	92	1	9043	76	33	9643	64	43	10243	100	9	10861	97	22	11491	104	15
8521	61	40	9049	91	16	9649	89	24	10267	88	29	10867	100	17	11497	107	4
8527	10	53	9067	88	21	9661	73	38	10273	89	28	10891	104	5	11503	86	37
8539	92	5	9091	4	55	9679	98	5	10303	50	51	10903	34	57	11527	70	47
8563	44	47	9103	26	53	9697	17	56	10321	47	52	10909	103	10	11551	74	45
8581	91	10	9109	19	54	9721	53	48	10333	71	42	10939	56	51	11587	100	23
8599	82	25	9127	50	47	9733	91	22	10357	83	34	10957	47	54	11593	59	52
8623	14	53	9133	95	6	9739	44	51	10369	31	56	10987	92	29	11617	47	56
8629	77	30	9151	74	35	9769	19	56	10399	82	35	10993	89	32	11677	73	46
8641	23	52	9157	53	46	9781	67	42	10429	41	54	11047	62	49	11689	83	40
8647	38	49	9181	41	50	9787	92	21	10453	19	58	11059	104	9	11701	13	62
8677	85	22	9187	68	39	9811	8	57	10459	4	59	11071	86	35	11719	94	31
8689	89	16	9199	94	11	9817	77	36	10477	95	22	11083	100	19	11731	92	33
8707	92	9	9241	83	28	9829	59	46	10501	101	10	11113	85	36	11743	106	13
8713	91	12	9277	23	54	9859	28	55	10513	49	52	11119	26	59	11779	52	55
8719	86	21	9283	80	31	9871	38	53	10531	28	57	11131	52	53	11821	17	62
8731	68	37	9319	46	49	9883	76	37	10567	58	49	11149	49	54	11827	68	49
8737	25	52	9337	35	52	9901	49	50	10597	43	54	11161	19	60	11833	61	52
8761	43	48	9343	94	13	9907	52	49	10627	88	31	11173	101	18	11839	26	61
8779	52	45	9349	43	50	9931	88	27	10639	14	59	11197	103	14	11863	46	57
8803	40	49	9391	62	43	9949	89	26	10651	92	27	11239	106	1	11887	38	59
8821	67	38	9397	77	34	9967	98	11	10657	103	4	11251	68	47	11923	4	63
8839	94	1	9403	40	51	9973	35	54	10663	86	33	11257	43	56	11941	43	58
8863	94	3	9421	97	2	10009	91	24	10687	98	19	11287	82	39	11953	71	48
8887	62	41	9433	5	56	10039	74	39	10711	94	25	11299	64	49	11959	86	39
8893	89	18	9439	58	45	10069	61	46	10723	64	47	11317	35	58	11971	8	63
8923	80	29	9463	70	39	10093	1	58	10729	77	40	11329	23	60	12007	10	63
8929	71	36	9511	94	15												

III. Tabelle für die Zerfällung der Primzahlen von der Form $8n+1$ in ein Quadrat und das Doppelte eines andern Quadrats *).

$$p = cc + 2dd.$$

p	c	d	p	c	d	p	c	d	p	c	d	p	c	d	p	c	d
17	3	2	857	27	8	1777	25	24	2753	21	34	3793	61	6	4801	47	36
41	3	4	881	9	20	1801	1	30	2777	27	32	3833	39	34	4817	57	28
73	1	6	929	27	10	1873	35	18	2801	51	10	3881	3	44	4889	69	8
89	9	2	937	17	18	1889	33	20	2833	41	24	3889	19	42	4937	63	22
97	5	6	953	21	16	1913	39	14	2857	47	18	3929	27	40	4969	19	48
113	9	4	977	3	22	1993	29	24	2897	3	38	4001	63	4	4993	49	36
137	3	8	1009	19	18	2017	37	18	2953	19	36	4049	57	20	5009	3	50
193	11	6	1033	31	6	2081	27	26	2969	9	38	4057	23	42	5081	9	50
233	15	2	1049	9	22	2089	17	30	3001	43	24	4073	45	32	5113	71	6
241	13	6	1097	33	2	2113	31	24	3041	27	34	4129	59	18	5153	69	14
257	15	4	1129	29	12	2129	9	32	3049	49	18	4153	25	42	5209	41	42
281	9	10	1153	1	24	2137	43	12	3089	39	28	4177	55	24	5233	25	48
313	5	12	1193	15	22	2153	45	8	3121	23	36	4201	49	30	5273	69	16
337	7	12	1201	7	24	2161	19	30	3137	33	32	4217	57	22	5281	59	30
353	15	8	1217	33	8	2273	15	32	3169	37	30	4241	3	46	5297	57	32
401	3	14	1249	31	12	2281	47	6	3209	3	40	4273	41	36	5393	39	44
409	11	12	1289	33	10	2297	27	28	3217	25	36	4289	33	40	5417	3	52
433	19	6	1297	35	6	2377	35	24	3257	57	2	4297	65	6	5441	21	50
449	21	2	1321	13	24	2393	9	34	3313	55	12	4337	45	34	5449	29	48
457	13	12	1361	3	26	2417	45	14	3329	21	38	4409	39	38	5521	61	30
521	3	16	1409	21	22	2441	33	26	3361	47	24	4441	43	36	5569	31	48
569	21	8	1433	9	26	2473	49	6	3433	29	36	4457	15	46	5641	67	24
577	17	12	1481	33	14	2521	37	24	3449	57	10	4481	63	16	5657	75	4
593	9	16	1489	29	18	2593	1	36	3457	53	18	4513	65	12	5689	71	18
601	23	6	1553	39	4	2609	51	2	3529	1	42	4561	67	6	5737	47	42
617	15	14	1601	33	16	2617	5	36	3593	45	28	4649	51	32	5801	51	40
641	21	10	1609	31	18	2633	51	4	3617	27	38	4657	7	48	5849	21	52
673	5	18	1657	37	12	2657	33	28	3673	55	18	4673	21	46	5857	5	54
761	27	4	1697	27	22	2689	49	12	3697	13	42	4721	39	40	5881	7	54
769	11	18	1721	39	10	2713	11	36	3761	57	16	4729	11	48	5897	45	44
809	3	20	1753	41	6	2729	51	8	3769	59	12	4793	69	4	5953	11	54

*) Der verstorbne Director des altstädtischen Gymnasiums in Königsberg i. Pr., Dr. *Struve*, einer der geistreichsten Philologen, machte mir sehr umfangreiche Papiere zum Geschenk, welche die Zerfällungen aller geraden Zahlen bis 12000 in drei Quadrate enthalten. Aus diesen ist die vorstehende Tabelle entnommen. Leider sind in diesen Berechnungen, welche von ihm zur Zerstreuung in einer schweren Krankheit unternommen wurden, bisweilen einige der oft sehr zahlreichen Zerfällungen einer Zahl ausgelassen, wodurch der Werth dieser mühevollen und interessanten Arbeit verringert wird.

IV. Tabelle der Zahlen m' für das Argument m *).

$$1 + g^m \equiv g^{m'} \pmod{p}.$$

p	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103
g	3	2	6	10	10	10	10	17	5	6	28	10	26	10	10	12	62	5	29	50	30	10	2	35
m																								
0	2	1	5	10	17	8	11	12	11	26	39	30	25	25	47	29	58	8	50	3	72	86	1	70
1	4	8	7	13	6	3	23	8	9	39	25	27	27	45	45	23	69	14	77	56	57	82	69	74
2	1	4	11	8	4	18	3	29	24	32	6	38	33	43	35	61	43	67	18	72	4	76	24	60
3	*	6	4	2	13	14	17	18	35	27	20	22	15	54	28	56	59	53	51	52	66	26	38	100
4	5	9	2	7	12	5	8	6	16	17	22	24	46	33	12	37	20	47	73	25	55	1	30	16
5	3	*	8	9	16	9	26	9	7	11	14	12	24	21	32	6	52	23	66	76	80	40	82	96
6	.	5	*	1	3	21	24	26	20	20	11	43	13	1	57	25	33	16	70	81	76	33	90	36
7	.	3	3	5	14	13	9	23	25	23	33	23	28	9	6	21	24	32	29	23	40	39	11	49
8	.	2	10	*	9	20	13	22	5	3	10	6	5	42	49	47	37	6	23	38	3	61	37	76
9	.	7	1	14	*	19	15	28	28	34	1	4	50	19	2	58	4	55	36	22	26	64	3	53
10	.	.	9	11	1	17	20	5	27	18	37	11	1	48	56	44	61	27	56	68	69	12	93	99
11	.	.	6	4	7	*	27	21	34	7	40	39	40	8	22	43	53	40	39	44	48	88	91	88
12	.	.	.	3	15	7	19	13	6	22	28	45	8	27	17	52	30	9	42	4	43	21	65	35
13	.	.	.	15	11	10	25	24	3	4	12	21	45	37	55	4	10	54	3	77	45	56	71	31
14	.	.	.	6	8	12	*	17	15	29	7	17	37	31	29	41	6	33	20	40	20	92	86	4
15	.	.	.	12	10	6	12	*	10	12	38	25	17	28	31	3	54	11	74	42	34	69	62	72
16	.	.	.	.	.	2	15	7	3	29	9	31	34	22	30	20	24	25	1	63	61	15	57	21	79
17	.	.	.	.	.	5	4	16	11	21	5	36	2	16	6	30	15	40	39	49	31	24	85	98	43
18	.	.	.	.	.	.	1	10	1	*	19	21	14	4	12	52	2	46	49	7	66	71	5	49	19
19	.	.	.	.	.	.	11	6	10	4	21	32	5	39	39	38	45	50	45	72	69	41	90	51	51
20	.	.	.	.	.	.	16	5	25	13	*	8	29	30	56	10	30	13	62	24	57	81	31	74	84
21	.	.	.	.	.	.	2	2	19	31	2	*	15	3	3	24	18	32	20	62	19	11	63	63	66
22	.	.	.	.	.	.	.	18	14	1	1	30	35	14	26	48	11	7	59	34	2	47	73	36	50
23	.	.	.	.	.	.	.	21	16	26	28	13	*	18	11	21	36	35	58	60	28	14	29	8	52
24	.	.	.	.	.	.	.	4	20	30	33	3	13	35	23	1	20	38	12	55	9	82	7	70	15
25	.	.	.	.	.	.	.	14	4	23	37	19	40	9	32	43	42	3	4	33	59	54	70	13	59
26	.	.	.	.	.	.	.	1	2	17	15	15	9	*	18	40	31	45	56	13	17	38	46	78	40
27	.	.	.	.	.	.	.	22	15	19	31	23	32	36	49	36	65	21	3	44	51	62	87	45	7
28	.	.	.	.	.	.	.	.	27	33	10	35	42	11	5	7	35	15	64	21	60	44	50	76	67
29	.	.	.	.	.	.	.	.	7	18	36	41	31	47	*	23	9	8	34	26	39	1	37	95	21
30	.	.	.	.	.	.	.	.	.	14	8	16	18	44	35	*	12	26	2	35	36	9	34	39	8
31	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	25	29	10	34	22	54	16	5	38	45	43	39	24	33	24
32	.	.	.	.	.	.	.	.	.	12	35	27	3	10	50	39	60	22	21	11	15	50	16	55	101
33	.	.	.	.	.	.	.	.	.	32	16	34	8	20	7	9	*	34	24	58	29	10	47	40	71
34	.	.	.	.	.	.	.	.	.	22	14	2	33	38	57	14	28	36	28	43	35	23	49	44	17
35	.	.	.	.	.	.	.	.	.	8	6	26	28	51	46	18	51	*	15	54	46	21	30	27	90
36	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	13	5	1	6	4	37	48	2	*	10	54	49	94	64	9
37	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	24	9	41	2	40	58	46	1	52	38	8	64	65	12	62
38	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	30	18	44	23	36	26	7	60	66	40	79	68	48	25	41
39	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	38	17	16	32	20	3	38	44	63	*	20	36	75	96	86
40	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	37	48	52	50	5	66	61	2	47	86	59	56	46
41	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	24	7	29	47	19	17	49	7	1	*	5	17	61	37

*) Diese Tabelle ist während der Wintervorlesungen 1836—37 von meinen Zuhörern berechnet worden. Vermittelst des seitdem von mir herausgegebnen *Canon Arithmeticus* (Berlin 1839 bei Dümmler) kann dieselbe leicht auf alle Primzahlen unter 1000 ausgedehnt werden. Setzt man nämlich für eine Primzahl p unter 1000 eine Zahl der dort mit *Indices* überschriebnen Tabelle $= m$, so wird die unmittelbar folgende der Tabelle der entsprechende Werth von m'.

p	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103
g	10	26	10	10	12	62	5	29	50	30	10	2	35
m													
42	20	43	14	34	62	57	44	52	7	84	67	15	27
43	19	41	13	13	13	64	5	19	63	28	13	60	22
44	36	49	17	4	55	19	36	9	41	*	62	41	20
45	26	21	24	16	63	48	48	25	53	73	44	79	56
46	.	7	15	15	10	14	30	57	18	42	84	89	48
47	.	19	55	42	26	12	51	14	11	52	3	6	10
48	.	42	38	5	50	55	60	5	1	46	*	67	61
49	.	12	10	11	64	11	35	75	78	85	52	99	54
50	.	31	34	46	8	63	37	71	65	30	38	*	83
51	.	26	2	53	54	31	71	17	12	27	95	50	*
52	.	.	53	41	27	28	42	65	6	13	18	19	33
53	.	.	16	59	57	23	26	8	10	74	66	59	5
54	.	.	29	51	40	9	31	31	32	77	25	43	13
55	.	.	51	27	32	39	22	37	24	65	72	34	65
56	.	.	41	8	34	62	57	12	73	18	19	97	2
57	.	.	44	25	49	67	68	41	34	8	36	17	11
58	.	.	.	.	33	39	18	19	4	67	67	10	73	78
59	.	.	.	.	44	14	42	41	53	5	60	28	20	81
60	.	.	.	.	.	19	51	69	67	62	16	58	16	87
61	.	.	.	.	.	1	65	29	32	80	35	91	57	98
62	.	.	.	.	.	33	29	17	47	37	12	15	87	6
63	.	.	.	.	.	53	17	46	59	50	29	14	75	47
64	.	.	.	.	.	59	27	70	6	48	58	80	28	3
65	.	.	.	.	.	22	47	25	68	14	79	89	92	25
66	.	.	.	.	.	.	16	10	30	45	25	4	10	75
67	.	.	.	.	.	.	56	18	28	27	78	8	7	55
68	.	.	.	.	.	.	41	43	46	26	61	22	23	85
69	.	.	.	.	.	.	68	50	27	64	22	60	2	38
70	.	.	.	.	.	.	.	65	15	74	53	20	9	69
71	.	.	.	.	.	.	.	13	22	33	7	45	66	95
72	.	.	.	.	.	.	.	.	64	58	87	79	48	80
73	.	.	.	.	.	.	.	.	61	13	19	6	18	94
74	.	.	.	.	.	.	.	.	69	30	6	51	52	39
75	.	.	.	.	.	.	.	.	48	16	32	42	88	82
76	.	.	.	.	.	.	.	.	16	75	31	11	46	14
77	.	.	.	.	.	.	.	.	76	71	37	71	85	34
78	.	.	.	.	.	.	.	.	.	21	59	83	14	93
79	.	.	.	.	.	.	.	.	.	49	17	68	42	29
80	.	.	.	.	.	.	.	.	.	70	83	41	54	28
81	.	.	.	.	.	.	.	.	.	55	33	54	32	45
82	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	70	78	31	64
83	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	75	43	81	32
84	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	51	9	5	1
85	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	63	77	47	26
86	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	2	72	63
87	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	56	55	58	57
88	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	53	53	92
89	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	32	80	18
90	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	27	83	23
91	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	35	94	77
92	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	93	29	89
94	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	23	4	44
93	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	74	84	68
95	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	81	77	42

p	101	103
g	2	35
m		
96	26	30
97	35	91
98	22	12
99	68	97
100		58
101		73
102		

13.

Note sur les fonctions Abéliennes

par M. *C. G. J. Jacobi*, lue le 29 mai 1843.

(Tiré du *Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Acad. Imp. des sciences de St. Pétersbourg Tome II. No. 7.*)

Soit X une fonction rationnelle et entière de x du sixième degré, et nommons Y la même fonction de y; soit de plus

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Pi(x), \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Pi_1(x).$$

Déterminons deux quantités x et y en fonctions de u et v par les équations simultanées

$$\Pi(x)+\Pi(y) = u, \qquad \Pi_1(x)+\Pi_1(y) = v,$$

j'ai fait voir que ce sont ces fonctions de deux variables,

$$x = \lambda(u, v), \qquad y = \lambda_1(u, v),$$

qu'il convient d'introduire dans l'analyse des transcendantes *Abéliennes*, et qui sont analogues aux fonctions trigonométriques et elliptiques. Or je viens de trouver, ***que ces fonctions de deux variables se composent algébriquement de fonctions d'une seule variable.*** En effet, nommons x' et y' les valeurs de x et de y, que l'on tire des deux équations transcendantes simultanées, en mettant $v = 0$, et soient x'' et y'' celles qui répondent à $u = 0$: on aura

$$\Pi(x')+\Pi(y') = u, \qquad \Pi_1(x')+\Pi_1(y') = 0,$$
$$\Pi(x'')+\Pi(y'') = 0, \qquad \Pi_1(x'')+\Pi_1(y'') = v,$$

d'où il suit,

$$\Pi(x')+\Pi(y')+\Pi(x'')+\Pi(y'') = u,$$
$$\Pi_1(x')+\Pi_1(y')+\Pi_1(x'')+\Pi_1(y'') = v.$$

Mais, d'après le théorème d'*Abel*, on sait exprimer deux quantités x et y en fonctions *algébriques* des quatre variables x', x'', y', y'', de manière que l'on a les deux équations

$$u = \Pi(x')+\Pi(y')+\Pi(x'')+\Pi(y'') = \Pi(x)+\Pi(y),$$
$$v = \Pi_1(x')+\Pi_1(y')+\Pi_1(x'')+\Pi_1(y'') = \Pi_1(x)+\Pi_1(y).$$

Donc les deux fonctions x et y déterminées par les équations simultanées

$$\Pi(x)+\Pi(y) = u, \qquad \Pi_1(x)+\Pi_1(y) = v,$$

sont des fonctions algébriques des quatre quantités x', x'', y', y'', qui ne sont

elles-mêmes que des fonctions d'une seule variable, ou en d'autres termes, *les deux fonctions de deux variables* $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$ *s'expriment algébriquement par les quatre fonctions d'une seule variable*

$$\lambda(u, o), \quad \lambda_1(u, o),$$
$$\lambda(o, v), \quad \lambda_1(o, v).$$

La même remarque s'applique aux transcendantes ***Abéliennes***, dans lesquelles la fonction X est d'un degré quelconque *).

---

*) Dans un mémoire publié dans le vol. 27 du Journal de M. ***Crelle*** page 185, M. ***Eisenstein*** s'est mépris sur la nature des fonctions $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, faute d'avoir bien saisi le principe fondamental de la coëxistence des périodes relatives aux deux argumens u et v. Le mémoire „Sur les fonctions à deux variables et à quatre périodes" tome XIII page 55 a posé les vrais principes dans cette branche nouvelle de l'analyse.

On sait que la fonction $x = \sin\mathrm{am}(u)$ est donnée en u au moyen d'une équation *linéaire*, $A + Bx = 0$, A et B étant des fonctions de u qui ont une valeur unique et finie pour chaque valeur finie, réelle ou imaginaire, de l'argument u. D'une manière analogue, étant données les deux équations établies ci-dessus,

$$\Pi(x) + \Pi(y) = u, \qquad \Pi_1(x) + \Pi_1(y) = v,$$

les quantités x et y se trouvent être les deux racines d'une équation *quadratique*

$$A + Bt + Ct^2 = 0,$$

où A, B, C sont des fonctions de u et v qui ont une valeur unique et finie pour toutes les valeurs finies, réelles ou imaginaires des deux argumens u et v. C'est là la véritable nature des fonctions x et y. Le caractère de la fonction $\sin\mathrm{am}(u)$ étant d'être un *quotient* $-\frac{B}{A}$, M. ***Eisenstein*** dit (pg. 180), que, par analogie, dans la théorie des intégrales Abéliennes il faudrait considérer *des quotients de quotients*. Mais qu'est ce que c'est que *des quotients de quotients?* C'est tout simplement *des quotients*.

Dans le même mémoire M. ***Eisenstein*** a considéré certains produits doublement infinis, que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques, et qu'il n'a pas reconnus être du nombre de ceux qui prennent des valeurs différentes suivant l'ordre dans lequel on range les facteurs. Ces erreurs, ayant été reproduites dans un autre mémoire (page 285 du même volume), ont été la cause, que M. ***Eisenstein*** y a établi des formules fautives relatives aux fonctions $\Theta(x)$. Les formules exactes ont été données depuis longtemps dans le mémoire tome IV pg. 382.

Oct. 1845. ***J.***

14.

Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn Dr. phil. *G. Eisenstein* zu Berlin.)

I. Ableitung des biquadratischen Fundamentaltheorems aus der Theorie der Lemniscatenfunctionen, nebst Bemerkungen zu den Multiplications- und Transformationsformeln.

1.

Wenn $a+bi=m$ irgend eine ungerade complexe ganze Zahl vorstellt, und $a^2+b^2=p=N(m)$ gesetzt wird, so ist das Integral der Differenzialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^4)}} = (a+bi)\cdot\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

wenn y mit x zugleich verschwinden soll, von der Form:

$$(2.)\qquad y = x\,\frac{A_0+A_1x^4+A_2x^8+\ldots+A_{\frac{1}{4}(p-1)}x^{p-1}}{1+B_1x^4+B_2x^8+\ldots+B_{\frac{1}{4}(p-1)}x^{p-1}} = \frac{U}{V},$$

wo die Coëfficienten A_0, A_1 etc. B_1 etc. *ganze complexe* Zahlen sind. In dieser Form des Integrals werden Zähler und Nenner keinen algebraischen und selbst keinen numerischen gemeinschaftlichen Theiler haben. Es kommt darauf an, die noch unbekannten ganzen Coëfficienten zu finden, oder wenigstens diejenigen ihrer Eigenschaften zu entdecken, welche hier nöthig sein werden.

Man zeigt leicht, dafs $A_0=m$ ist; denn A_0 ist der Werth von $\frac{y}{x}$ für $x=0$, also $A_0=\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x=0$; nun verschwindet y mit x zugleich, also giebt die Differenzialgleichung (1.) für $x=0$, $\frac{\partial y}{\partial x}=m$.

Setzt man in (1.) und (2.) $x=\frac{1}{i^\mu\xi}$, $y=\frac{1}{\eta}$, und disponirt über die ganze Zahl μ auf passende Weise, so erhält man

$$\frac{\partial\eta}{\sqrt{(1-\eta^4)}} = m\,\frac{\partial\xi}{\sqrt{(1-\xi^4)}},$$

$$\eta = i^\mu\xi\,\frac{B_{\frac{1}{4}(p-1)}+B_{\frac{1}{4}(p-5)}\xi^4+\ldots+B_1\xi^{p-5}+\xi^{p-1}}{A_{\frac{1}{4}(p-1)}+A_{\frac{1}{4}(p-5)}\xi^4+\ldots+A_1\xi^{p-5}+\xi^{p-1}};$$

also ist auch

$$(3.) \qquad y = i^{\mu} x \frac{B_{\frac{1}{4}(p-1)} + \ldots + x^{p-1}}{A_{\frac{1}{4}(p-1)} + \ldots + A_0 x^{p-1}}$$

ein Integral der Differenzialgleichung (1.), und da dieses ebenfalls mit x zugleich verschwindet, mithin mit (2.) identisch sein mufs, auch Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so müssen Zähler und Nenner des neuen und des alten y aus (3.) und aus (2.), abgesehen von einer complexen Einheit, einzeln verglichen mit einander übereinstimmen. Eine solche Vergleichung giebt:

$$(4.) \qquad A_0 = i^{\nu} B_{\frac{1}{4}(p-1)}, \quad A_1 = i^{\nu} B_{\frac{1}{4}(p-5)}, \quad \ldots \quad A_{\frac{1}{4}(p-5)} = i^{\nu} B_1, \quad A_{\frac{1}{4}(p-1)} = i^{\nu}.$$

Der Exponent ν ist eine noch unbestimmte ganze Zahl. Um ihn zu bestimmen und die nachfolgenden Untersuchungen mit gröfserer Leichtigkeit zu führen, sei allgemein $\varphi(t)$ diejenige Function von t, welche mit t zugleich verschwindet und der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \sqrt{(1 - \varphi(t)^4)}.$$

Aufserdem setze man

$$\omega = 4\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{\sqrt{(2\pi)}}, \text{ so dafs } \varphi\left(\frac{\omega}{4}\right) = 1 \text{ wird.}$$

Die Function $\varphi(t)$ ist complex periodisch, und man hat $\varphi(t + k\omega) = \varphi(t)$, wenn k irgend eine ganze complexe Zahl vorstellt. Die Fundamental-Eigenschaften der Function φ sind durch die beiden Gleichungen gegeben:

$$\varphi(it) = i\varphi(t) \quad \text{und}$$

$$\varphi(t + t') = \frac{\varphi(t)\sqrt{(1-\varphi(t')^4)} + \varphi(t')\sqrt{(1-\varphi(t)^4)}}{1 + \varphi(t)^2 \varphi(t')^2}.$$

Hieraus und aus der erwähnten Periodicität, die sich aus den Fundamentalgleichungen unmittelbar ergiebt, leitet man leicht die Formel ab:

$$\varphi\left[(2\alpha + 1 + 2\beta i)\frac{\omega}{4}\right] = (-1)^{\alpha+\beta},$$

wenn α und β zwei reelle ganze Zahlen sind. Das Integral (2.) der Differenzialgleichung (1.) läfst sich jetzt in folgender Form schreiben:

$$\varphi(mt) = \varphi(t) \cdot \frac{A_0 + A_1 \varphi(t)^4 + \ldots + A_{\frac{1}{4}(p-1)} \varphi(t)^{p-1}}{1 + B_1 \varphi(t)^4 + \ldots + B_{\frac{1}{4}(p-1)} \varphi(t)^{p-1}}.$$

Um nun den Werth von ν in (4.) zu bestimmen, setze man statt t den speciellen Werth $\frac{\omega}{4}$, so dafs $\varphi(t) = 1$ wird: da für diesen Werth, wenn man noch a ungerade $= 2\alpha + 1$, b gerade $= 2\beta$ annimmt, nach dem vorhin Be-

merkten $\varphi(mt) = \varphi\left(m \cdot \frac{\omega}{4}\right)$ in $(-1)^{\alpha+\beta}$ übergeht, so erhält man aus der eben geschriebenen Formel

$$(-1)^{\alpha+\beta} = \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_{\frac{1}{4}(p-1)}}{1 + B_1 + \ldots + B_{\frac{1}{4}(p-1)}}$$

für einen Werth von m, dessen reeller Theil ungerade, Coëfficient von i gerade ist, also kommt, wenn man für A_0, A_1 etc. die Werthe durch die B aus (4.) einsetzt:

$$(-1)^{\alpha+\beta} = i^{\nu} \frac{B_{\frac{1}{4}(p-1)} + B_{\frac{1}{4}(p-5)} + \ldots + B_1 + 1}{1 + B_1 + \ldots + B_{\frac{1}{4}(p-5)} + B_{\frac{1}{4}(p-1)}}, \text{ welches } = i^{\nu},$$

weil Zähler und Nenner hier einander gleich sind und nicht zugleich verschwinden können; mithin $i^{\nu} = (-1)^{\alpha+\beta}$.

Für alle Fälle reicht es hin, *m primär,* nach der von *Gauſs* diesem Worte beigelegten Bedeutung, d. h. $\equiv 1 \pmod{2+2i}$ zu nehmen, denn alle möglichen complexen ungeraden Zahlen lassen sich aus den primären durch Multiplication mit complexen Einheiten ± 1, $\pm i$ ableiten. Für einen primären Werth von m ist $\alpha + \beta$ gerade, also $i^{\nu} = +1$, mithin werden die Multiplicationsformeln für einen *primären* Werth von m, ***aber nur für einen solchen,*** von der Form:

$$(5.) \qquad \varphi(mt) = \varphi(t) \frac{m + A_1 \varphi(t)^4 + \ldots + \varphi(t)^{p-1}}{1 + A_{\frac{1}{4}(p-5)} \varphi(t)^4 + \ldots + m\varphi(t)^{p-1}},$$

$$y = \frac{mx + A_1 x^5 + \ldots + x^p}{1 + A_{4(p-5)} x^4 + \ldots + m x^{p-1}} = \frac{U}{V}.$$

Wir kommen jetzt zu einem Satze, welcher die Grundlage für alle Anwendungen der Lemniscatentheilung auf Zahlentheorie zu bilden scheint und welcher um so merkwürdiger ist, da er sich ganz einfach aus der Differenzialgleichung ableiten läfst. Es ist der folgende:

„Wenn m eine ***zweigliedrige*** complexe ***Primzahl,*** also p eine reelle Primzahl $\equiv 1 \pmod 4$ ist, so sind alle Coëfficienten des Zählers U bis auf den letzten, so wie alle Coëfficienten des Nenners V bis auf den ersten durch m theilbar."

In der That, setzt man $y = \frac{U}{V}$ in die Differenzialgleichung (1.) ein, so kommt

$$V \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial V}{\partial x} = m \cdot \frac{\sqrt{(V^4 - U^4)}}{\sqrt{(1 - x^4)}}.$$

Hieraus folgt einerseits, dafs der Ausdruck $\frac{\sqrt{(V^4 - U^4)}}{\sqrt{(1-x^4)}}$ einer ganzen Function von x^4 gleich ist, welche wir durch T bezeichnen wollen. Andrerseits ist $V^4 - U^4$ eine ganze Function von x^4 mit *ganzen* complexen Coëfficienten,

deren constantes Glied $=1$ ist, und welche für $x^4=1$ verschwindet, also ist V^4-U^4 durch $1-x^4$ theilbar und $\frac{V^4-U^4}{1-x^4}=T^2$ eine ganze Function von x^4 mit *ganzen* Coëfficienten, deren constantes Glied (erster Coëfficient) $=1$; mithin mufs auch T selbst, welches schon als ganze Function erkannt wurde, lauter *ganze* Coëfficienten haben. Da nun

$$V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}=mT$$

war, so folgt hieraus

$$V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}\equiv 0 \pmod{m},$$

eine Congruenz, welche in dem Sinne zu verstehen, dafs jeder Coëfficient in der nach Potenzen von x geordneten linken Seite durch m theilbar ist. Entwickelt man wirklich, nach den Formeln

$$\frac{\partial U}{\partial x}=A_0+5A_1x^4+9A_2x^8+13A_3x^{12}+\ldots.$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}=4B_1x^3+8B_2x^7+12B_3x^{11}+\ldots.,$$

so kommt

$$V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}=A_0+(-3A_0B_1+5A_1)x^4+(-7A_0B_2+A_1B_1+9A_2)x^8$$
$$+(-11A_0B_3-3A_1B_2+5A_2B_1+13A_3)x^{12}+\text{etc.}$$

Da nun hier jeder einzelne Coëfficient durch m theilbar sein soll, und für eine *zweigliedrige Primzahl* m die numerischen Factoren 5, 9, 13, ..., $p-4$ nicht durch m aufgehen, so ersieht man, wenn die schon gewonnenen Congruenzen bei jeder folgenden mitbenutzt werden, dafs $A_0, A_1, A_2, \ldots. A_{\frac{1}{4}(p-5)}$ nothwendig durch m theilbar sein müssen. Z. B. A_0 so wie $-3A_0B_1+5A_1$ sind durch m theilbar, also auch $5A_1$; aber 5 ist nicht durch m theilbar, also mufs es A_1 sein; ferner geht m in $-7A_0B_2+A_1B_1+9A_2$ auf, aber auch in A_0 und A_1, wie eben gefunden, mithin auch in $9A_2$, also in A_2, da 9 nicht durch m theilbar, und in derselben Weise fort. Auf den letzten Coëfficienten $A_{\frac{1}{4}(p-1)}$ läfst sich diese Art zu schliefsen nicht mehr anwenden, da sehr wohl $pA_{\frac{1}{4}(p-1)}$ durch m theilbar sein kann und sein mufs, ohne dafs $A_{\frac{1}{4}(p-1)}$ es zu sein braucht. Ebenso wenig kann man diese Schlüsse anwenden, wenn m eine *eingliedrige* Primzahl ist: in diesem Falle werden mehrere der Zahlen

$$5, 9, 13, \ldots., p-4$$

durch m theilbar.

Wir sehen also: „dafs für jede primäre *zweigliedrige* complexe *Prim-*„*zahl* m $\varphi(mt)$ sich auf die Form bringen läfst:

$$(6.) \qquad \varphi(mt) = \varphi(t) \cdot \frac{m\mathfrak{F} + \varphi(t)^{p-1}}{1 + m\mathfrak{G}},$$

„wo $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ *ganze* Functionen von $\varphi(t)^4$ mit *ganzen* complexen Coëffi-„cienten sind."

Beispiele. Für $m = -1+2i$, $p = 5$ wird $y = \frac{(-1+2i)x + x^5}{1+(-1+2i)x^4}$; für $m = 3+2i$, $p = 13$ wird

$$y = \frac{(3+2i)x + (7-4i)x^5 + (-11+10i)x^9 + x^{13}}{1+(-11+10i)x^4 + (7-4i)x^8 + (3+2i)x^{12}},$$

und man hat

$$7-4i = (3+2i)(1-2i), \qquad -11+10i = (3+2i)(-1+4i),$$

so dafs

$$\mathfrak{F} = 1+(1-2i)x^4+(-1+4i)x^8,$$
$$\mathfrak{G} = (-1+4i)x^4+(1-2i)x^8+x^{12}.$$

Für $m = 1+4i$, $p = 17$ sind die Coëfficienten des Zählers U nach der Reihe:

$$1+4i, \quad -20-12i = (1+4i)(-4+4i), \quad -10+28i = (1+4i)(6+4i),$$
$$12-20i = (1+4i)(-4-4i), \quad 1.$$

Um auch davon ein Beispiel zu geben, dafs der Satz für Nichtprimzahlen seine Gültigkeit verliert, betrachte man die Coëfficienten des Zählers für $m = 5$, $p = 25$, welche

$$5, \quad -62, \quad -105, \quad 300, \quad -125, \quad 50, \quad 1$$

sind, wo -62 nicht durch 5 theilbar ist.

2.

Ein complexes Restensystem für den (ungeraden, primären) Modul m läfst sich, nach Ausschliefsung des durch den Modul theilbaren Gliedes, auf viele Arten folgendermafsen gruppiren:

$$(7.) \quad \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} r_1 & ir_1 & -r_1 & -ir_1 \\ r_2 & ir_2 & -r_2 & -ir_2 \\ r_3 & ir_3 & -r_3 & -ir_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{\frac{1}{4}(p-1)} & ir_{\frac{1}{4}(p-1)} & -r_{\frac{1}{4}(p-1)} & -ir_{\frac{1}{4}(p-1)} \end{array} \right.$$

Nimmt man nämlich für r_1 irgend ein Glied des Restensystems, so sind die vier Zahlen der ersten Horizontalreihe des Schemas unter einander incongruent; erschöpfen sie das Restensystem noch nicht, so nehme man für r_2 irgend eines

der noch übrig bleibenden Glieder, worauf dann die vier Glieder der zweiten Horizontalreihe unter einander und zu denen der ersten incongruent sein werden; und so weiter fort, bis alle Glieder des Restensystems erschöpft sind *). Wir nennen diese Gruppirung: ***die Eintheilung eines Restensystems in vier associirte Theile,*** und jeden dieser vier Theile kurz ein ***Viertel-Restensystem.*** Nachdem man auf irgend eine Art diese Eintheilung vorgenommen hat, kann man alle übrigen Arten daraus ableiten, indem man die Glieder jeder einzelnen Horizontalreihe cyklisch permutirt, so dafs die Anzahl der Arten $= 4^{\frac{1}{4}(p-1)}$ wird. Der zuerst von ***Gaufs*** angegebene Gedanke, ein Restensystem in dieser Weise zu theilen, ist ebenso wichtig, als der Begriff der Congruenz selbst, und beruht auf der Betrachtung solcher Zahlen, welche sich zu associirten ebenso verhalten, wie congruente Zahlen zu den gleichen. Mit zwei Worten gesagt, ist ein ***Viertelrestensystem*** jede Reihe von $\frac{1}{4}(p-1)$ Zahlen, aus welcher man durch Addition von Vielfachen des Moduls und durch Multiplication mit complexen Einheiten ***alle*** nicht durch den Modul theilbaren Zahlen, und jede nur einmal erzeugen kann.

Nach dieser Vorbemerkung wenden wir uns zu der Betrachtung der Wurzeln der Gleichung $\frac{U}{x} = 0$. $\frac{U}{x}$ ist eine ganze Function von x^4 vom $\frac{1}{4}(p-1)$ten Grade, also hat die Gleichung $\frac{U}{x} = 0$, wenn man in ihr $x^4 = z$ als den Unbekannten betrachtet, d. h. die Gleichung

$$(8.) \qquad z^{\frac{1}{4}(p-1)} + A_{\frac{1}{4}(p-5)} z^{\frac{1}{4}(p-1)-1} + \ldots + A_1 z + m = 0,$$

$\frac{1}{4}(p-1)$ Wurzeln z, welche, da die Gleichung (8.) folgende $\varphi(mt) = 0$ nach sich zieht, offenbar durch die Formel $z = \varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4$ gegeben sind, in der r den Inbegriff der Zahlen $r_1, r_2, \ldots r_{\frac{1}{4}(p-1)}$ aus der ersten Verticalcolumne des Schemas (7.) bezeichnet. Da die Coëfficienten der Gleichung (8.) ganz sind, so ist auch jede symmetrische ganze Function ihrer Wurzeln also „***jede „symmetrische Function*** der $\frac{1}{4}(p-1)$ Gröfsen

$$\varphi\left(\frac{r_1\omega}{m}\right)^4, \quad \varphi\left(\frac{r_2\omega}{m}\right)^4, \quad \varphi\left(\frac{r_3\omega}{m}\right)^4, \quad \text{etc.},$$

---

*) Beiläufig ergiebt sich hieraus, dafs die Norm einer complexen Zahl aus 4ten Wurzeln der Einheit $\equiv 1 \pmod 4$ ist; in dem speciellen Falle für 4te Wurzeln der Einheit ist zwar diese Bemerkung von wenig Belang, aber interessant ist, dafs sich ein analoger Schlufs bei complexen Zahlen aus beliebig hohen Wurzeln der Einheit anwenden läfst.

„deren Inbegriff durch $\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4$ bezeichnet wird, eine *ganze* complexe Zahl," und da das Product aller Wurzeln dem positiven oder negativen letzten Coëfficienten gleich ist, je nachdem der Grad der Gleichung eine gerade oder ungerade Zahl ist, so hat man namentlich

$$(9.) \qquad \Pi\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4 = (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}\cdot m, \text{ oder}$$

$$(9'.) \qquad \sqrt[4]{((-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}\cdot m)} = \Pi\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right),$$

wo sich das Multiplicationszeichen Π auf alle Werthe von r bezieht. Die Wichtigkeit der Formel (9'.) besteht darin, dafs sie die einzige ist, durch welche man bis jetzt die *vierte Wurzel aus einer complexen Zahl* so zu sagen *rational* ausdrücken kann; sie vertritt zum Theil die Stelle der *Gaufsischen* Formeln in der complexen Theorie. — Das hier Gesagte gilt übrigens, m mag eingliedrig oder zweigliedrig sein, wenn nur primär.

3.

Um zu den biquadratischen Resten überzugehen, sei, mit Beibehalten der bisherigen Bezeichnungen, m eine beliebige primäre Primzahl, gleichviel ob eingliedrig oder zweigliedrig, n dagegen eine primäre und zweigliedrige Primzahl, die von m verschieden ist; p und q seien respective die Normen von m und n. — Multiplicirt man alle r mit n, so befinden sich die Reste der verschiedenen Producte nr theils unter den r, theils unter den ir, $-r$, oder $-ir$; man kann also allgemein setzen

$$nr \equiv i^\mu r' \pmod{m},$$

wo sich die verschiedenen r', die den verschiedenen r entsprechen, alle unter den r befinden, und sämmtlich von einander verschieden sind *), also, wenn auch in anderer Ordnung, mit allen r zusammenfallen. Aus der eben geschriebenen Congruenz folgt wegen der complexen Periodicität der Function φ und wegen $\varphi(it) = i\varphi(t)$:

$$\varphi\left(\frac{nr\omega}{m}\right) = \varphi\left(\frac{i^\mu r'\omega}{m}\right) = i^\mu\varphi\left(\frac{r'\omega}{m}\right), \qquad i^\mu = \frac{\varphi\left(\frac{nr\omega}{m}\right)}{\varphi\left(\frac{r'\omega}{m}\right)},$$

*) Weil nicht $nr_\sigma \equiv \pm nr_\tau$ oder $\equiv \pm inr_\tau$ sein kann, ohne dafs $r_\sigma \equiv \pm r_\tau$ oder $\equiv \pm ir_\tau$ wäre, welches letztere aber der Constructionsweise unseres Schemas (7.) offenbar widerspricht.

mithin erhält man, wenn dieser Werth von i^μ in die Congruenz eingesetzt wird, in allen Fällen:

$$nr \equiv r' \cdot \frac{\varphi\left(\frac{nr\omega}{m}\right)}{\varphi\left(\frac{r'\omega}{m}\right)} \pmod{m},$$

und da alle r', wenn auch in anderer Ordnung, mit allen r zusammenfallen, so kommt durch Multiplication über alle r:

$$n^{\frac{1}{4}(p-1)} \Pi(r) \equiv \Pi(r) \frac{\Pi\varphi(nt)}{\Pi\varphi(t)} \pmod{m},$$

wo zur Erleichterung des Druckes t statt $\frac{r\omega}{m}$ geschrieben ist. Da nun keine der Zahlen r durch m theilbar ist, so kann man auf beiden Seiten mit $\Pi(r)$ fortdividiren und erhält

$$(10.) \quad n^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv \frac{\Pi\varphi(nt)}{\Pi\varphi(t)} \pmod{m},$$

was auch so geschrieben werden kann:

$$(10'.) \quad \left[\frac{n}{m}\right] = \Pi \frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)},$$

sobald man durch $\left[\frac{n}{m}\right]$ diejenige ***complexe Einheit*** bezeichnet, welcher die Potenz $n^{\frac{1}{4}(p-1)} \pmod{m}$ congruent ist.

Zur weitern Behandlung der in (10'.) für $\left[\frac{n}{m}\right]$ aufgestellten analytischen Formel dient das in §. 1. gefundene Resultat, nach welchem

$$\frac{\varphi(nt)}{\varphi(t)} = \frac{nF[\varphi(t)^4] + \varphi(t)^{q-1}}{1 + nG[\varphi(t)^4]},$$

weil n als zweigliedrige primäre Primzahl angenommen worden ist; F und G sind ganze Functionen von $\varphi(t)^4$ mit ganzen complexen Coëfficienten. Hiernach kommt wegen (10'.)

$$(11.) \quad \left[\frac{n}{m}\right] \cdot \Pi\left\{1 + nG\left[\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4\right]\right\} = \Pi\left\{nF\left[\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4\right] + \varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^{q-1}\right\}.$$

Die beiden Producte zur Linken und zur Rechten in dieser Formel, in denen sich die Multiplication auf alle Werthe von r bezieht, lassen sich, wenn man die Multiplication ausführt, rein algebraisch nach Potenzen von n ordnen, und man sieht, dafs dann jeder Coëfficient dieser Entwickelungen eine symmetrische Function der Gröfsen $\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4$, also nach §. 2. einer ganzen complexen Zahl

gleich wird: so dafs man erhält

$$\left[\frac{n}{m}\right]\cdot\{1+a_1n+a_2n^2+\ldots.+a_{\frac{1}{4}(p-1)}n^{\frac{1}{4}(p-1)}\}=$$
$$\Pi\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^{q-1}+b_1n+b_2n^2+\ldots.+b_{\frac{1}{4}(p-1)}n^{\frac{1}{4}(p-1)},$$

wo a_1, a_2 etc., b_1, b_2 etc. sämmtlich ganze complexe Zahlen, nämlich sämmtlich symmetrische ganze Functionen der Wurzeln der Gleichung (8.) sind. Setzt man hier für $\Pi\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^{q-1}$ den Werth $[(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}m]^{\frac{1}{4}(q-1)}$ aus (9.) und läfst auf beiden Seiten die durch n theilbaren Glieder fort, so steht man am Ziele, denn man bekommt:

$$\left[\frac{n}{m}\right]\equiv(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)\cdot\frac{1}{4}(q-1)}\cdot m^{\frac{1}{4}(q-1)}\ (\text{mod. } n),\ \text{d. h.}$$

$$\left[\frac{n}{m}\right]=(-1)^{\frac{1}{4}(p-1)\cdot\frac{1}{4}(q-1)}\cdot\left[\frac{m}{n}\right]. \qquad (12.)$$

Dies ist das *Gaufsische* Reciprocitätsgesetz für alle Fälle mit Ausnahme des einzigen, wenn beide Zahlen reell (eingliedrig) sind. In diesem letzteren Falle folgt der Satz unmittelbar ohne Weiteres aus dem *Fermatschen* Satze; denn sind m und n beide reelle Primzahlen $\equiv 3\ (\text{mod. } 4)$, so sind m^2 und n^2 ihre Normen und man hat

$$(\pm m)^{\frac{1}{4}(n^2-1)}=(\pm m^{\frac{1}{4}(n+1)})^{n-1}\equiv 1\ (\text{mod. } n),\ \text{und}$$
$$(\pm n)^{\frac{1}{4}(m^2-1)}=(\pm n^{\frac{1}{4}(m+1)})^{m-1}\equiv 1\ (\text{mod. } m),\ \text{also}\ \left[\frac{m}{n}\right]=\left[\frac{n}{m}\right].$$

Um dem Reciprocitätssatze (12.) die Form zu geben, in welcher *Gaufs* ihn dargestellt hat, darf man nur bemerken, dafs für $m=a+bi$, $p=a^2+b^2$, $\frac{1}{4}(p-1)=\frac{1}{4}(a^2-1)+\frac{1}{4}b^2=\frac{1}{4}(a^2-1)+(\frac{1}{2}b)^2$ wird, und dafs a^2 als Quadrat einer ungeraden Zahl $\equiv 1\ (\text{mod. } 8)$, mithin $\frac{1}{4}(a^2-1)$ gerade ist, also $\frac{1}{4}(p-1)\equiv(\frac{1}{2}b)^2\equiv\frac{1}{2}b\ (\text{mod. } 2)$ wird. Da $a+bi$ primär ist, so hat man $\frac{1}{2}b\equiv\frac{1}{2}(a-1)\ (\text{mod. } 2)$, also auch $\frac{1}{4}(p-1)\equiv\frac{1}{2}(a-1)\ (\text{mod. } 2)$; setzt man ebenso $n=c+di$, so ist auf dieselbe Weise $\frac{1}{4}(q-1)\equiv\frac{1}{2}(c-1)\ (\text{mod. } 2)$, also kann man in (12.) statt $\frac{1}{4}(p-1)\cdot\frac{1}{4}(q-1)$ auch $\frac{1}{2}(a-1)\cdot\frac{1}{2}(c-1)$ schreiben; man erhält so

$$\left[\frac{n}{m}\right]=(-1)^{\frac{1}{2}(a-1)\cdot\frac{1}{2}(c-1)}\cdot\left[\frac{m}{n}\right];$$

und dies ist die *Gaufsische* Form des Satzes.

Zu bemerken ist noch, dafs aus der Verbindung der Formeln (9′.) und (10′.)

$$\Pi\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right) = \sqrt[4]{((-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}m)},$$

$$\Pi\varphi\left(\frac{nr\omega}{m}\right) = \left[\frac{n}{m}\right]\cdot\Pi\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right), \text{ die folgende hervorgeht}$$

$$\Pi\varphi\left(\frac{nr\omega}{m}\right) = \left[\frac{n}{m}\right]\sqrt[4]{((-1)^{\frac{1}{4}(p-1)}m)}.$$

Die erste dieser drei zuletzt geschriebenen Formeln gilt für ein beliebiges primäres m, die beiden übrigen dagegen nur für Primzahlen m; n ist ganz beliebig, nur nicht durch m theilbar; r durchläuft bei der Multiplication ein Viertelrestensystem (mod. m).

4.

Es möchte hier nicht am unrechten Platze sein, eine einfache Methode anzugeben, nach welcher man die Coëfficienten in dem Zähler und Nenner der Multiplicationsformeln für die Lemniscate berechnen kann. — Die complexe ganze Zahl m wird hier nur der einzigen Beschränkung unterworfen, primär, d. h. $\equiv 1 \pmod{2+2i}$ zu sein.

Sei

$$(1.)\quad \frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{(1-x^4)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = m\sqrt{(1-y^4)},$$

welche beiden Gleichungen die Stelle der einzigen $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m\sqrt{(1-y^4)}}{\sqrt{(1-x^4)}}$ vertreten, so ist

$$y = \frac{U}{V} = \frac{x^p + B_1 x^{p-4} + \ldots + A_1 x^5 + mx}{mx^{p-1} + A_1 x^{p-5} + \ldots + B_1 x^4 + 1}.$$

Betrachtet man in der Gleichung

$$U - Vy = 0, \text{ d. h.}$$

$$(2.)\quad x^p - my\cdot x^{p-1} + B_1 x^{p-4} - A_1 y\cdot x^{p-5} + \ldots + mx - y = 0$$

x als Function von y, so geben die p Wurzeln dieser Gleichung, welche wir durch

$$(3.)\quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_p$$

bezeichnen, p Functionen von y, welche sämmtlich den Differenzialgleichungen (1.) genügen. Jede symmetrische Function der Gröfsen x_1, x_2 etc. läfst sich durch die Coëfficienten der Gleichung (2.) ausdrücken, und könnte man umgekehrt jede symmetrische Function dieser Gröfsen auf irgend einem Wege direct bestimmen, so hätte man auch die Coëfficienten der Gleichung (2.), also auch die Coëfficienten des Zählers und Nenners A_1 etc. B_1 etc.

Da in der Gleichung (2.) der Coëfficient von x^{p-1} gleich $-my$, der von x^{p-2} ***Null*** ist, so ist die Summe der Gröfsen (3.) $= my$, die Summe ihrer Combinationen zu zweien $= 0$, folglich auch die Summe ihrer Quadrate $= m^2y^2$; dieses sehr bekannte Resultat mag so geschrieben werden

$$(4.) \qquad \Sigma x = my, \qquad \Sigma x^2 = m^2y^2,$$

indem allgemein durch $\Sigma F(x)$ die Summe

$$F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_p)$$

bezeichnet wird.

Durch fortgesetztes Differenziiren der (4.) wird es gelingen, alle symmetrischen Verbindungen der Gröfsen (3.) zu bestimmen; da sich indessen alle symmetrischen Verbindungen in die ***Potenzsummen*** ausdrücken lassen, so genügt es, diese letzteren zu finden; es seien die Potenzsummen der Gröfsen (3.) durch S_0, S_1, S_2 etc. bezeichnet, so dafs

$$S_\mu = \Sigma x^\mu = x_1^\mu + x_2^\mu + \ldots + x_p^\mu;$$

S_0 ist $= 1 + 1 + \ldots + 1 = p$.

In der Trigonometrie besteht eines der wichtigsten Principien, durch welches man zu ***linearen Ausdrücken*** gelangt, in der Entwicklung der Potenzen von Kreisfunctionen nach Sinus oder Cosinus vielfacher Bogen; da dieses Hülfsmittel bei den elliptischen Functionen fehlt, so hat ***Jacobi*** in seinen ***Fundamenten*** ein anderes angegeben, welches sich auf die Möglichkeit gründet, die höheren Differenzialquotienten elliptischer Functionen durch die Potenzen dieser Functionen, und umgekehrt die Potenzen durch die Differenzialquotienten *linear* auszudrücken. Wie mancher schöne mathematische Gedanke wegen Mangel an analytischen Arbeitskräften unfruchtbar bleibt, so scheint auch dieses Princip, aufser der von ***Jacobi*** gemachten Anwendung, nicht weiter benutzt worden zu sein. Bei unserem Probleme hier kann das eben erwähnte Hülfsmittel mit Erfolg angewandt werden. Differenziiren wir nämlich die Gleichungen (4.) μmal nach t, so dafs wir erhalten

$$(5.) \qquad \Sigma \frac{\partial^\mu x}{\partial t^\mu} = m \frac{\partial^\mu y}{\partial t^\mu}, \qquad \Sigma \frac{\partial^\mu (x^2)}{\partial t^\mu} = m^2 \frac{\partial^\mu (y^2)}{\partial t^\mu},$$

verwandeln für gerade Werthe von μ die Differenzialquotienten rechts vom Gleichheitszeichen in Potenzen von y und setzen dann die Summen links in die Formeln ein, welche die Potenzen von x in die Differenzialquotienten von x oder x^2, also auch die Potenzsummen Σx^μ in die Summen von Differenzialquotienten ausdrücken, so erhalten wir direct die sämmtlichen Potenzsummen S_μ als Functio-

nen von y. Setzt man sodann $y=0$, so bekommt man hieraus die Potenzsummen derjenigen Gröfsen, welche den Zähler der Multiplicationsformel verschwinden machen.

In der That, differenziirt man die Gleichung $\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{(1-x^4)}$ einmal, 3mal, 5mal u. s. w. nach t, so kommt

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -2x^3, \qquad \frac{\partial^4 x}{\partial t^4} = -12x + 24x^5,$$

$$\frac{\partial^6 x}{\partial t^6} = 72\cdot(7x^3 - 10x^7), \text{ u. s. w.}$$

Ferner erhält man durch Differenziation der Gleichung $\frac{\partial(x^2)}{\partial t} = 2x\sqrt{(1-x^4)}$:

$$\frac{\partial^2(x^2)}{\partial t^2} = 2-6x^4, \qquad \frac{\partial^4(x^2)}{\partial t^4} = 24(-3x^2+5x^6),$$

$$\frac{\partial^6(x^2)}{\partial t^6} = 144(-1+28x^4-35x^8), \text{ u. s. w.}$$

Man kann jede folgende Gleichung aus der vorhergehenden ableiten mit Hülfe der Formel

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (1-x^4)\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - 2x^3\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Die geraden Differenzialquotienten von x, x^2 nach t werden also resp. durch ungerade, gerade ganze Functionen von x ausgedrückt; die Gleichungen, welche dies bewirken, seien der Kürze halber durch (*E.*) bezeichnet.

Dieselbe Behandlung der Gleichung $\frac{\partial y}{\partial t} = m\sqrt{(1-y^4)}$ liefert

$$(F.)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -2m^2y^3, \qquad \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 12m^4(-y+2y^5), \\ \frac{\partial^6 y}{\partial t^6} = 72m^6(7y^3-10y^7), \text{ u. s. w.}, \\ \frac{\partial^2(y^2)}{\partial t^2} = 2m^2(1-3y^4), \qquad \frac{\partial^4(y^2)}{\partial t^4} = 24m^4(-3y^2+5y^6), \\ \frac{\partial^6(y^2)}{\partial t^6} = 144m^6(-1+28y^4-35y^8), \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Diese Gleichungen, welche wir durch (*F.*) bezeichnen, geben die geraden Differenzialquotienten von y und y^2 nach t durch ungerade, resp. gerade ganze Functionen von y, und werden mit Hülfe der Formel

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = m^2(1-y^4)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - 2m^2y^3\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

aus einander abgeleitet.

Die Gleichungen (*E.*) lassen sich nach x^3, x^5, u. s. w., x^4, x^6, u. s. w. auflösen, und geben dann die ungeraden Potenzen von x in die Differenzialquotienten von x, die geraden Potenzen von x in die Differenzialquotienten von x^2 ausgedrückt, nämlich:

$$(G.)\quad \begin{cases} x^3 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, & x^5 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 x}{\partial t^4}, \text{ u. s. w.} \\ x^4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\frac{\partial^2 (x^2)}{\partial t^2}, & x^6 = \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{120}\frac{\partial^4 (x^2)}{\partial t^4}, \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Am bequemsten lassen sich die Gleichungen (*G.*) nach der Formel

$$x^\mu = \frac{\mu-3}{\mu-1}x^{\mu-4} - \frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)}\frac{\partial^2 (x^{\mu-2})}{\partial t^2}$$

jede aus den beiden vorhergehenden bilden. Diese Formel liefert die Gleichungen (*G.*) mit der gröfsten Leichtigkeit in beliebiger Menge, denn nach ihr darf man nur, um x^μ zu bekommen, in dem Ausdrucke für $x^{\mu-2}$ alle Differenziations-Exponenten um 2 Einheiten erhöhen und das $\frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)}$fache dieses so erhaltenen Ausdruckes von dem $\frac{\mu-3}{\mu-1}$fachen des Ausdruckes für $x^{\mu-4}$ subtrahiren.

Setzt man in (*G.*) für x seine Werthe x_1, x_2 .... x_p und summirt, so erhält man die Gleichungen (*H.*)

$$(H.)\quad \begin{cases} \Sigma x^3 = -\frac{1}{2}\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, & \Sigma x^5 = \frac{1}{2}\Sigma x + \frac{1}{24}\Sigma\frac{\partial^4 x}{\partial t^4}, \text{ u. s. w.,} \\ \Sigma x^4 = \frac{1}{3}p - \frac{1}{6}\Sigma\frac{\partial^2 (x^2)}{\partial t^2}, & \Sigma x^6 = \frac{3}{5}\Sigma x^2 + \frac{1}{120}\Sigma\frac{\partial^4 (x^2)}{\partial t^4}, \text{ u. s. w.,} \end{cases}$$

welche nach der Formel

$$\Sigma x^\mu = \frac{\mu-3}{\mu-1}\Sigma x^{\mu-4} - \frac{\partial^2 \Sigma x^{\mu-2}}{(\mu-1)(\mu-2)\partial t^2}$$

aus einander hervorgehen. — Setzt man nun endlich in diesen letzteren (*H.*) nach (5.) für

Σx, $\Sigma\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\Sigma\frac{\partial^4 x}{\partial t^4}$, u. s. w. resp. die Werthe

$m\cdot y$, $m\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $m\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}$, u. s. w., und für

Σx^2, $\Sigma\frac{\partial^2 (x^2)}{\partial t^2}$, $\Sigma\frac{\partial^4 (x^2)}{\partial t^4}$, u. s. w., resp. die Werthe

$m^2 y$, $m^2\frac{\partial^2 (y^2)}{\partial t^2}$, $m^2\cdot\frac{\partial^4 (y^2)}{\partial t^4}$, u. s. w., so kommt:

$$(I.)\quad \begin{cases} \Sigma x^3 = S_3 = -\frac{1}{2}m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad S_5 = \frac{1}{2}my + \frac{m}{24}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}, \text{ u. s. w.,} \\ S_4 = \frac{1}{3}p - \frac{m^2}{6}\frac{\partial^2(y^2)}{\partial t^2}, \quad S_6 = \frac{3m^2}{5}y^2 + \frac{m^2}{120}\frac{\partial^4(y^2)}{\partial t^4}, \text{ u. s. w. *),} \end{cases}$$

und wenn man hier die Differenzialquotienten von y resp. y^2 nach (*F.*) in die ungeraden, resp. geraden Potenzen von y umsetzt, so erhält man S_3, S_5, S_7, u. s. w. in ungerade, S_4, S_6, S_8, u. s. w. in gerade ganze Functionen von y ausgedrückt, z. B.

$$S_3 = m^3y^3, \quad S_4 = \tfrac{1}{3}(p - m^4) + m^4y^4, \text{ u. s. w.}$$

Nachdem wir so die Natur der Potenzsummen S_μ erkannt haben, nämlich, dafs sie ganze Functionen von y sind, die auf den μten Grad steigen, und nur ungerade oder nur gerade Potenzen von y enthalten, je nachdem μ ungerade oder gerade ist, wollen wir eine Recursionsformel aufstellen, nach der man unmittelbar jede Potenzsumme aus den frühern berechnen kann. — Da S_μ eine ganze Function von y vom μten Grade ist, so erhält man durch zweimalige Differenziation nach t

$$\frac{\partial^2 S_\mu}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 S_\mu}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial S_\mu}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = m^2(1-y^4)\cdot\frac{\partial^2 S_\mu}{\partial y^2} - 2m^2y^3\cdot\frac{\partial S_\mu}{\partial y},$$

wo $\frac{\partial S_\mu}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 S_\mu}{\partial y^2}$ ebenfalls ganze Functionen von y vom $\mu-1$ten resp. $\mu-2$ten Grade sind. Von der andern Seite ist auch $\frac{\partial^2 S_\mu}{\partial t^2} = \Sigma\frac{\partial^2(x^\mu)}{\partial t^2}$; aber

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(x^\mu)}{\partial t^2} &= \mu(\mu-1)x^{\mu-2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \mu x^{\mu-1}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ &= \mu(\mu-1)x^{\mu-2}(1-x^4) - 2\mu x^{\mu+2} \\ &= \mu(\mu-1)x^{\mu-2} - \mu(\mu+1)x^{\mu+2}, \quad \text{also} \\ \frac{\partial^2 S_\mu}{\partial t^2} &= \mu(\mu-1)S_{\mu-2} - \mu(\mu+1)S_{\mu+2}; \end{aligned}$$

dieser Werth von $\frac{\partial^2 S_\mu}{\partial t^2}$ mit dem vorhin erhaltenen verglichen, liefert

$$m^2(1-y^4)\cdot\frac{\partial^2 S_\mu}{\partial y^2} - 2m^2y^3\cdot\frac{\partial S_\mu}{\partial y} = \mu(\mu-1)S_{\mu-2} - \mu(\mu+1)S_{\mu+2};$$

hieraus folgt, wenn man noch $\mu-2$ statt μ setzt:

---

*) Die rechten Seiten dieser Gleichungen (*I.*) sind genau ebenso formirt, wie die der Gleichungen (*H.*) und gehen unmittelbar aus letzteren hervor, wenn man die Summenzeichen Σ rechts fortläfst und statt x überall rechts my statt x^2, m^2y^2 schreibt.

$$(6.)\quad S_\mu = \frac{\mu-3}{\mu-1} S_{\mu-4} + \frac{m^2}{(\mu-1)(\mu-2)} \left\{ 2y^3 \frac{\partial S_{\mu-2}}{\partial y} - (1-y^4) \frac{\partial^2 S_{\mu-2}}{\partial y^2} \right\}.$$

Dies ist die verlangte Recursionsformel, nach welcher man aus $S_{\mu-4}$ und $S_{\mu-2}$ sogleich S_μ ableiten kann. Da schon $S_0 = p$, $S_1 = my$, $S_2 = m^2y^2$, $S_3 = m^3y^3$ gefunden worden ist, so leitet man hiernach die folgenden Potenzsummen ab:

$$S_4 = \tfrac{1}{3} S_0 + \frac{m^2}{2\cdot 3} \left(2y^3 \frac{\partial S_2}{\partial y} - (1-y^4) \frac{\partial^2 S_2}{\partial y^2} \right)$$

$$= \tfrac{1}{3} p + \frac{m^2}{2\cdot 3} (4m^2y^4 - 2m^2(1-y^4)) = \tfrac{1}{3}(p - m^4) + m^4y^4,$$

$$S_5 = \tfrac{1}{2}(m - m^5)y + m^5y^5,$$

$$S_6 = \frac{3m^2 - 3m^6}{5} y^2 + m^6y^6, \text{ u. s. w. z. B. noch}$$

$$S_8 = \frac{25p - 28m^4 + 3m^8}{3\cdot 5\cdot 7} + \tfrac{4}{5}(m^4 - m^8)y^4 + m^8y^8,$$

$$S_{10} = \frac{7m^2 - 9m^6 + 2m^{10}}{15} y^2 + \frac{5(m^6 - m^{10})}{5} y^6 + m^{10}y^{10},$$

u. s. w. f.

Betrachtet man das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke, so wird man leicht die Richtigkeit der folgenden Bemerkungen einsehen. Die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von y in S_μ sind ganze Functionen von m, so dafs sich S_μ als eine ganze Function der beiden Gröfsen m und y betrachten läfst, und zwar kommen nur diejenigen Potenzen sowohl von m als von y vor, deren Exponenten $\equiv \mu \pmod 4$; die Norm p erscheint nur, wenn μ durch 4 theilbar ist, und zwar kommt sie dann nur linear und weder in m noch in y multiplicirt vor; der Coëfficient von p in $S_{4\mu}$ ist

$$= \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13 \cdots (4\mu-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15 \cdots (4\mu-1)},$$

und der von m^2y^2 in $S_{4\mu-2}$ ist

$$= \frac{3\cdot 7\cdot 11 \cdots (4\mu-5)}{5\cdot 9\cdot 13 \cdots (4\mu-3)};$$

der Coëfficient von y^μ in S_μ ist $= m^\mu$, der von $y^{\mu-4}$, $\frac{\mu m^{\mu-4}(1-m^4)}{10}$, der von $y^{\mu-8}$ ebenfalls in S_μ,

$$= \frac{\mu m^{\mu-8}(1-m^4)[3\mu - 2 - (3\mu-22)m^4]}{24\cdot 25}, \quad \text{u. s. w.}$$

Man kann, wie schon oben bemerkt, die Potenzsummen S_μ statt nach Potenzen von y auch nach den Differenzialquotienten von y resp. y^2 ordnen.

Bei dieser zweiten Darstellung, welche die einfachere ist, geschieht die successive Bildung nach der Formel

$$(7.) \qquad S_\mu = \frac{\mu-3}{\mu-1} S_{\mu-4} - \frac{m^2}{(\mu-1)(\mu-2)} \frac{\partial^2 S_{\mu-2}}{\partial u^2},$$

wo $\partial u = m \partial t$ gesetzt worden ist, so dafs also die Differenzialquotienten von y nach u aus der Gleichung $\frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{(1-y^4)}$ abzuleiten sind: dieselben ergeben sich demnach, was zu bemerken ist, aus den Differenzialquotienten von x nach t, wenn man in diesen letzteren nach geschehener Differenziation y an die Stelle von x setzt, also aus (*E.*), wenn man dort rechts y statt x schreibt. Man erhält hiernach

$$S_4 = \tfrac{1}{3} p - \tfrac{1}{6} m^4 \frac{\partial^2 (x^2)}{\partial t^2}, \qquad S_5 = \tfrac{1}{2} m x + \tfrac{1}{24} m^5 \frac{\partial^4 x}{\partial t^4},$$

$$S_6 = \tfrac{3}{5} m^2 x^2 + \tfrac{1}{120} m^6 \frac{\partial^4 (x^2)}{\partial t^4}, \quad \text{u. s. w.},$$

wo nach geschehener Differenziation überall y statt x zu schreiben ist. Da die numerischen Coëfficienten in diesen Ausdrücken genau dieselben sind, wie in (*G.*), so erhalten wir hieraus folgenden allgemeinen Satz:

„Die Summe der μten Potenzen S_μ, der Wurzeln der Gleichung $y = \frac{U}{V}$ ergiebt sich, wenn man x^μ in die Differenzialquotienten von x oder x^2 nach t ausdrückt *), sodann die constanten Glieder mit p, die $k$ten Differenzialquotienten von x mit m^{k+1} und die $k$ten Differenzialquotienten von x^2 mit m^{k+2} multiplicirt, endlich nach geschehener Differenziation y an die Stelle von x setzt."

Das Gesetz der Coëfficienten in der Entwickelung von x^μ ist von *Jacobi* (Fundamenta nova pag. 126 seq.) angegeben worden; er zeigt, dafs dieselben aus der Entwickelung der Potenzen von t nach Potenzen von x hervorgehen, also in unserem Falle aus der Entwickelung der Potenzen von $\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$.

Bei dieser Gelegenheit will ich einen Druckfehler in den betreffenden Formeln zur Verbesserung anzeigen: in „Fundamenta nova etc." auf Seite 126 ist statt der Constante in der 15ten Zeile zu lesen:

$$-\left(R^{(4)}_{n-2} \frac{U^{(2)}}{\Pi 4} + R^{(6)}_{n-3} \frac{U^{(4)}}{\Pi 6} + \ldots + \frac{U^{(2n-2)}}{\Pi 2n}\right),$$

---

*) wo x durch die Gleichung $\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{(1-x^4)}$ gegeben ist.

oder was nach der dortigen Bezeichnung dasselbe ist:

$$-\left(\boldsymbol{R}^{(4)}_{n-2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\boldsymbol{R}^{(6)}_{n-3}\frac{\boldsymbol{S}^{(2)}_{1}}{5\cdot6}+\ldots.+\frac{\boldsymbol{S}^{(2)}_{n-2}}{(2n-1)2n}\right);$$

dort sind die Factoren $\boldsymbol{R}^{(4)}_{n-2}$, $\boldsymbol{R}^{(6)}_{n-3}$, u. s. w. fortgelassen. Diese Constante reducirt sich übrigens für die Lemniscate auf ein einziges Glied und wird, wie schon bemerkt, $=0$ oder $=\frac{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4\mu-3)}{3\cdot7\cdot11\cdot\ldots\cdot(4\mu-1)}$. Um die erwähnten Formeln auf die schnellste Weise zu erhalten, setze man in die allgemeine Gleichung

$$(\alpha.)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=(1-x^4)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-2x^3\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

zuerst $\psi=\frac{t^n}{n!}$; man erhält dann:

$$\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}=(1-x^4)\frac{\partial^2\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{\partial x^2}-2x^3\frac{\partial\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{\partial x}.$$

Diese Gleichung werde μmal auf beiden Seiten nach x differenziirt, und nach geschehener Differenziation $x=0$ gesetzt, wobei zu bemerken, dafs die Differenzialquotienten von $1-x^4$ mit Ausnahme des 0ten und 4ten und die von x^3 mit Ausnahme des dritten verschwinden. Man erhält:

$$\frac{\partial^\mu\left(\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\right)}{\mu!\,\partial x^\mu}=\frac{\partial^{\mu+2}\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{\mu!\,\partial x^{\mu+2}}-\frac{\partial^{\mu-2}\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{(\mu-4)!\,\partial x^{\mu-2}}-\frac{2\,\partial^{\mu-2}\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{(\mu-3)!\,\partial x^{\mu-2}},$$

oder:

$$(\beta.)\qquad \frac{\partial^\mu\left(\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\right)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu}=\mu(\mu+1)\frac{\partial^{\mu+2}\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{(\mu+1)!\,\partial x^{\mu+2}}-\mu(\mu-1)\frac{\partial^{\mu-2}\left(\frac{t^n}{n!}\right)}{(\mu-3)!\,\partial x^{\mu-2}},$$

für $x=0$. Sodann nehme man in obiger Formel $\psi=x^\mu$, so dafs

$$(\gamma.)\qquad \frac{\partial^2(x^\mu)}{\partial t^2}=-\mu(\mu+1)x^{\mu+2}+\mu(\mu-1)x^{\mu-2}.$$

Setzt man nun endlich

$$x^\mu=(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}\sum_{n=0}\boldsymbol{P}^{(\mu)}_n\frac{\partial^n x}{\partial t^n},\quad\text{oder}$$

$$x^\mu=(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-2)}\sum_{n=0}\boldsymbol{P}^{(\mu)}_n\frac{\partial^n(x^2)}{\partial t^n}+\text{Const.},$$

je nachdem μ ungerade oder gerade ist, so erhält man nach $(\gamma.)$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}\boldsymbol{P}^{(\mu)}_{n-2}=-\mu(\mu+1)(-1)^{\frac{1}{2}(\mu+1)}\boldsymbol{P}^{(\mu+2)}_n+\mu(\mu-1)(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-3)}\boldsymbol{P}^{(\mu-2)}_n$$

resp.

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-2)} P^{(\mu)}_{n-2} = -\mu(\mu+1)(-1)^{\frac{1}{2}\mu} P^{(\mu+2)}_{n} + \mu(\mu-1)(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-4)} P^{(\mu-2)}_{n},$$

also in beiden Fällen:

$$(\delta.) \qquad P^{(\mu)}_{n-2} = \mu(\mu+1) P^{(\mu+2)}_{n} - \mu(\mu-1) P^{(\mu-2)}_{n}.$$

Dieser Recursionsgleichung genügt nach (β.)

$$(\varepsilon.) \qquad P^{(\mu)}_{n} = \frac{\partial^\mu \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu}, \quad \text{oder} \quad = \frac{\partial^\mu \left(\frac{t^{n+2}}{(n+2)!}\right)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu} \ (\text{für } x=0),$$

und da dieser Werth stimmt, wenn man $\mu = 1$, $\mu = 2$, 3 und 4 setzt, während n allgemein bleibt *), so gilt er auch für alle Werthe von μ und n, und man erhält:

$$(8.) \qquad x^\mu = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \sum_{n=0} \frac{1}{(\mu-1)!(n+1)!} \frac{\partial^n x}{\partial t^n} \left(\frac{\partial^\mu (t^{n+1})}{\partial x^\mu}\right)_{x=0}$$

oder

$$= (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-2)} \sum_{n=0} \frac{1}{(\mu-1)!(n+2)!} \frac{\partial^n (x^2)}{\partial t^n} \left(\frac{\partial^\mu (t^{n+2})}{\partial x^\mu}\right)_{x=0} + C,$$

je nachdem μ ungerade oder gerade ist; übrigens ist $C = 0$ oder $C = \frac{1\cdot 5\cdot 9 \cdots (\mu-3)}{3\cdot 7\cdot 11 \cdots (\mu-1)}$, je nachdem $\mu \equiv 2$ oder $\equiv 0 \pmod 4$ ist. Zu bemerken ist, dafs in diesen Formeln (8.) diejenigen Coëfficienten von selbst verschwinden, für welche nicht $n+1$ resp. $n+2 \equiv \mu \pmod 4$ ist.

Für die μten Potenzsummen ergiebt sich nun hieraus durch Anwendung des oben aufgestellten allgemeinen Satzes:

$$(9.) \qquad S_\mu = \Sigma x^\mu = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-\sigma)} \sum_{n=0} \frac{m^{n+\sigma}}{(\mu-1)!\,(n+\sigma)!} \frac{\partial^\mu (t^{n+\sigma})}{\partial x^\mu} \frac{\partial^n (y^\sigma)}{\partial u^n} + Cp,$$

wo $\sigma = 1$ oder $= 2$, je nachdem μ ungerade oder gerade ist, $\frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{(1-y^4)}$, $C = 0$ für $\mu \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$, dagegen $C = \frac{1\cdot 5\cdot 9 \cdots (\mu-3)}{3\cdot 7\cdot 11 \cdots (\mu-1)}$ für $\mu \equiv 0 \pmod 4$, und wo nach geschehener Differenziation rechts $x = 0$ gesetzt werden mufs. — Man kann auch noch die Summen der negativen Potenzen $\Sigma x^{-\mu}$ erhalten, wenn man $\frac{1}{y}$ statt y schreibt, denn da y in $\frac{1}{y}$ übergeht, wenn $\frac{1}{x}$

---

*) denn für $\mu = 1$, $\mu = 2$ erhält man nach den Werthen von n auf beiden Seiten der Formel 1, 0, 0, 0, etc.; für $\mu = 3$ kommt 0, 0, $\frac{1}{2}$, 0, 0, ..., und für $\mu = 4$: 0, 0, $\frac{1}{6}$, 0, 0, ...

statt x gesetzt wird, so erhält man $\Sigma x^{-\mu}$ aus dem Werthe von Σx^{μ}, wenn man in letzterem $\frac{1}{y}$ statt y setzt. — Aus den allgemeinen Potenzsummen S_{μ}, welche noch das variable y enthalten, ergeben sich speciell die Potenzsummen des Zählers der Multiplicationsformel $U=0$, welche wir durch S'_{μ} bezeichnen, wenn man $y=0$ setzt; wird aber $y=0$ gesetzt, so kann man in (9.) statt $\frac{\partial^n(y^\sigma)}{\partial u^n}$ auch $\frac{\partial^n(x^\sigma)}{\partial t^n}$ schreiben, wenn nur dann nach geschehener Differenziation $x=0$ gesetzt wird. S'_{μ} verschwindet immer, wenn $\mu \equiv 1$, 2, oder 3 (mod. 4) ist; dagegen für die durch 4 theilbaren Werthe von μ erhält man:

$$(10.)\qquad S'_{\mu} = -\Sigma \frac{m^{n+2}}{(\mu-1)!\,(n+2)!}\,\frac{\partial^{\mu}(t^{n+2})}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial^{n}(x^{2})}{\partial t^{n}} \qquad \{x=t=0\}$$
$$+\frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots.(\mu-3)}{3\cdot 7\cdot 11\ldots.(\mu-1)}p.$$

Es verschwinden in der Summe alle diejenigen Glieder, für welche nicht $n \equiv 2$ (mod. 4) ist, so dafs nur diejenigen Potenzen von m bleiben, deren Exponenten durch 4 theilbar sind; man kann also auch setzen:

$$(10'.)\qquad S'_{4\mu} = -\sum_{n=1}^{n=\mu} \frac{m^{4n}}{(4\mu-1)!\,(4n)!}\,\frac{\partial^{4\mu}(t^{4n})}{\partial x^{4\mu}}\,\frac{\partial^{4n-2}(x^{2})}{\partial t^{4n-2}} + \frac{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4\mu-3)}{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4\mu-1)}p.$$

Es ist zugleich 4μ statt μ geschrieben worden, weil es sich nur um die durch 4 theilbaren Werthe von μ handelt. Diese Formeln (10.) oder (10′.) geben die von Null verschiedenen Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung

$$x^{p-1} + B_1 x^{p-5} + B_2 x^{p-9} + \ldots. + A_1 x^4 + m = 0,$$

und wenn man $S'_{4\mu} = 4\cdot T_{\mu}$ setzt, so stellt offenbar T_{μ} die Summe der μten Potenzen der folgenden Gleichung dar:

$$z^{\frac{1}{4}(p-1)} + B_1 z^{\frac{1}{4}(p-1)-1} + \ldots. + A_1 z + m = 0,$$

welche aus der obigen durch die Substitution $x^4 = z$ hervorgeht; diese Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung in z sind übrigens

$$T_{\mu} = \tfrac{1}{4} S'_{4\mu} = \Sigma \varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^{4\mu},$$

wo r in der Summe ein Viertelrestensystem (mod. m) repräsentirt; hiernach findet man:

$$\Sigma\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^4 = T_1 = \frac{p-m^4}{12},$$

$$\Sigma\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^8 = T_2 = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot5}{3\cdot7}p - \tfrac{1}{15}m^4 + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{35}m^8,$$

$$\Sigma\varphi\left(\frac{r\omega}{m}\right)^{12} = T_3 = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{1\cdot5\cdot9}{3\cdot7\cdot11}p - \frac{11m^4}{3\cdot4\cdot25} + \frac{3m^8}{2\cdot7\cdot25} - \frac{m^{12}}{2\cdot3\cdot11\cdot25}$$

u. s. w.

Aus den Potenzsummen T_1, T_2, u. s. w. kann man nun die Coëfficienten B_1, B_2, u. s. w. berechnen, und zwar nach den von *Newton* gegebenen Formeln

$$B_1 = -T_1, \quad 2B_2 = -T_2 - B_1T_1, \quad 3B_3 = -T_3 - B_1T_2 - B_2T_1,$$
$$4B_4 = -T_4 - B_1T_3 - B_2T_2 - B_3T_1, \text{ u. s. w.}$$

Hiernach findet man z. B.

$$B_1 = \frac{-p+m^4}{12},$$

$$B_2 = \frac{p^2}{2\cdot144} - \frac{5}{14\cdot12}p + m^4\left(\frac{-p}{144} + \frac{1}{30}\right) - \frac{m^8}{8\cdot35\cdot36}$$
$$= \frac{1}{56\cdot180}(-m^8 - 70m^4p + 35p^2 + 336m^4 - 300p), \text{ u. s. w.}$$

Auf eine ähnliche Weise findet man die Coëfficienten A_1, A_2, u. s. w.:

$$A_1 = \frac{m}{60}(-m^4 - 5p + 6),$$

$$A_2 = \frac{m}{56\cdot180}(-m^8 + 14m^4p + 35p^2 - 84m^4 - 384p + 420), \text{ u. s. w.}$$

Setzt man, was erlaubt ist,

$$B_\mu = \alpha_\mu + \beta_\mu m^4 + \gamma_\mu m^8 + \ldots + \lambda_\mu m^{4\mu},$$

so erhält man aus der Verbindung von (10′.) mit den *Newtonschen* Formeln z. B.

$$\mu\alpha_\mu = -\tfrac{1}{4}p\left[\frac{1\cdot5\cdots(4\mu-3)}{3\cdot7\cdots(4\mu-1)} + \frac{1\cdot5\cdots(4\mu-7)}{3\cdot7\cdots(4\mu-5)}\alpha_1 + \ldots + \frac{1\cdot5}{3\cdot7}\alpha_{\mu-2} + \tfrac{1}{3}\alpha_{\mu-1}\right],$$

u. s. w. für β_μ, γ_μ etc. ähnliche Formeln.

Wir stellen noch die folgenden Bemerkungen über die Coëfficienten des Zählers und Nenners der Multiplicationsformeln für die Lemniscate zusammen:

α) Der allgemeine Coëfficient B_μ des Nenners ist als eine ganze Function der beiden Variabeln m^4 und p von der μten Ordnung anzusehen, in welcher das constante Glied fehlt; der allgemeine Coëfficient A_μ des Zählers ist gleich dem $m$fachen einer ganzen Function μter Ordnung der beiden Variabeln m^4 und p; die Coëfficienten der Potenzen und Producte von m^4 und p in diesen ganzen Functionen sind rein *numerisch*, *reell*, und hängen weder von m noch von p ab, ihr Gesetz bleibt noch unbekannt und kann auch auf

einem Wege, wie der hier eingeschlagene, schwerlich gefunden werden; man könnte zwar die Werthe von $T_\mu = \frac{1}{4} S'_{4\mu}$ nach (10′.) in die independenten Ausdrücke der Coëfficienten durch die Potenzsummen

$$B_\mu = \Sigma \frac{(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots} T_1^\alpha T_2^\beta T_3^\gamma \cdots}{1^\alpha \cdot 2^\beta \cdot 3^\gamma \cdots \alpha!\, \beta!\, \gamma! \cdots}$$

$$\{\text{conditione } \alpha+2\beta+3\gamma+\cdots = n\}$$

einsetzen, aber ein so erhaltenes Gesetz der Coëfficienten würde ihre Natur mehr verhüllen als entdecken.

b) Obgleich in den Coëfficienten die Norm p bis auf den μten Grad steigt, so enthalten die aus ihnen gebildeten Potenzsummen der Wurzeln doch p nur ***linear*** und auch nicht in Potenzen von m multiplicirt.

c) Die Coëfficienten brechen, vermöge ihrer Form, von selbst ab, sobald μ gröfser als $\frac{1}{4}(p-1)$ ist. Nach dieser Bemerkung in Verbindung mit *b*) kann man unabhängig von den vorhergehenden Betrachtungen und von der Kenntnifs der Potenzsummen eine beliebige Anzahl Coëfficienten berechnen, indem man die in ihnen vorkommenden numerischen Coëfficienten als Unbekannte einführen und so viele Gleichungen bilden kann, als Unbekannte vorhanden sind. $B_1 = \frac{1}{12}(m^4-p)$ und $A_1 = \frac{1}{60} m(-m^4-5p+6)$ z. B. verschwinden für $m=1$, und werden $B_1 = -1 \pm 2i$, $A_1 = 1$ für $m = -1 \pm 2i$, $p=5$; hieraus allein schon hätten diese beiden Coëfficienten gefunden werden können; denn setzte man $B_1 = \alpha m^4 + \beta p$, $A_1 = m(\gamma m^4 + \delta p + \varepsilon)$, so erhält man die fünf Gleichungen

$$\alpha+\beta=0, \quad (-1+2i)^4\alpha+5\beta = -1+2i,$$
$$\gamma+\delta+\varepsilon=0, \quad (-1+2i)^5\gamma+5(-1+2i)\delta+(-1+2i)\varepsilon = 1,$$
$$(-1-2i)^5\gamma+5(-1-2i)\delta+(-1-2i)\varepsilon = 1,$$

wodurch die 5 Unbekannten α, β, γ, δ, ε vollkommen bestimmt sind. Bei späteren Coëfficienten mufs man, um eine hinreichende Anzahl Gleichungen zu erhalten, wie schon bemerkt, noch die Eigenschaft *b*) hinzunehmen. Auch bedient man sich hierbei mit Vortheil der Beziehung zwischen den Coëfficienten des Zählers und Nenners (§. 1.).

d) Wie oben bewiesen, sind für eine zweigliedrige Primzahl m die Werthe von A_μ und B_μ durch m theilbar.

e) In B_μ ist der Coëfficient von p, $= \frac{-1}{4\mu} \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4\mu-3)}{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4\mu-1)}$ der Coëfficient von p^μ, $= \frac{(-1)^\mu}{\mu!\, 12^\mu}$, der von $p^{\mu-1}$, $= \frac{5}{14} \frac{(-1)^{\mu-1}}{(\mu-2)!\, 12^{\mu-1}}$.

f) Wenn man in den Coëfficienten statt p eine ***beliebige*** Gröfse setzt, so bleibt die Multiplicationsformel immer noch richtig; Zähler und Nenner brechen aber nur dann ab, wenn p die Norm von m ist.

Ich gebe diesen Versuch, so unvollkommen er auch sein mag, da bei der grofsen Schwierigkeit des Gegenstandes jeder Beitrag von Interesse sein kann.

Eine brauchbare Formel erhält man noch, wenn man die (9.) auf beiden Seiten nach t differenziirt:

$$(11.)\quad \Sigma(x^{\mu-1}\cdot\sqrt{(1-x^4)}) = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\mu-\sigma)}}{\mu!}\Sigma\left\{\frac{m^{n+\sigma+1}}{(n+\sigma)!}\left(\frac{\partial^\mu(t^{n+\sigma})}{\partial x^\mu}\right)_{x=0}\cdot\frac{\partial^{n+1}(y^\sigma)}{\partial u^{n+1}}\right\}.$$

5.

Die Methode des vorigen Paragraphen zur Bestimmung der symmetrischen Functionen der Wurzeln solcher Gleichungen, welche einer gegebenen Differenzialgleichung genügen, erstreckt sich viel weiter, als wir es hier gezeigt haben; sie läfst sich auf mehrere Probleme über elliptische Functionen und noch auf mannigfaltige andere Formen von Integralen algebraischer Functionen anwenden. Hier wollen wir nur noch in aller Kürze mit ihrer Hülfe die symmetrischen Verbindungen der Wurzeln derjenigen Gleichungen bestimmen, welche bei der Transformation elliptischer Functionen mit beliebigen Moduln vorkommen *).

I. Wenn $\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{((1-x^2)(1-k^2x^2))}$, also $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -(1+k^2)x + 2k^2x^3$, so hat man die allgemeine Gleichung

$$(1.)\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(1-(1+k^2)x^2+k^2x^4)+\frac{\partial\psi}{\partial x}(-(1+k^2)x+2k^2x^3),$$

wo ψ irgend eine Function von x oder von t ist. Setzt man hier zuerst $\psi = x^\mu$, sodann $\psi = t^h$, so erhält man:

$$(2.)\quad \frac{\partial^2(x^\mu)}{\partial t^2} = \mu(\mu+1)\alpha x^{\mu+2} - \mu^2\beta x^\mu + \mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$

$$(3.)\quad h(h-1)t^{h-2} = \frac{\partial^2(t^h)}{\partial x^2}(1-\beta x^2+\alpha x^4)+\frac{\partial(t^h)}{\partial x}(-\beta x+2\alpha x^3),$$

wo der Kürze halber $k^2 = \alpha$, $1+k^2 = \beta$ gesetzt worden ist. Differenziirt man die letztere Gleichung (3.) μmal nach x und setzt nach geschehener Differenziation $x = 0$, so kommt

*) Man vergleiche auch besonders die „Notices sur les fonct. ellipt." von *Jacobi* im 3ten und 4ten Bande des *Crelle*'schen Journals.

$$h(h-1)\frac{\partial^\mu(t^{h-2})}{\mu!\,\partial x^\mu} = \frac{\partial^{\mu+2}(t^h)}{\mu!\,\partial x^{\mu+2}} - \beta\frac{\partial^\mu(t^h)}{(\mu-2)!\,\partial x^\mu} + \alpha\frac{\partial^{\mu-2}(t^h)}{(\mu-4)!\,\partial x^{\mu-2}} - \beta\frac{\partial^\mu(t^h)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu} + 2\alpha\frac{\partial^{\mu-2}(t^h)}{(\mu-3)!\,\partial x^{\mu-2}} \qquad (x=0)$$

oder, wenn man reducirt,

$$(4.)\qquad \frac{\partial^\mu\left(\frac{t^{h-2}}{(h-2)!}\right)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu} =$$

$$\mu(\mu+1)\frac{\partial^{\mu+2}\left(\frac{t^h}{h!}\right)}{(\mu+1)!\,\partial x^{\mu+2}} - \mu^2\beta\frac{\partial^\mu\left(\frac{t^h}{h!}\right)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu} + \mu(\mu-1)\alpha\frac{\partial^{\mu-2}\left(\frac{t^h}{h!}\right)}{(\mu-3)!\,\partial x^{\mu-2}};$$

wird also $\frac{\partial^\mu\left(\frac{t^h}{h!}\right)}{(\mu-1)!\,\partial x^\mu} = \boldsymbol{R}_h^{(\mu)}$ gesetzt für $x=0$, so hat man

$$(4'.)\qquad \boldsymbol{R}_{h-2}^{(\mu)} = \mu(\mu+1)\boldsymbol{R}_h^{(\mu+2)} - \mu^2\beta\boldsymbol{R}_h^{(\mu)} + \mu(\mu-1)\alpha\boldsymbol{R}_h^{(\mu-2)}.$$

II. Vermöge (2.) kann die folgende Entwickelung angenommen werden:

$$\alpha^{\frac{1}{2}(\mu-\sigma)}x^\mu = \sum_{h=0}\boldsymbol{P}_h^{(\mu)}\frac{\partial^h(x^\sigma)}{\partial t^h} - \text{Const.},$$

wo $\sigma=1$ oder $=2$, je nachdem μ ungerade oder gerade ist; z. B. für $\mu=1$ ist $x=x$, also $\boldsymbol{P}_h^{(1)}=1$ für $h=0$ und $=0$ für $h>0$; für $\mu=2$ ist $x^2=x^2$, also $\boldsymbol{P}_h^{(2)}=1$ für $h=0$ und $=0$ für $h>0$; für $\mu=3$ ist $\alpha x^3 = \frac{1}{2}\beta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, also nimmt $\boldsymbol{P}_h^{(3)}$ für die aufeinanderfolgenden Werthe von h die Werthe an: $\frac{1}{2}\beta$, 0, $\frac{1}{2}$, 0, 0, 0, u. s. w.; für $\mu=4$ wird

$$\alpha x^4 = \tfrac{2}{3}\beta x^2 + \tfrac{1}{6}\frac{\partial^2(x^2)}{\partial t^2} - \tfrac{1}{3},$$

also sind die Werthe von $\boldsymbol{P}_h^{(4)}$ die folgenden: $\frac{2}{3}\beta$, 0, $\frac{1}{6}$, 0, 0, 0, u. s. w. Setzt man die obige Entwickelung in die Gleichung (2.), so kommt

$$(5.)\qquad \boldsymbol{P}_{h-2}^{(\mu)} = \mu(\mu+1)\boldsymbol{P}_h^{(\mu+2)} - \mu^2\beta\boldsymbol{P}_h^{(\mu)} + \mu(\mu-1)\alpha\boldsymbol{P}_h^{(\mu-2)}.$$

Nach (4'.) genügt dieser Relation:

$$(6.)\qquad \boldsymbol{P}_h^{(\mu)} = \boldsymbol{R}_{h+\sigma}^{(\mu)},$$

und wenn diese Übereinstimmung für 4 Anfangswerthe von μ, während h allgemein bleibt, nachgewiesen werden kann, so mufs sie allgemein stattfinden, weil $\boldsymbol{P}^{(\mu+2)}$ genau ebenso aus den $\boldsymbol{P}$ mit den oberen Indices μ und $\mu-2$ berechnet wird, wie $\boldsymbol{R}^{(\mu+2)}$ aus den $\boldsymbol{R}$ mit den oberen Indices μ und $\mu-2$. Diese Übereinstimmung findet in der That für $\mu=1, 2, 3, 4$ Statt, denn $\boldsymbol{R}_{h+1}^{(1)}$, $\boldsymbol{R}_{h+2}^{(2)}$, $\boldsymbol{R}_{h+1}^{(3)}$, $\boldsymbol{R}_{h+2}^{(4)}$ nehmen für $h=0, 1, 2, 3, \ldots$ in inf. die Werthe an resp.:

$$R^{(1)}_{h+1} = 1,\quad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots.,$$
$$R^{(2)}_{h+2} = 1,\quad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots.,$$
$$R^{(3)}_{h+1} = \tfrac{1}{2}\beta,\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \ldots.,$$
$$R^{(4)}_{h+2} = \tfrac{2}{3}\beta,\ 0,\ \tfrac{1}{6},\ 0,\ 0,\ \ldots.,$$

und diese Werthe stimmen genau mit den obigen Anfangswerthen von $P^{(\mu)}_h$ für $\mu = 1, 2, 3$ und 4; also findet (6.) allgemein Statt. Wir erhalten demnach:

$$(7.)\qquad k^{\mu-\sigma}x^\mu = \sum_{h=0} R^{(\mu)}_{h+\sigma}\frac{\partial^h(x^\sigma)}{\partial t^h} - \text{Const.},$$

wo

$$R^{(\mu)}_{h+\sigma} = \frac{1}{(h+\sigma)!(\mu-1)!}\left(\frac{\partial^\mu(t^{h+\sigma})}{\partial x^\mu}\right)_{x=0}.$$

Die Constante wird aus dem besondern Falle $x = 0$, $t = 0$ bestimmt; man findet

$$\text{Const.} = \sum_{h=0} R^{(\mu)}_{h+\sigma}\cdot\left(\frac{\partial^h(x^\sigma)}{\partial t^h}\right)_{t=0}.$$

III. Für jede ungerade Zahl n lassen sich, wie durch ***Jacobi*** und *Abel* bekannt, mehrere Werthe von λ und zugehörige von N angeben, so dafs

$$\frac{\partial y}{\partial t} = N\cdot\sqrt{((1-y^2)(1-\lambda^2y^2))} = N\cdot\frac{\partial y}{\partial u},\qquad \partial u = N\cdot\partial t$$

wird, während y eine gebrochene rationale Function von x ist, die mit x zugleich verschwindet, und deren Zähler und Nenner auf den $n$ten resp. $n-1$ten Grad steigen. Es sei

$$y = \frac{U}{V} = \frac{k}{N\lambda}\,\frac{x^n + Bx^{n-2} + B_2x^{n-4} + \ldots.}{x^{n-1} + A_1x^{n-3} + A_2x^{n-5} + \ldots.};$$

dafs y diese Form annehmen mufs, ergiebt sich unmittelbar durch Einsetzen in die Differenzialgleichung und ist von ***Jacobi*** an mehreren Orten bemerkt worden. Die Wurzeln der Gleichung

$$U - Vy = 0,\quad \text{d. h.}$$
$$x^n - \frac{N\lambda}{k}y\cdot x^{n-1} + Bx^{n-2} - \text{etc.} = 0$$

seien durch

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots.\ x_n,$$

und die Summe

$$F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + \ldots. + F(x_n) \text{ durch } \sum_x F(x)$$

bezeichnet. Die Summe der Gröfsen $x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n$ ist $= \frac{N\lambda}{k}y$, die Summe ihrer Combinationen zu je zweien $= B$, also die Summe ihrer Quadrate

$= \frac{N^2\lambda^2}{k^2}y^2 - 2B$. Hieraus gehen zwei Gleichungen hervor, die sich in die einzige folgende zusammenziehen lassen:

$$(8.) \qquad \sum_x x^\sigma = \frac{N^\sigma \lambda^\sigma}{k^\sigma} y^\sigma - c,$$

wo $\sigma = 1$ und $= 2$ zu nehmen, während nach diesen beiden Fällen c resp. $= 0$ oder $= 2B$ zu setzen ist. Die Gleichung (8.) differenziire man auf beiden Seiten $h$mal nach t, wobei zu bemerken, dafs $\partial u^h = N^h \partial t^h$, so kommt:

$$(9.) \qquad \sum_x \frac{\partial^h(x^\sigma)}{\partial t^h} = \frac{N^{h+\sigma}\lambda^\sigma}{k^\sigma} \frac{\partial^h(y^\sigma)}{\partial u^h};$$

für $h = 0$ tritt die Gleichung (8.) an die Stelle von (9.)

IV. Werden jetzt in (7.) für x nach der Reihe die Werthe x_1, x_2, x_3, ... x_n gesetzt, dieselben summirt, und endlich für

$$\sum_x \frac{\partial^h(x^\sigma)}{\partial t^h}$$

die Werthe aus (8.) und (9.) eingesetzt, so kommt:

$$(10.) \qquad k^{\mu-\sigma} \sum_x x^\mu = \sum_{h=0}^{h=\mu-\sigma} R^{(\mu)}_{h+\sigma} \frac{N^{h+\sigma}\lambda^\sigma}{k^\sigma} \frac{\partial^h(y^\sigma)}{\partial u^h} - n \sum_{h=0}^{h=\mu-\sigma} R^{(\mu)}_{h+\sigma} \left(\frac{\partial^h(x^\sigma)}{\partial t^h}\right)_{t=0} - cR^{(\mu)}_\sigma;$$

σ ist, wie schon bemerkt, $= 1$ oder $= 2$, je nachdem μ ungerade oder gerade ist; die Bedeutung der Coëfficienten $R^{(\mu)}_{h+\sigma}$ ist oben angegeben, und x, y rechts werden in t resp. u bestimmt durch die Differenzialgleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{((1-x^2)(1-k^2x^2))} \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{((1-y^2)(1-\lambda^2y^2))}.$$

Da man nach der letzteren die vorkommenden Differenzialquotienten $\frac{\partial^h(y^\sigma)}{\partial u^\sigma}$ in Potenzen von y umsetzen kann, so giebt die Formel (10.) die μten Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung $U - Vy = 0$ vollständig in ganzen Functionen von y ausgedrückt. Aus den Potenzsummen kann man alle anderen symmetrischen Verbindungen dieser Wurzeln ableiten; man kann also namentlich die Coëfficienten des Zählers und Nenners U und V der Transformationsformel sämmtlich finden, und zwar mit Hülfe der vier Gröfsen

$$k, \quad \lambda, \quad N \quad \text{und} \quad B.$$

Dieses letztere schwierige Problem ist zuerst von *Jacobi* auf einem ganz anderen Wege gelöset worden (Band 4.).

Für den Fall der Multiplication ist n^2 statt n zu setzen; ferner ist $N = n$, $\lambda = k$ und $B = 0$, also werden dann die symmetrischen Functionen blofs in n und k ohne Hülfe anderer Gröfsen ausgedrückt.

Mit Hülfe des Satzes von ***Lagrange*** über die Umkehrung der Reihen kann man der Gleichung (10.) mehrere andere Formen geben.

V. Wenn n eine Primzahl ist, so kann man in (9.) statt λ seine $n+1$ Werthe und statt N die zugehörigen Werthe setzen. Summirt man dann links und rechts alle diese Werthe von λ und N, so bekommt man links die analoge Reihe für die Multiplication, die sich wiederum unmittelbar nach (9.) finden läfst, wenn man $\lambda = k$, $N = n$ setzt. Wird nun ferner $t = 0$ und $u = 0$ genommen, so hat man links blofse Functionen von k, während rechts symmetrische Verbindungen der Gröfsen λ und N stehen. Man kann also auf diese Art unendlich viele symmetrische Verbindungen der transformirten Moduln und der zugehörigen Multiplicatoren in k ausdrücken. Die Coëfficienten der Modulargleichung erhält man aber daraus nicht, weil es sehr schwierig ist, die Werthe der N von denen der λ zu trennen.

Dagegen kann man aus den ***Newton***schen Formeln alle Coëfficienten eliminiren und eine beliebige Anzahl Gleichungen bilden, welche blofs Potenzsummen und keine Coëfficienten mehr enthalten. Gesetzt man habe ν solcher Gleichungen gebildet, wo $\nu > 3$ genommen werden mufs. Man setze nun in diese ν Gleichungen die Werthe der Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung $U = 0$ ein, welche aus (10.) hervorgehen, wenn man dort rechts nach geschehener Differenziation $y = 0$ setzt. Die ν Gleichungen enthalten dann aufser k noch die drei Gröfsen λ, N und B. Eliminirt man zwischen ihnen N und B, so ist der gröfste gemeinschaftliche Theiler der hieraus hervorgehenden $\nu - 2$ Gleichungen die Modulargleichung; der gröfste gemeinschaftliche Theiler der aus der Elimination von λ und B hervorgehenden $\nu - 2$ Gleichungen ist die Gleichung zwischen N und k, und der gröfste gemeinschaftliche Theiler derjenigen, welche durch die Elimination von λ und N entstehen, ist eine Gleichung zwischen B und k.

Wir gestehen, dafs diese Methode, die Modulargleichung zu finden, allerdings noch einer bedeutenden Ausbildung bedarf, wenn sie nicht für ein *allgemeines* n illusorisch werden soll.

Im October 1845.

II. Neuer Beweis der Summationsformeln.

Die Beweise der Summationsformeln für die elliptischen Functionen müssen immer heuristischer Art sein, indem bei Formeln, deren Richtigkeit man a posteriori durch unmittelbare Substitution zu prüfen vermag, von einer Verification nicht die Rede sein kann. Durch diese ihre heuristische Natur haben jene Beweise den Vorzug, dafs sie die Wissenschaft mit Methoden bereichern, welche auch über den augenblicklichen Zweck hinaus von Nutzen sein können. Obgleich daher durch die längst von anderen Mathematikern gegebenen Beweise der hier in Rede stehende Gegenstand als vollständig erledigt betrachtet werden kann, so möchte doch die folgende neue Behandlung desselben, in Rücksicht auf die Methode, nicht als ganz überflüssig erscheinen.

Die Summationsformeln für die Sinus lassen sich auf folgende Weise ableiten. Wenn man $x = \sin t$ als diejenige Function von t definirt, welche mit t zugleich verschwindet und der Differenzialgleichung $\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{(1-x^2)}$ genügt, so hat man

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -x, \qquad \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} = -\sqrt{(1-x^2)}, \quad \text{u. s. w.},$$

so dafs die geraden Differenzialquotienten von x nach t, $= \pm x$, die ungeraden $= \pm\sqrt{(1-x^2)}$ sind. Da nun nach dem *Taylor*schen Satze, wenn $y = \sin u$ gesetzt wird, $\sin(t+u)$ einer Reihe von folgender Form gleich ist:

$$\alpha y + \beta \frac{\partial y}{\partial u} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \delta \frac{\partial^3 y}{\partial u^3} + \text{etc.},$$

wo die Coëfficienten blofs von t abhängen, so kann man hier alle Glieder mit geraden Differenzialquotienten von y nach u in ein Glied von der Form Ay, und alle Glieder mit ungeraden Differenzialquotienten in ein Glied von der Form $B\sqrt{(1-y^2)}$ zusammenziehen, und man erhält:

$$\sin(t+u) = Ay + B\sqrt{(1-y^2)},$$

wo A und B nur von t abhängen. Differenziirt man diese Gleichung auf beiden Seiten nach u, so kommt

$$\frac{\partial \sin(t+u)}{\partial u} = A\sqrt{(1-y^2)} - By,$$

und setzt man endlich, um A und B zu bestimmen, in diesen beiden Gleichungen $u = 0$, wobei zu bemerken, dafs für $u = 0$: $y = 0$, $\sqrt{(1-y^2)} = 1$,

$\sin(t+u) = \sin t = x$, $\frac{\partial \sin(t+u)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{(1-x^2)}$ wird, so ergiebt sich $B = x$ und $A = \sqrt{(1-x^2)}$, also hat man schliefslich

$$\sin(t+u) = x\sqrt{(1-y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)},$$

wenn $x = \sin t$, $y = \sin u$ ist.

Eine ähnliche Methode soll in den folgenden Zeilen auf die elliptischen Functionen angewandt werden.

Wir definiren die elliptische Function $x = \varphi(t)$, welche mit t zugleich verschwindet, durch die Differenzialgleichnng

$$(1.) \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = \Delta x = \sqrt{(1-\alpha x^2+x^4)};$$

diese Form geht sogleich in die gewöhnliche über, wenn man $\alpha = k + \frac{1}{k}$ nimmt und $x\sqrt{k}$, resp. $t\sqrt{k}$, an die Stelle von x resp. t setzt. — Die Gleichung (1.) nach t differenziirt, giebt:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial \Delta(x)}{\partial t} = -\alpha x + 2x^3.$$

Es sei F irgend eine Function von x, so ist

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \text{d. h.}$$

$$(2.) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = (1-\alpha x^2+x^4)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (-\alpha x + 2x^3)\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Wenn F eine *ganze* Function von x ist, so zeigt diese Formel (2.), dafs $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ ebenfalls eine ganze Function von x sein wird, deren Grad um 2 Einheiten höher ist, als der von F; und zwar wird diese neue ganze Function mit F zugleich gerade oder ungerade sein. Nun ist $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ eine ganze Function von x, also auch jeder gerade Differenzialquotient von x nach t einer ganzen Function von x gleich, und zwar wird dieselbe nur ungerade Potenzen von x enthalten; jeder ungerade Differenzialquotient von x nach t ist dagegen gleich einem Producte aus einer ganzen und geraden Function von x in $\Delta(x)$. Natürlich gelten dieselben Beziehungen zwischen y und u, wenn $\varphi(u) = y$ gesetzt wird, so dafs $\frac{\partial^{2\mu} y}{\partial u^{2\mu}} = P$, $\frac{\partial^{2\mu+1} y}{\partial u^{2\mu+1}} = Q\Delta(y)$, wo P eine ungerade, Q eine gerade ganze Function von y ist.

Man kann nach dem *Taylor*schen Satze folgende Entwickelung annehmen

$$\varphi(t+u) = \alpha y + \beta\frac{\partial y}{\partial u} + \gamma\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \delta\frac{\partial^3 y}{\partial u^3} + \text{etc.},$$

deren Coëfficienten nur von t d. h. von x abhängen. Zufolge des so eben über die Differenzialquotienten von y nach u Bemerkten läfst sich dieser Entwickelung die Form geben:

$$\varphi(t+u) = U + V\Delta(y).$$

U und V sind Reihen, welche nach ganzen Potenzen von y fortlaufen, U enthält nur ungerade, V nur gerade Potenzen von y. Offenbar ist dann auch

$$\varphi(t-u) = -U + V\Delta(y), \quad \text{also}$$
$$\varphi(t+u)+\varphi(t-u) = 2V\Delta(y).$$

Es sei der Kürze halber $\varphi(t+u)+\varphi(t-u) = 2W$, so kann man setzen:

$$(3.) \qquad W = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} C_\mu y^{2\mu}\Delta(y).$$

Hieraus folgt, wenn man auf beiden Seiten nach u differenziirt

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial u} &= \Sigma C_\mu\{2\mu y^{2\mu-1}(1-\alpha y^2+y^4)+y^{2\mu}(-\alpha y+2y^3)\}\\ &= \Sigma 2\mu C_\mu y^{2\mu-1} - \Sigma(2\mu+1)\alpha C_\mu y^{2\mu+1} + \Sigma(2\mu+2)C_\mu y^{2\mu+3}\\ &= \Sigma\{(2\mu+2)C_{\mu+1} - (2\mu+1)\alpha C_\mu + 2\mu C_{\mu-1}\}y^{2\mu+1}.\end{aligned}$$

Wird noch einmal nach u differenziirt, so kommt

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \Sigma\{(2\mu+1)(2\mu+2)C_{\mu+1} - (2\mu+1)^2\alpha C_\mu + 2\mu(2\mu+1)C_{\mu-1}\}y^{2\mu}\Delta(y).$$

Von der andern Seite ist offenbar

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \qquad \text{also} \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \Sigma\frac{\partial^2 C_\mu}{\partial t^2} y^{2\mu}\Delta(y).$$

Die Vergleichung dieser beiden für $\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}$ erhaltenen Reihen liefert die Recursionsformel

$$(4.) \quad (2\mu+1)(2\mu+2)C_{\mu+1} = (2\mu+1)^2\alpha C_\mu - 2\mu(2\mu+1)C_{\mu-1} + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}.$$

Nach dieser Formel kann der zweite Coëfficient der Reihe W aus dem ersten und jeder folgende aus den beiden vorhergehenden berechnet werden. Um den ersten Coëfficienten C_0 zu finden, setze man $u=0$; dann verschwinden alle Glieder der Reihe für W bis auf das erste, $\Delta(y)$ wird $=1$ und $W = \frac{1}{2}(\varphi(t)+\varphi(t)) = x$, also erhält man

$$C_0 = x.$$

Wird nun endlich in (2.) $F = x^{2\mu+1}$ gesetzt, so kommt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(x^{2\mu+1})}{\partial t^2} &= 2\mu(2\mu+1)x^{2\mu-1}(1-\alpha x^2+x^4)+(2\mu+1)x^{2\mu}(-\alpha x+2x^3)\\ &= 2\mu(2\mu+1)x^{2\mu-1} - (2\mu+1)^2\alpha x^{2\mu+1} + (2\mu+1)(2\mu+2)x^{2\mu+3},\end{aligned}$$

also

$$(5.) \quad (2\mu+1)(2\mu+2)x^{2\mu+3} = (2\mu+1)^2\alpha x^{2\mu+1} - 2\mu(2\mu+1)x^{2\mu-1} + \frac{\partial^2(x^{2\mu+1})}{\partial t^2}.$$

Diese Formel, mit (4.) verglichen, liefert, wenn man bedenkt, dafs $C_0 = x$ ist,

$$C_1 = x^3, \quad C_2 = x^5, \quad \text{u. s. w.},$$

und allgemein

$$C_\mu = x^{2\mu+1},$$

also hat man

$$W = xA(y) + x^3y^2A(y) + x^5y^4A(y) + \text{etc.} = \frac{xA(y)}{1-x^2y^2}, \quad \text{d. h.}$$

$$(6.) \qquad \varphi(t+u) + \varphi(t-u) = \frac{2xA(y)}{1-x^2y^2}.$$

Vertauscht man t und u, so bleibt $\varphi(t+u)$ unverändert und $\varphi(t-u)$ geht in $\varphi(u-t) = -\varphi(t-u)$ über, also erhält man noch

$$(7.) \qquad \varphi(t+u) - \varphi(t-u) = \frac{2yA(x)}{1-x^2y^2}.$$

Addirt und subtrahirt man (6.) und (7.), so kommt

$$(8.) \qquad \begin{cases} \varphi(t+u) = \dfrac{xA(y)+yA(x)}{1-x^2y^2}, \\ \varphi(t-u) = \dfrac{xA(y)-yA(x)}{1-x^2y^2}. \end{cases}$$

Dies sind die verlangten Formeln, welche die gewöhnliche Form annehmen, wenn man, wie schon bemerkt, $\varphi(t) = \sqrt{k}\cdot\sin\text{am}\left(\dfrac{t}{\sqrt{k}}\right)$ setzt.

15.

Démonstration d'un théorème de Mr. Slonimsky sur les nombres, avec une application de ce théorème au calcul de chiffres.

(Par l'éditeur.)

Mr. ***Slonimsky*** de Bialystock en Pologne, homme de lettres distingué, auteur d'un cours des mathématiques, écrit en hébreu etc., communiqua, en Juillet 1844, à l'éditenr de ce journal (sans démonstration) un théorème très curieux, sur lequel il avait fondé une de ses ingénieuses machines à calculer. Ces machines furent alors presentées par lui à l'académie des sciences de Berlin; elles lui valurent ici une récompense; depuis elles ont remporté le second prix Demidof à l'académie des sciences de St. Pétersbourg, et il en publiera sous peu la déscription en langue russe.

L'éditeur de ce journal trouva une démonstration du théorème, qu'il communiqua à Mr. ***Slonimsky,*** et il l'aurait publiée plus tôt, s'il n'avait pas dû attendre la publication des machines que l'inventeur avait l'intention de faire. Plus tard il trouva encore une application du théorème au calcul de chiffres, nommément à la multiplication des chiffres, qui sous certaines conditions peut la faciliter considérablement et augmenter la sûreté des résultats.

Maintenant, autorisé par Mr. ***Slonimsky,*** à publier le théorème et sa démonstration, il les présente ici, avec l'application mentionnée.

Théorème.

Soit Z un nombre quelconque, et désignons les chiffres de ce nombre, en allant de la droite vers la gauche, par z_1, z_2, z_3, ... z_ε, ... Si sous le nombre Z on écrit ses multiples $2Z$, $3Z$, $4Z$, $5Z$, $6Z$, $7Z$, $8Z$ et $9Z$, de sorte que les unités, les dixaines, les centaines etc. soient en lignes verticales, il est clair, que la dernière ligne verticale, celle qui passe par le dernier chiffre z_1 de Z, contiendra *les seconds chiffres* des produits $2z_1$, $3z_1$, $4z_1$, $5z_1$, $6z_1$, $7z_1$, $8z_1$ et $9z_1$. Mais il n'en sera pas ainsi de toute autre ligne verticale. Celle, par ex., qui passe par z_ε, ne contiendra pas la

série des *seconds chiffres* des produits $2z_\varepsilon$, $3z_\varepsilon$, $4z_\varepsilon$, $5z_\varepsilon$, $6z_\varepsilon$, $7z_\varepsilon$, $8z_\varepsilon$ et $9z_\varepsilon$. Pour obtenir les chiffres de cette ligne, on devra ajouter à la série des seconds chiffres des multiples de z_ε une *série complémentaire,* qui dépendra des chiffres qui suivent z_ε dans le nombre Z. Or, quels que soient ces derniers chiffres, il n'existe que *Vingt-huit séries complémentaires différentes,* et en ajoutant à la série des *seconds chiffres* des multiples de z_ε, celle des 28 séries complémentaires qui convient aux chiffres qui dans Z suivent z_ε, on aura les chiffres de la ligne verticale qui passe par z_ε.

Démonstration.

A. Considérons les unités du chiffre z_ε comme unités *absolues,* les chiffres qui suivent z_ε dans le nombre Z exprimeront alors une *fraction décimale,* toujours moindre que 1, dont nous désignerons par $x_{\varepsilon-1}$ la valeur, et les *séries complémentaires,* desquelles parle le théorème, seront celles des *entiers* contenus dans $2x_{\varepsilon-1}$, $3x_{\varepsilon-1}$, $4x_{\varepsilon-1}$, $5x_{\varepsilon-1}$, $6x_{\varepsilon-1}$, $7x_{\varepsilon-1}$, $8x_{\varepsilon-1}$ et $9x_{\varepsilon-1}$.

B. Supposons maintenant que la fonction $x_{\varepsilon-1}$ aille en croissant par degrés insensibles, depuis zéro jusqu'à 1, il est clair que chaquefois que la fraction $x_{\varepsilon-1}$ passera par une fraction irréductible $\frac{m}{n}$, dont le dénominateur n est un des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, *un* des termes *au moins* de la série complémentaire sera augmenté d'une unité, et même plusieurs de ses termes pourront en même temps être augmentés d'une unité; car il en sera ainsi des *entiers,* que contiennent les multiples $n\cdot\frac{m}{n}$, $2n\cdot\frac{m}{n}$, $3n\cdot\frac{m}{n}$ etc., et ces entiers forment les termes de la série complémentaire (*A.*). Par exemple, si la fraction $x_{\varepsilon-1}$ *s'approche* d'abord de la valeur $\frac{m}{n}=\frac{3}{5}$, l'entier que contient $5x_{\varepsilon-1}$ est toujours encore <3, et par conséquent $=2$; mais aussitôt que $x_{\varepsilon-1}$ devient *égal* à $\frac{3}{5}$, l'entier devient $=3$. Si $x_{\varepsilon-1}$ s'approche de la valeur $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$, les entiers que contiennent $3x_{\varepsilon-1}$, $6x_{\varepsilon-1}$ et $9x_{\varepsilon-1}$ sont <2, <4 et <6, et par conséquent $=1$, 3 et 5; mais aussitôt que $x_{\varepsilon-1}$ devient *égal* à $\frac{2}{3}$, ou plutôt (une fraction *décimale égale* à $\frac{2}{3}$ n'existant pas): aussitôt que $x_{\varepsilon-1}$ a *dépassé* de la plus petite quantité possible la fraction $\frac{2}{3}$, les entiers que contiennent $3x_{\varepsilon-1}$, $6x_{\varepsilon-1}$ et $9x_{\varepsilon-1}$ seront $=2$, 4 et 6. Donc, dans le premier

exemple de $\frac{m}{n}=\frac{3}{5}$, ***un seul*** terme de la série complémentaire, celui de $5x_{\varepsilon-1}$, a augmenté d'une unité; dans le second exemple de $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$, ***trois*** termes, ceux de $3x_{\varepsilon-1}$, $6x_{\varepsilon-1}$ et $9x_{\varepsilon-1}$, ont éprouvé cette augmentation.

C. D'un autre côté, ***aucun*** terme de la série complémentaire qui convient à $x_{\varepsilon-1}$, ne changera pas de valeur, quelle que soit la fraction irréductible $\frac{m}{n}$, par laquelle passe $x_{\varepsilon-1}$, si le dénominateur n de cette fraction $\frac{m}{n}$ est ***plus grand que 9;*** car les entiers que contient un multiple quelconque de $x_{\varepsilon-1}$ ne peuvent alors augmenter d'une unité, à moins que ce multiple ne soit plus grand que $9x_{\varepsilon-1}$, multiple dont il ne s'agit pas ici. Par exemple, si $x_{\varepsilon-1}$ s'approche d'abord de $\frac{m}{n}=\frac{7}{11}$, les termes de la série complémentaire, c'est-à-dire les ***entiers*** contenus dans $2x_{\varepsilon-1}$, $3x_{\varepsilon-1}$, $4x_{\varepsilon-1}$, $5x_{\varepsilon-1}$, $6x_{\varepsilon-1}$, $7x_{\varepsilon-1}$, $8x_{\varepsilon-1}$ et $9x_{\varepsilon-1}$ seront 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5 et 5, et ils continueront d'avoir ces valeurs, même après que $x_{\varepsilon-1}$ ***aura passé*** $\frac{7}{11}$; ce n'est que $11x_{\varepsilon-1}$ qui, contenant 6 entiers, toutes les fois que $x_{\varepsilon-1}$ est $<\frac{7}{11}$, en prend 7 entiers, aussitôt que $x_{\varepsilon-1}$ a atteint ou dépassé la fraction $\frac{m}{n}=\frac{7}{11}$. En effet, soit $x_{\varepsilon-1}=\frac{m}{n}+k$, où k représente une fraction quelconque, on a $\mu x_{\varepsilon-1}=\frac{\mu m}{n}+\mu k$. Ici $\frac{\mu m}{n}$ est évidemment moindre que m entiers, tant que $\mu<n$: donc $\frac{\mu m}{n}$ ne contient que $m-1$ ***entiers,*** suivis d'une fraction <1, par ex. de la fraction λ. Or, k pourra être supposé toujours si petit, que $\mu k+\lambda$ soit encore <1, donc aussi $\mu x_{\varepsilon-1}=\frac{\mu m}{n}+\mu k$ ne contiendra encore que $m-1$ entiers, et il existera par conséquent toujours encore des fractions $x_{\varepsilon-1}$ ***plus grandes*** que $\frac{m}{n}$ qui, de même que celles ***moindres*** que $\frac{m}{n}$, ne contiennent que $m-1$ entiers, ***tant que μ est moindre que n.*** Mais il en est autrement, aussitôt que μ devient $=n$; alors déjà $\mu x_{\varepsilon-1}$ est $=n\cdot\frac{m}{n}=m$, et déjà $\mu x_{\varepsilon-1}$ contient m entiers, au lieu de $m-1$ entiers qui se trouvaient dans $\mu x_{\varepsilon-1}$, ou dans $nx_{\varepsilon-1}$, lorsque $x_{\varepsilon-1}$ était encore au dessous de $\frac{m}{n}$.

Donc ***aucun*** terme de la série complémentaire que donnent les multiples $2x_{\varepsilon-1}$, $3x_{\varepsilon-1}$, $4x_{\varepsilon-1}$, $5x_{\varepsilon-1}$, $6x_{\varepsilon-1}$, $7x_{\varepsilon-1}$, $8x_{\varepsilon-1}$ et $9x_{\varepsilon-1}$ de $x_{\varepsilon-1}$

ne changera pas de valeur, à moins que x_ε ne passe par une fraction irréductible $\frac{m}{n}$, dont le dénominateur est un des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

D. Il suit de là, que le ***nombre des changements*** qu'éprouvera la série complémentaire, sera ***égal au nombre des fractions irréductibles*** $\frac{m}{n}$, ***dont les dénominateurs sont les différents nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.***

Ces fractions sont les suivantes:

1.
$$\left\{\begin{array}{llllll} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & \frac{7}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{7}{8} & & \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & & & & \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & & \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & & & & \\ \frac{1}{2} & & & & & \end{array}\right.$$

ou bien, rangées suivant leur valeurs,

2. $$\frac{m}{n} = \frac{1}{9}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{2}{9}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{4}{9}\ \frac{1}{2}\ \frac{5}{9}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{7}{9}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{7}{8}\ \frac{8}{9}.$$

Leur nombre est $= 27$: donc il y aura ***27 changements*** de la série complémentaire, et par suite le nombre des ***différentes séries complémentaires elles mêmes,*** qui existent, est $= 28$; comme l'énonce le théorème.

E. Il sera maintenant facile de trouver par ce qui a été dit en (***C.***) les termes des différentes séries complémentaires.

D'abord la série complémentaire propre aux fractions $x_{\varepsilon-1} > 0 < \frac{1}{9}$ est évidemment 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; car aucun des multiples $2x_{\varepsilon-1}$, $3x_{\varepsilon-1}$, $4x_{\varepsilon-1}$, $5x_{\varepsilon-1}$, $6x_{\varepsilon-1}$, $7x_{\varepsilon-1}$, $8x_{\varepsilon-1}$ et $9x_{\varepsilon-1}$ ne contient ici un entier. Aussitôt que $x_{\varepsilon-1}$ a dépassé la valeur $\frac{1}{9}$, le multiple $9x_{\varepsilon-1}$ de $x_{\varepsilon-1}$ contient une unité, les autres multiples n'en ont pas encore, jusqu'à $x_{\varepsilon-1} = \frac{1}{8}$; donc la série complémentaire propre aux fractions $x_{\varepsilon-1} > \frac{1}{9} < \frac{1}{8}$ est 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1. Si $x_{\varepsilon-1}$ a atteint la valeur $\frac{1}{8}$, le multiple $8x_{\varepsilon-1}$ de $x_{\varepsilon-1}$ contient une unité;

dans les autres multiples les nombres des entiers ne changent pas; donc la série complémentaire propre aux fractions $x_{\varepsilon-1} > \frac{1}{8} < \frac{1}{7}$ est 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1; et ainsi de suite. Généralement, chaque fois que $x_{\varepsilon-1}$ passe par une des fractions $\frac{m}{n}$ (2.), ceux des multiples de $x_{\varepsilon-1}$, donc le nombre est, ou *égal* au dénominateur n de la fraction, ou ***non-premier*** à n (***B.***), prendront ***un entier de plus.***

Suivant cette règle on trouvera les valeurs suivantes des termes des différentes séries complémentaires. Nous désignerons ces séries par s.

	Les termes des séries complémentaires	conviendront aux fractions
pour les multiples	**2 3 4 5 6 7 8 9**	
$s_1 =$	0 0 0 0 0 0 0 0	$x_{\varepsilon-1} > 0 < \frac{1}{9}$ ou bien $x_{\varepsilon-1} > 0 < 0,(1)$
$s_2 =$	0 0 0 0 0 0 0 1	$x_{\varepsilon-1} > \frac{1}{9} < \frac{1}{8}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(1) < 0,125$
$s_3 =$	0 0 0 0 0 0 1 1	$x_{\varepsilon-1} \geqq \frac{1}{8} < \frac{1}{7}$ – – $x_{\varepsilon-1} \geqq 0,125 < 0,(142857)$
$s_4 =$	0 0 0 0 0 1 1 1	$x_{\varepsilon-1} > \frac{1}{7} < \frac{1}{6}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(142857) < 0,1(6)$
$s_5 =$	0 0 0 0 1 1 1 1	$x_{\varepsilon-1} > \frac{1}{6} < \frac{1}{5}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,1(6) < 0,2$
$s_6 =$	0 0 0 1 1 1 1 1	$x_{\varepsilon-1} \geqq \frac{1}{5} < \frac{2}{9}$ – – $x_{\varepsilon-1} \geqq 0,2 < 0,(2)$
$s_7 =$	0 0 0 1 1 1 1 2	$x_{\varepsilon-2} > \frac{2}{9} < \frac{1}{4}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(2) < 0,25$
$s_8 =$	0 0 1 1 1 1 2 2	$x_{\varepsilon-1} \geqq \frac{1}{4} < \frac{2}{7}$ – – $x_{\varepsilon-1} \geqq 0,25 < 0,(285714)$
$s_9 =$	0 0 1 1 1 2 2 2	$x_{\varepsilon-1} > \frac{2}{7} < \frac{1}{3}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(285714) < 0,(3)$
$s_{10} =$	0 1 1 1 2 2 2 3	$x_{\varepsilon-1} > \frac{1}{3} < \frac{3}{8}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(3) < 0,375$
$s_{11} =$	0 1 1 1 2 2 3 3	$x_{\varepsilon-1} \geqq \frac{3}{8} < \frac{2}{5}$ – – $x_{\varepsilon-1} \geqq 0,375 < 0,4$
$s_{12} =$	0 1 1 2 2 2 3 3	$x_{\varepsilon-1} \geqq \frac{2}{5} < \frac{3}{7}$ – – $x_{\varepsilon-2} \geqq 0,4 < 0,(428571)$
$s_{13} =$	0 1 1 2 2 3 3 3	$x_{\varepsilon-1} > \frac{3}{7} < \frac{4}{9}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(428571) < 0,(4)$
$s_{14} =$	0 1 1 2 2 3 3 4	$x_{\varepsilon-1} > \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(4) < 0,5$
$s_{15} =$	1 1 2 2 3 3 4 4	$x_{\varepsilon-1} \geqq \frac{1}{2} < \frac{5}{9}$ – – $x_{\varepsilon-1} \geqq 0,5 < 0,(5)$
$s_{16} =$	1 1 2 2 3 3 4 5	$x_{\varepsilon-1} > \frac{5}{9} < \frac{4}{7}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(5) < 0,(571428)$
$s_{17} =$	1 1 2 2 3 4 4 5	$x_{\varepsilon-1} > \frac{4}{7} < \frac{3}{5}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(571428) < 0,6$
$s_{18} =$	1 1 2 3 3 4 4 5	$x_{\varepsilon-1} \geqq \frac{3}{5} < \frac{5}{8}$ – – $x_{\varepsilon-1} \geqq 0,6 < 0,625$
$s_{19} =$	1 1 2 3 3 4 5 5	$x_{\varepsilon-1} \geqq \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$ – – $x_{\varepsilon-1} \geqq 0,625 < 0,(6)$
$s_{20} =$	1 2 2 3 4 4 5 6	$x_{\varepsilon-1} > \frac{2}{3} < \frac{5}{7}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(6) < 0,(714285)$
$s_{21} =$	1 2 2 3 4 5 5 6	$x_{\varepsilon-1} > \frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(714285) < 0,75$
$s_{22} =$	1 2 3 3 4 5 6 6	$x_{\varepsilon-1} \geqq \frac{3}{4} < \frac{7}{9}$ – – $x_{\varepsilon-1} \geqq 0,75 < 0,(7)$
$s_{23} =$	1 2 3 3 4 5 6 7	$x_{\varepsilon-1} > \frac{7}{9} < \frac{4}{5}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(7) < 0,8$
$s_{24} =$	1 2 3 4 4 5 6 7	$x_{\varepsilon-1} \geqq \frac{4}{5} < \frac{5}{6}$ – – $x_{\varepsilon-1} \geqq 0,8 < 0,8(3)$
$s_{25} =$	1 2 3 4 5 5 6 7	$x_{\varepsilon-1} > \frac{5}{6} < \frac{6}{7}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,8(3) < 0,(857142)$
$s_{26} =$	1 2 3 4 5 6 6 7	$x_{\varepsilon-1} > \frac{6}{7} < \frac{7}{8}$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(857142) < 0,875$
$s_{27} =$	1 2 3 4 5 6 7 7	$x_{\varepsilon-1} \geqq \frac{7}{8} < \frac{8}{9}$ – – $x_{\varepsilon-1} \geqq 0,875 < 0,(8)$
$s_{28} =$	1 2 3 4 5 6 7 8	$x_{\varepsilon-1} > \frac{8}{9} < 1$ – – $x_{\varepsilon-1} > 0,(8) < 1$

7.

Dans les expressions des fractions en décimales, à droite de la table, les chiffres qui sont entre des crochets signifient des ***périodes,*** qui reviennent à l'infini; là où il n'y a pas des chiffres mis entre des crochets, les décimales expriment ***exactement*** la fraction dont il s'agit.

Notes.

I. Il est à remarquer que dans la série des fractions (2.), qui représentent les valeurs de $x_{\varepsilon-1}$ pour lesquelles les termes des séries complémentaires (3.) changent de valeur, la somme de chaque couple de fractions à égale distance du commencement et de la fin, est $= 1$. Cela est clair en soi même; car soit $\frac{m}{n}$ une quelconque des fractions (2.), c'est-à-dire une des fractions irréductibles < 1, $1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n}$ en est évidemment une autre; et comme la série (2.) comprend ***toutes*** les fractions qui existent pour un dénominateur < 10, il faut que pour chaque fraction, il s'en trouve dans la série une autre qui, ajoutée à la première, donne 1 pour somme.

II. Pareillement les termes de chaque série complémentaire (3.), à une distance quelconque du commencement, par ex. de la série s_λ, ajoutés aux termes de la série $s_{28-\lambda}$, qui est à égale distance de la fin, donnent les termes de la ***dernière*** série $s_{28-\lambda}$. Cela est également clair; car, comme les fractions (2.), en allant de gauche à droite, augmentent de la même manière, qu'elles diminuent en allant de droite à gauche, il faut, que les termes des séries complémentaires, en commençant par la dernière et en allant vers la première, diminuent aussi de la même manière qu'ils augmentent en commençant par la première et en allant vers la dernière.

En vertu de cette remarque, il suffit de calculer les ***14 premières*** séries complémentaires; les autres se trouveront immédiatement, en déduisant de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 les termes des 14 séries calculées.

III. En troisième lieu, il est à remarquer, que toutes les fractions $\frac{m}{n}$ (2) pourront être tirées de la première $\frac{1}{9}$ seule, si dans l'équation

$$4. \qquad nu - mv = 1$$

on suppose d'abord $m = 1$, $n = 9$, qu'on prenne pour u et v les plus grandes valeurs possibles de $u < v$, $v < 10$ que donne l'équation, qu'on donne alors à m et n les valeurs trouvées de u et v, qu'on prenne les nouvelles valeurs de u et v qui y correspondent, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à $u = 1$ et $v = 1$. Car, comme la série (2.) contient ***toutes*** les fractions irré-

ductibles qui ***existent***, avec un dénominateur < 10, il n'y a pas de fraction de cette sorte qui puisse tomber ***entre*** deux fractions consécutives de la série; donc chacune de deux fractions consécutives est toujours ***moins*** différente de l'autre, que ne l'est aucune autre fraction, dont le dénominateur n'est pas plus grand que 9. Or, cette propriété est effectivement celle de la fraction $\frac{u}{v}$ envers la fraction $\frac{m}{n}$, en donnant à u et v les plus grandes valeurs possibles et < 10; car en développant $\frac{m}{n}$ en ***fraction continue,*** $\frac{u}{v}$ est alors la dernière des fractions ***convergentes*** que présente la fraction continue, et cette fraction convergente a la proprieté en question.

En faisant le calcul, on trouve ce qui suit.

L'équation (4.) donne

	Pour				Donc
1.	$\frac{m}{n}=\frac{1}{9}$,	$9u=v+1$,	$u=1,2,3,\ldots.$,	$v=8,17,26,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{1}{8}$;
2.	$\frac{m}{n}=\frac{1}{8}$,	$8u=v+1$,	$u=1,2,3,\ldots.$,	$v=7,15,22,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{1}{7}$;
3.	$\frac{m}{n}=\frac{1}{7}$,	$7u=v+1$,	$u=1,2,3,\ldots.$,	$v=6,13,19,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{1}{6}$;
4.	$\frac{m}{n}=\frac{1}{6}$,	$6u=v+1$,	$u=1,2,3,\ldots.$,	$v=5,11,16,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{1}{5}$;
5.	$\frac{m}{n}=\frac{1}{5}$,	$5u=v+1$,	$u=1,2,3,\ldots.$,	$v=4,9,14,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{2}{9}$;
6.	$\frac{m}{n}=\frac{2}{9}$,	$9u=2v+1$,	$u=1,3,5,\ldots.$,	$v=4,13,22,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{1}{4}$;
7.	$\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$,	$4u=v+1$,	$u=1,2,3,\ldots.$,	$v=3,7,11,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{2}{7}$;
8.	$\frac{m}{n}=\frac{2}{7}$,	$7u=2v+1$,	$u=1,3,5,\ldots.$,	$v=3,10,17,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{1}{3}$;
9.	$\frac{m}{n}=\frac{1}{3}$,	$3u=v+1$,	$u=1,2,3,4,\ldots.$,	$v=2,5,8,11,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{3}{8}$;
10.	$\frac{m}{n}=\frac{3}{8}$,	$8u=3v+1$,	$u=2,5,8,\ldots.$,	$v=5,13,21,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{2}{5}$;
11.	$\frac{m}{n}=\frac{2}{5}$,	$5u=2v+1$,	$u=1,3,5,7,\ldots.$,	$v=2,7,12,17,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{3}{7}$;
12.	$\frac{m}{n}=\frac{3}{7}$,	$7u=3v+1$,	$u=1,4,7,\ldots.$,	$v=2,9,16,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{4}{9}$;
13.	$\frac{m}{n}=\frac{4}{9}$,	$9u=4v+1$,	$u=1,5,9,\ldots.$,	$v=2,11,20,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{1}{2}$;
14.	$\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$,	$2u=v+1$,	$u=1,2,3,4,5,6,\ldots.$,	$v=1,3,5,7,9,11,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{5}{9}$;

5.

	Pour				Donc
15.	$\frac{m}{n}=\frac{5}{9}$,	$9u=5v+1$,	$u=4,9,13,\ldots.$,	$v=7,16,23,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{4}{7}$;
16.	$\frac{m}{n}=\frac{4}{7}$,	$7u=4v+1$,	$u=3,7,11,\ldots.$,	$v=5,12,19,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{3}{5}$;
17.	$\frac{m}{n}=\frac{3}{5}$,	$5u=3v+1$,	$u=2,5,8,\ldots.$,	$v=3,8,13,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{5}{8}$;
18.	$\frac{m}{n}=\frac{5}{8}$,	$8u=5v+1$,	$u=2,7,12,\ldots.$,	$v=3,11,19,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{2}{3}$;
19.	$\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$,	$3u=2v+1$,	$u=1,3,5,7,\ldots.$,	$v=1,4,7,10,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{5}{7}$;
20.	$\frac{m}{n}=\frac{5}{7}$,	$7u=5v+1$,	$u=3,8,13,\ldots.$,	$v=4,11,18,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{3}{4}$;
21.	$\frac{m}{n}=\frac{3}{4}$,	$4u=3v+1$,	$u=1,4,7,10,\ldots.$,	$v=1,5,9,13,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{7}{9}$;
22.	$\frac{m}{n}=\frac{7}{9}$,	$9u=7v+1$,	$u=4,11,18,\ldots.$,	$v=5,14,23,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{4}{5}$;
23.	$\frac{m}{n}=\frac{4}{5}$,	$5u=4v+1$,	$u=1,5,9,\ldots.$,	$v=1,6,11,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{5}{6}$;
24.	$\frac{m}{n}=\frac{5}{6}$,	$6u=5v+1$,	$u=1,6,11,\ldots.$,	$v=1,7,13,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{6}{7}$;
25.	$\frac{m}{n}=\frac{6}{7}$,	$7u=6v+1$,	$u=1,7,13,\ldots.$,	$v=1,8,15,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{7}{8}$;
26.	$\frac{m}{n}=\frac{7}{8}$,	$8u=7v+1$,	$u=1,8,15,\ldots.$,	$v=1,9,17,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{8}{9}$;
27.	$\frac{m}{n}=\frac{8}{9}$,	$9u=8v+1$,	$u=1,9,17,\ldots.$,	$v=1,10,19,\ldots.$,	$\frac{u}{v}=\frac{1}{1}=1$.

Voilà toutes les fractions $\frac{u}{v}$ de la série (2.).

IV. Il est encore aisé de voir, comment tout ce qui a été dit jusqu'ici, et le théorème lui même, pourrait être étendu aux cas, où il s'agissait d'un ***plus grand nombre*** de multiples du nombre proposé Z. Le nombre 27 des changements de la série complémentaire est celui de la somme des nombres premiers relatifs aux nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, comme on le peut voir dans le tableau (1.) des valeurs $\frac{m}{n}$ de $x_{\varepsilon-1}$, pour lesquelles les changements de la série complémentaire ont lieu. Donc, généralement, si l'on vouloit pousser les multiples de $x_{\varepsilon-1}$ non seulement jusqu'à $9x_{\varepsilon-1}$, mais encore jusqu'à $\nu x_{\varepsilon-1}$, le nombre des changements de la série complémentaire, qui auroit alors $\nu-1$ termes, au lieu de 8, serait égal à la somme des nombres premiers relatifs aux nombres 2, 3, 4, 5, ... ν, et le nombre des différentes séries complé-

mentaires seroit plus grand d'une unité. Ce nombre est déjà très élevé pour la valeur 99 de ν, valeur qui seroit propre à une application au calcul de chiffres.

Application du théorème ci-dessus à la multiplication de grands nombres.

A. Pour trouver le produit d'un nombre quelconque donné $\boldsymbol{Z}$ par un autre nombre quelconque, sans multiplier successivement les chiffres de $\boldsymbol{Z}$ par les chiffres du multiplicateur, on aura besoin des multiples $2\boldsymbol{Z}$, $3\boldsymbol{Z}$, $4\boldsymbol{Z}$, $5\boldsymbol{Z}$, $6\boldsymbol{Z}$, $7\boldsymbol{Z}$, $8\boldsymbol{Z}$, $9\boldsymbol{Z}$ du multiplicande $\boldsymbol{Z}$. Ces multiples connus, il n'y aura qu'à les copier, en les mettant aux places que le multiplicateur préscrit, et à les additionner.

B. Or, on aura ces multiples, écrits l'un sous l'autre, et les unités des différentes ordres, mises partout dans les mêmes lignes verticales, si l'on connait les séries des chiffres qui doivent être écrits dans ces différentes lignes.

La table qui se trouve à la fin de ce mémoire, donne immédiatement et sans calcul ces séries verticales de chiffres, et elle est fondée sur le théorème de Mr. ***Slonimsky***. Voici comment.

C. Pour plus de clarté, prenons pour exemple le nombre $\boldsymbol{Z} = 53908761142899274$. Les multiples de ce nombre, qu'il s'agit de trouver *sans calcul*, sont les suivants:

$$\mathfrak{z}_{\varepsilon+1}\mathfrak{z}_{\varepsilon}\mathfrak{z}_{\varepsilon-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathfrak{z}_3\,\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_1$$

6.
$$\left\{\begin{array}{rl}
\boldsymbol{Z} = & 5\,3\,9\,0\,8\,7\,6\,1\,1\,4\,2\,8\,9\,9\,2\,7\,4\\
2\boldsymbol{Z} = & 1\,0\,7\,8\,1\,7\,5\,2\,2\,2\,8\,5\,7\,9\,8\,5\,4\,8\\
3\boldsymbol{Z} = & 1\,6\,1\,7\,2\,6\,2\,8\,3\,4\,2\,8\,6\,9\,7\,8\,2\,2\\
4\boldsymbol{Z} = & 2\,1\,5\,6\,3\,5\,0\,4\,4\,5\,7\,1\,5\,9\,7\,0\,9\,6\\
5\boldsymbol{Z} = & 2\,6\,9\,5\,4\,3\,8\,0\,5\,7\,1\,4\,4\,9\,6\,3\,7\,0\\
6\boldsymbol{Z} = & 3\,2\,3\,4\,5\,2\,5\,6\,6\,8\,5\,7\,3\,9\,5\,6\,4\,4\\
7\boldsymbol{Z} = & 3\,7\,7\,3\,6\,1\,3\,2\,8\,0\,0\,0\,2\,9\,4\,9\,1\,8\\
8\boldsymbol{Z} = & 4\,3\,1\,2\,7\,0\,0\,8\,9\,1\,4\,3\,1\,9\,4\,1\,9\,2\\
9\boldsymbol{Z} = & 4\,8\,5\,1\,7\,8\,8\,5\,0\,2\,8\,6\,0\,9\,3\,4\,6\,6
\end{array}\right.$$

$$\sigma_{\varepsilon+1}\sigma_{\varepsilon}\sigma_{\varepsilon+1}\ldots\ldots\ldots\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma$$

Nous désignerons par $\mathfrak{z}_{\varepsilon+1}$, $\mathfrak{z}_{\varepsilon}$, $\mathfrak{z}_{\varepsilon-1}$ trois chiffres quelconques *consécutifs* du nombre $\boldsymbol{Z}$, par $\sigma_{\varepsilon+1}$, σ_{ε}, $\sigma_{\varepsilon-1}$ les séries des chiffres dans les lignes verticales qui passent par les chiffres $\mathfrak{z}_{\varepsilon+1}$, $\mathfrak{z}_{\varepsilon}$ et $\mathfrak{z}_{\varepsilon-1}$, et par x_{ε}, $x_{\varepsilon-1}$ et $x_{\varepsilon-2}$ les fractions décimales, formées par les chiffres de $\boldsymbol{Z}$ qui *suivent* les chiffres $\mathfrak{z}_{\varepsilon+1}$, $\mathfrak{z}_{\varepsilon}$ et $\mathfrak{z}_{\varepsilon-1}$.

D. La série $\sigma_{\varepsilon-1}$ sera celle des ***seconds*** chiffres des multiples de $\mathfrak{z}_{\varepsilon-1}$, ***augmentés*** de la série ***complémentaire*** qui, tirée de (3.), convient à la fraction $x_{\varepsilon-2}$; et les ***premiers*** chiffres de ces mêmes multiples, ainsi augmentés, ne seront autre chose que la série ***complémentaire*** qui convient à la fraction $x_{\varepsilon-1}$; les ***premiers*** chiffres des multiples, quels qu'ils soient, ***formeront toujours une quelconque des 28 séries complémentaires;*** car, suivant le théorème, il n'en existe point d'autres. Donc, ***aussitôt que l'on connaîtra*** la série complémentaire à ajouter aux multiples de $\mathfrak{z}_{\varepsilon-1}$, ces multiples ***augmentés*** seront connus, par conséquent aussi leurs ***premiers*** chiffres le seront, et par suite non seulement les chiffres de la série $\sigma_{\varepsilon-1}$, qui sont les ***seconds*** chiffres des multiples augmentés, mais aussi ceux de la nouvelle série complémentaire qui est à ajouter aux multiples du chiffre $\mathfrak{z}_{\varepsilon}$, qui dans $\boldsymbol{Z}$ précède $\mathfrak{z}_{\varepsilon-1}$, seront connus. Or, par là on aura aussi déjà obtenu les multiples de $\mathfrak{z}_{\varepsilon}$ augmentés de la nouvelle série complémentaire, et par conséquent non seulement les chiffres de la série σ_{ε}, qui sont les ***seconds*** chiffres de ces multiples augmentés, mais aussi la série complémentaire, formée par leurs ***premiers*** chiffres, qui est à ajouter aux multiples de $\mathfrak{z}_{\varepsilon+1}$, et ainsi de suite.

Donc, ***aussitôt qu'on connaîtra*** la série complémentaire à ajouter aux multiples ***d'un quelconque*** des chiffres de $\boldsymbol{Z}$, par exemple du chiffre $\mathfrak{z}_{\lambda}$, non seulement la série σ_{λ} sera connue, mais aussi toutes les autres séries σ, qui la précèdent, en seront obtenues successivement, et si $\mathfrak{z}_{\lambda}$ est le ***dernier*** des chiffres de $\boldsymbol{Z}$, ***toutes*** les séries σ_1 sans exception, pourront être trouvées, et le problème sera résolu.

Or la série complémentaire à ajouter aux multiples du ***dernier*** chiffre $\mathfrak{z}_1$ de $\boldsymbol{Z}$ ***est effectivement toujours connue;*** elle est $s_1 = 0,0,0,0,0,0,0,0$ (3.); car la fraction x_0, qui suit le dernier chiffre, est ***zéro.*** Donc le problème de trouver ***sans calcul*** les différentes séries σ, c'est-à-dire, les multiples de $\boldsymbol{Z}$, pourra être résolu aussitôt, ***qu'on aura calculé par avance*** les séries des ***seconds*** chiffres des multiples des différents nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, ***augmentés*** de l'une ou de l'autre des 28 séries complémentaires, et qu'on aura ***indiqué*** le numéro des séries complémentaires formées dans chaque cas par les ***premiers*** chiffres de ces multiples; car, en ***premier*** lieu, les chiffres de $\boldsymbol{Z}$, quels qu'ils soient, se trouveront toujours parmi les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; en ***second*** lieu, ce sera toujours ***une quelconque*** des 28 séries complémentaires qui est à ajouter aux multiples d'un chiffre quelconque $\mathfrak{z}_{\varepsilon-1}$ de $\boldsymbol{Z}$; et en ***troisième*** lieu, chaque série complémentaire, ajoutée

aux multiples du chiffre $z_{\varepsilon-1}$, donne la nouvelle série complémentaire à ajouter aux multiples du chiffre ***précédent*** z_ε; car, cette nouvelle série complémentaire est celle que forment les ***premiers*** chiffres des multiples du chiffre $z_{\varepsilon-1}$.

E. Ce sont les résultats de ce calcul préliminaire, que présente la *table* à la fin du mémoire. Les 28 séries de nombres qui se trouvent dans la table au dessous de chacun des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, écrits en gros caractères dans la première ligne horizontale, ***sont celles des seconds chiffres des multiples de ces nombres, augmentés des différentes séries complémentaires No. 1, 2, 3, ... jusqu'à 28,*** dont les numéros sont écrits dans les première et dernière lignes ***verticales*** de la table, et au côté droit de chacune de ses séries est ***indiqué le numéro de la série complémentaire que forment les premiers chiffres des multiples des nombres 0, 1, 2, 3, ... 9, augmentés de la série complémentaire dont le numéro est indiqué dans la première et la dernière colonne verticale.***

F. Un seul exemple suffira, pour faire voir, comment la table a été calculée.

Soit proposé le chiffre 7.

Les multiples de ce nombre sont 14 21 28 35 42 49 56 63

Ajoutons y, par exemple, la série complémentaire No. 19, qui, suivant (3.) est . . . 1 1 2 3 3 4 5 5

Les multiples de 7, ***augmentés*** de ***cette*** série complémentaire, sont 15 22 30 38 45 53 61 68

Les ***seconds*** chiffres 5, 2, 0, 8, 5, 3, 1, 8 de ces multiples sont ceux qu'on trouve dans la table au dessous de 7 ***dans la 19me ligne horizontale.*** Les ***premiers*** chiffres 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6 forment, suivant (3.), ***la série complémentaire No. 22,*** et ce numéro 22 est indiqué dans la table, immédiatement à la suite des seconds chiffres 5, 2, 0, 8, 5, 3, 1, 8.

C'est de cette manière que la table a été calculée. D'ailleurs elle présente encore devant les multiples $2z$, $3z$, $4z$, $5z$, $6z$, $7z$, $8z$, $9z$ les chiffres de $0\cdot z$ et $1\cdot z$, et ces chiffres sont évidemment 0 et z eux mêmes; car les termes correspondants des séries complémentaires sont toujours $= 0$, parcequ'aucun des nombres $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ n'a pas de ***premier*** chiffre.

G. Faisons voir maintenant l'usage de la table, en l'appliquant à l'exemple (6.).

D'abord les multiples du ***premier*** chiffre $z_1 = 4$ de Z, à partir de la droite, sont 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36. Les ***seconds*** chiffres de ces

multiples sont ceux de la série verticale σ_1 dans (6.); la table les présente sous 4 dans la *première* ligne horizontale. Les *premiers* chiffres 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 des multiples de 4 forment, suivant (3.), la série complémentaire No. 12, et ce numéro 12 se trouve indiqué dans la table à la suite de la série des seconds chiffres des multiples.

Les multiples du *second* chiffre $z_2 = 7$ de z sont

7 14 21 28 35 42 49 56 63,

Mais il faut y ajouter la série complémentaire No. 12, savoir . . . . . 0 0 1 1 2 2 2 3 3.

Cela donne 7 14 22 29 37 44 51 59 66.

Les *seconds* chiffres 7, 4, 2, 9, 7, 4, 1, 9, 6 de ces multiples sont ceux de la série σ_2 de (6.), et on les trouve dans la table, sous 7, dans la ligne horizontale No. 12. Les *premiers* chiffres 0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6 des multiples forment, suivant (3.), la série complémentaire No. 21, et ce numéro 21 se trouve indiqué dans la table à la suite des seconds chiffres.

Les multiples du *troisième* chiffre $z_3 = 2$ de Z sont

2 4 6 8 10 12 14 16 18.

Il faut y ajouter la série complémentaire No. 21, savoir . . . . . 0 1 2 2 3 4 5 5 6.

Cela donne 2 5 8 10 13 16 19 21 24.

Les *seconds* chiffres 2, 5, 8, 0, 3, 6, 9, 1, 4 de ces multiples sont ceux de la série σ_3 de (6.), et on les trouve dans la table, sous 2, dans la ligne horizontale No. 21. Les *premiers* chiffres 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2 des multiples forment, suivant (3.), la série complémentaire No. 8, et ce numéro 8 est indiqué dans la table à la suite des seconds chiffres.

Et ainsi de suite.

II. On voit par là, comment les multiples d'un nombre quelconque proposé Z, peuvent être tirés de la table *sans aucun calcul.*

Dans notre exemple, on écrit d'abord les nombres que donne la table sous $4 = z_1$ dans sa ligne horizontale No. 1. Ces nombres sont ceux de la colonne σ_1 dans (6.). Puis, on écrit les nombres que donne la table sous $7 = z_2$ dans la ligne horizontale No. 12, numéro indiqué à la suite des nombres qui formaient la série σ_1. Ce sont les termes de la colonne σ_2 dans (6.). Alors on écrit les nombres que donne la table sous $2 = z_3$ dans la ligne horizontale No. 21, numéro indiqué à la suite des nombres de la série σ_2; et ainsi de suite.

I. Maintenant, pour multiplier un nombre quelconque donné Z par un autre nombre quelconque Y, le premier procédé qui s'offre seroit, d'écrire préalablement les multiples $1Z$, $2Z$, $3Z$, $4Z$, $5Z$, $6Z$, $7Z$, $8Z$, $9Z$ de Z, tirés sans calcul de la table, comme il l'a été décrit en (*H.*); puis de mettre de la manière ordinaire, à leurs places, l'un sous l'autre, les multiples de Z, comme le demandent les différents chiffres de Y, et enfin, de prendre la somme de ces différentes lignes de nombres. Mais il n'est pas même nécessaire d'écrire préalablement les multiples de Z; la table donne *immédiatement* les différentes lignes des nombres, dont on n'aura ensuite qu'à prendre la somme. Un exemple fera voir comment cela se pratique.

Soit le nombre ci-dessus

7. $\begin{cases} Z = 5390876142899274 \text{ à multiplier} \\ \text{par } Y = 495014320786, \end{cases}$

le calcul est le suivant:

$Z = 5390876142899274$
$Y = \quad 495014320786$

8.
ligne 1 . . . . . 0840826664284422 4 . . . No. 1 chiffre 6 No. 18
– 2 . . . . . 3570801884787770 4 . . . – 18 – – 8 – 26
– 3 . . . . . 9300257771520055 1 . . . . – 26 – – 7 – 23
– 4 . . . . . 3270654003167715 3 . . . . . – 23 – – 0 – 1
– 5 . . . . . 0680642228468844 8 . . . . . – 1 – – 2 – 6
– 6 . . . . . 6980529332658862 2 . . . . . – 6 – – 3 – 9
– 7 . . . . . 1280405447848880 7 . . . . . – 9 – – 4 – 13
– 8 . . . . . 7420108115212220 5 . . . . . – 13 – – 1 – 4
– 9 . . . . 0010110000011101 0 . . . . . – 4 – – 0 – 1
– 10 . . . . 5550050550005505 0 . . . . . – 1 – – 5 – 15
– 11 . . . 7850667998965596 8 . . . . . – 15 – – 9 – 28
– 12 . . 4440949449994494 9 . . . . . – 28 – – 4 – 14
– 13 . . 2140332001034403 1 . . . . . – 14 – – 0 – 1

$ZY = 266856087815669932059225093 64$

La ligne No. 1 du produit contient les *seconds* chiffres des différents multiples du *dernier* nombre 6 de Y, que demandent les différents chiffres de Z. La table les donne dans sa ligne horizontale No. 1 sous 6; par exemple, le premier nombre 5 de Z donne, suivant la table, le chiffre 0; le second nombre 3 donne le chiffre 8; le troisième nombre 9 donne le chiffre 4 etc.

Puis les *premiers* chiffres des différents multiples du dernier nombre 6 de Y (si on les vouloit écrire), seroient tous à placer *d'un pas de plus à gauche* et aux *mêmes places* que prendront les *seconds* chiffres des multiples de *l'avant-dernier* chiffre 8 de Y. Ces *premiers* chiffres des multiples de 6, dernier chiffre de Y, sont, suivant la table, compris *tous* dans *la série complémentaire No. 18*, comme cela se trouve indiqué à la suite des *seconds* chiffres des multiples de 6 dans la ligne horizontale de la table No. 1.

Donc, en prenant maintenant les *seconds* chiffres des différents multiples du *l'avant-dernier* chiffre 8 de Y, et en y ajoutant en même temps les *premiers* chiffres des multiples de 6, qui ne sont pas encore écrits, on les trouvera tous dans *la ligne horizontale No. 18* de la table sous 8; et de là sont tirés les chiffres de la ligne No. 2 dans (8.). En effet, le premier chiffre 5 de Z donne en vertu de la ligne horizontale No. 18 de la table sous 8 le chiffre 3, le second chiffre 3 de Z donne le chiffre 5, le troisième chiffre 9 de Z donne le chiffre 7 etc., et ce sont les chiffres de la ligne No. 2 dans (8.).

Par cela, on a maintenant introduit dans le produit à calculer les *seconds* et les *premiers* chiffres de tous les produits du dernier chiffre 6 de Y, par les différents chiffres de Z, et par conséquent *tout* ce qui concerne ces produits. Aussi a t'on déjà écrit les *seconds* chiffres des produits de l'avant-dernier chiffre 8 de Y, par les différents chiffres de Z; ils sont *compris* dans les nombres de la ligne No. 2 dans (8.). Mais les *premiers* chiffres de ces produits ne sont pas encore entrés en calcul.

Ces premiers chiffres, si on les vouloit écrire, seroient à placer tous à *un pas de plus à gauche*, et *aux mêmes places* qui conviennent aux *seconds* chiffres des multiples du chiffre 7, qui dans Y précède l'avant-dernier chiffre 8. Mais ces premiers chiffres des multiples de 8, *avant-dernier* chiffre de Y, multiples qui sont déjà augmentés par les *premiers* chiffres des multiples du *dernier* chiffre 6 de Y, sont, suivant la table, compris *tous* dans la *série complémentaire No 26;* comme cela se trouve indiqué à la suite des *seconds* chiffres des multiples de 8 dans la ligne horizontale de la table No. 18. Donc, en prenant maintenant les *seconds* chiffres des différents multiples du chiffre 7, qui dans Y précède l'avant-dernier chiffre 8, et en y ajoutant en même temps les *premiers* chiffres des multiples de 8, qui ne sont pas encore écrits, on les trouvera tous dans la *ligne horizontale No. 26* de la table, sous 7, et c'est de là, que sont tirés les chiffres de la ligne No. 3 dans (8.). Le premier chiffre 5 de Z donne en vertu de la ligne horizontale No. 26 de la

table, sous 7, le chiffre 9, le second chiffre 3 de Z donne le chiffre 3, le troisième chiffre 9 de Z donne le chiffre 0 etc.

En continuant de cette manière, et conformément à ce qui se trouve annoté à la droite du calcul (8.), on tirera immédiatement de la table, et sans aucun calcul, les chiffres de toutes les lignes No. 1, 2, 3, 4 etc. dans (8.). Mais il s'agit encore de la *dernière* ligne No. 13. Elle contient les *premiers* chiffres des multiples du *premier* chiffre 4 de Y, multiples, qui sont sous l'influence de la série complémentaire No. 14. Donc on les trouvera dans la ligne horizontale No. 14 de la table, *sous* 0; car le chiffre, qui dans Y précède le *premier* chiffre 4, est zéro. Le premier chiffre 5 de Z y donne le chiffre 2, le second chiffre 3 donne le chiffre 1, le troisième chiffre 9 donne le chiffre 4 etc.

Ayant tiré de la table les différentes lignes horizontales du produit ZY, il ne reste qu'à en prendre la *somme.*

K. Si une *seule* personne faisait le calcul, en se servant de la table, l'opération seroit évidemment plus laborieuse encore, et le résultat plus sujet à des erreurs, que la multiplication ordinaire; mais il est clair, qu'aussitôt que *deux* personnes, dont l'une tire les chiffres de la table et les dicte à l'autre, qui les écrit, se réunissent, le calcul sera *beaucoup* moins fatiguant, et le résultat *beaucoup* plus sûr, que la multiplication ordinaire; car il n'y a ici *rien* à calculer, il n'y a qu'à lire, de vive voix, et à écrire. Donc, dans ce cas la table peut être effectivement d'une véritable et grande utilité pour la pratique. On pourroit même dire, que les produits, surtout de *très-grands* nombres, pourront être trouvés de cette manière plus facilement encore, et incontestablement avec plus de sureté, que par les *logarithmes.*

Donc, déjà à cause de cette application du théorème de Mr. *Slonimsky,* ce théorème est important; mais il peut bien outre cela être encore intéressant dans la théorie de nombres, et y avoir plusieurs autres conséquences.

Berlin au mois de Novembre 1845.

16.

Über die gleichseitigen Dreiecke, welche um ein gegebenes Dreieck gelegt werden können.

(Von dem Herrn Conrector *Fasbender* zu Iserlohn.)

Soll (Taf. I. Fig. 1.) um ein Dreieck ABC ein gleichseitiges DEF gelegt werden, so kann eine Seite DE unter beliebigem Winkel φ gegen BC gezogen werden. Die Länge seiner Seite ist

$$\frac{a\cdot\sin\varphi+b\cdot\sin(\frac{1}{3}\pi+\gamma-\varphi)}{\sin\frac{1}{3}\pi}.$$

Die Lothe, die man durch A, B und C auf die zugehörigen Seiten von DEF errichtet, schliefsen ebenfalls ein gleichseitiges Dreieck ein. Für seine Seite erhält man, wenn man $\varphi-\frac{1}{2}\pi$ an die Stelle von φ setzt,

$$\frac{-a\cdot\cos\varphi+b\cdot\cos(\frac{1}{3}\pi+\gamma-\varphi)}{\sin\frac{1}{3}\pi}.$$

Werden die Inhalte der beiden gleichseitigen Dreiecke mit M und m bezeichnet, so ist

$$(\Theta.)\qquad M+m=\frac{a^2+b^2-2ab\cdot(\frac{1}{3}\pi+\gamma)}{2\sin\frac{1}{3}\pi}.$$

Hiernach ist DEF ein Maximum, wenn die drei Lothe sich in Einem Puncte schneiden. Dies geschieht fortwährend unter $\frac{2}{3}\pi$, also (vorausgesetzt, dafs kein Winkel von ABC gröfser ist als $\frac{2}{3}\pi$) in dem Puncte, dessen Summe der Abstände von den 3 Spitzen des Dreiecks ein Minimum ist. Man kann daher, wenn dieser Punct gefunden ist, auch das gröfste um ABC zu legende gleichseitige Dreieck zeichnen.

Den Inhalt dieses letztern giebt die rechte Seite von $(\Theta.)$ an. Für die Höhe h ist also

$$h^2=a^2+b^2-2ab\cos(\tfrac{1}{3}\pi+\gamma).$$

Dieser Ausdruck mufs hinsichtlich des Dreiecks ABC symmetrisch sein. In der That läfst er sich, wenn I der Inhalt von ABC ist, verwandeln in

$$\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+4I\sin\tfrac{1}{3}\pi.$$

Dasselbe ergiebt sich, wenn man h construirt. Sind (Fig. 2.) die Dreiecke CAG, ABH und BCI gleichseitig, so ist BG oder AI die zu construirende Linie; beide aber haben mit CH gleiche Länge.

Diese drei Linien schneiden sich in einem und demselben Puncte. Ist K der Durchschnitt von BG und AI, so ist, der Congruenz wegen, $\angle KIC = KBC$; also läfst sich durch die Puncte K, B, I und C ein Kreis legen und es ist $\angle BKC = \frac{2}{3}\pi$. Dasselbe gilt von AKC, und es mufs auch nun $AKB = \frac{2}{3}\pi$ sein. Daher läfst sich durch A, K, B und H ein Kreisbogen legen, da $HKA = \frac{1}{3}\pi$ und $CKH = \pi$ ist. Die Linie CH geht also durch den Durchschnitt von AI und BG; dieser Durchschnitt ist der obige Punct der kleinsten Abstandssumme. Überdies ist jede der drei genannten Linien diese kleinste Abstandssumme. Wird nemlich um BIC jener Kreis beschrieben, so ist, wo man auch K auf dem Bogen BC nimmt, stets

$$KB + KC = KI,$$

also

$$KA + KB + KC = AI.$$

Die kleinste Abstandssumme des Dreiecks ABC ist also gleich der Höhe des gröfsten um ABC zu legenden gleichseitigen Dreiecks.

Da BG auf DE senkrecht steht, so ist das aus F auf DE gefällte Loth BG nicht nur gleich, sondern auch parallel. Daher ist ferner FG mit DE, und ähnlich, DH mit EF und EI mit DF parallel.

Iserlohn, im März 1845.

17.

Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Von Hrn. Dr. *Öttinger*, Prof. ord. an der Universität zu Freiburg im Br.)

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 16. im dritten und No. 21. im vierten Heft 26ten Bandes.)

§. 19.

Von r Urnen enthält jede m Kugeln, die der Reihe nach mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m bezeichnet sind. Aus jeder Urne wird gleichzeitig eine Kugel gezogen und nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen. Die Ziehung geschieht $p$mal. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs k bestimmte Kugeln erschienen sein werden?

Die Zahl der günstigen Fälle, welche bei einer Ziehung aus einer Urne eintreffen können, ist k. Bei r Urnen wird sich die Zahl auf k^r erheben. Werden nun p Ziehungen gemacht, so steigt die Zahl der günstigen Fälle auf

$$A = (k^r)^p = k^{rp}.$$

Auf gleiche Weise findet sich die Zahl aller möglichen Fälle. Sie ist

$$A_1 = m^{rp}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$1. \qquad w = \frac{k^{rp}}{m^{rp}}.$$

Diese Gleichung bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dafs k bestimmte Kugeln, also nicht mehr als diese Anzahl, erscheinen werden. Es ist also möglich, dafs nur eine, oder zwei, oder mehrere, oder alle zugleich, in beliebiger Verbindung erscheinen werden. Sie bestimmt daher zugleich die Wahrscheinlichkeit, dafs keine von den $m - k$ übrigen Kugeln darunter enthalten sein wird. Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich sofort auch die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den obigen Verhältnissen in rp Ziehungen keine von k

bestimmten Kugeln erscheinen werde. Sie ist

$$2. \quad w = \left(\frac{m-k}{m}\right)^{rp} = \left(1-\frac{k}{m}\right)^{rp}.$$

Diese Gleichung führt zu der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit

$$3. \quad w = 1-\left(\frac{m-k}{m}\right)^{rp}.$$

Sie bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dafs nicht keine von k bestimmten Kugeln, also dafs eine, oder zwei, oder mehrere, oder alle, ein- oder mehreremal, einzeln, oder in Verbindung, nicht nur unter sich, sondern auch in Verbindung mit den übrigen, oder dafs von k bestimmten Kugeln wenigstens eine einmal, oder mehreremal erscheinen werde. Setzt man $k=1$ in (3.), so ist

$$4. \quad w = 1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^{rp}.$$

Diese Gleichung giebt die Wahrscheinlichkeit an, dafs unter den obigen Bedingungen eine bestimmte Kugel wenigstens einmal erschienen sei.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach p Ziehungen k bestimmte Kugeln zugleich und darunter jede wenigstens einmal erscheinen werden?

Diese Wahrscheinlichkeit wird sich bestimmen lassen, wenn wir von der Anzahl derjenigen Fälle, in welchen eine bestimmte Kugel wenigstens einmal erscheinen wird, aus- und von ihr zu jeder von den übrigen k bestimmten Kugeln übergehen. Die Zahl der Fälle, in welchen eine Kugel wenigstens einmal erscheint, ergiebt sich aus (4.), wenn die Anzahl der Gruppen $(m-1)^{rp}$ von der Gesammtzahl m^{rp} abgezogen wird. Dies führt zu folgendem Ausdrucke:

$$m^{rp}-(m-1)^{rp}.$$

Da nun k bestimmte Kugeln in Betracht kommen, so erhält man

$$A_1 = m^{rp}-k(m-1)^{rp}.$$

Diese Bestimmung rechtfertigt sich leicht durch die Gleichung

$$\begin{aligned} A_1 = P'[1, 2, \ldots. m]^{rp} &- 1P'[2, 3, \ldots. m]^{rp} \\ &- 2P'[1, 3, 4, \ldots. m]^{rp} \\ &- 3P'[1, 2, 4, \ldots. m]^{rp} \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &- kP'[1, 2, \ldots. k-1, k+1, \ldots. m]^{rp}. \end{aligned}$$

Man bemerkt leicht, dafs hierdurch zu viele Gruppen ausgeschieden worden

sind. Der Überschufs mufs bestimmt und dem vorstehenden Ausdrucke zugezählt werden. Das angegebene Schema zeigt, dafs $n-2$ Kugeln unter je zwei Gruppen-Anzahlen zugleich, also zuviel ausgeschieden wurden. Unter $1P'[2,3,\ldots n]^{rp}$ und $2P'[1,3,\ldots m]^{rp}$ ist nämlich die gleiche Gruppen-Anzahl $P'[3,4,\ldots m]^{rp}$, unter $1P'[2,3,\ldots m]^{rp}$ und $3P'[1,2,4,\ldots m]^{rp}$ die Gruppen-Anzahl $P'[2,4,5,\ldots m]^{rp}$ u. s. w. ausgeschieden worden. Die Vereinigung aller dieser zuviel ausgeschiedenen Gruppen führt zu folgendem Ausdrucke:

$$\frac{k(k-1)}{2\cdot 1}(m-2)^{rp}.$$

Durch das Zuzählen dieses Ausdrucks ergiebt sich selbst wieder ein Überschufs in der günstigen Gruppen-Anzahl. Diesen hat man auf ähnliche Weise zu ermitteln. Setzt man diese Schlüsse fort, so erhält man folgenden weiter auszuscheidenden Ausdruck:

$$\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3)^{rp}.$$

Durch Fortsetzung dieser Bemerkungen entsteht endlich folgender Ausdruck, welcher die der Ziehung günstige Gruppen-Anzahlen in sich begreift:

$$5.\quad A = m^{rp} - k(m-1)^{rp} + \frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-2)^{rp} - \frac{k^{3|-1}}{1^{3|1}}(m-3)^{rp} \ldots . \ldots (-1)^k \frac{k^{k|-1}}{1^{k|1}}(m-k)^{rp}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$6.\quad w = 1 - k\left(\frac{m-1}{m}\right)^{rp} + \frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{m-2}{m}\right)^{rp} - \frac{k^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{m-3}{m}\right)^{rp} + \ldots . (-1)^k\left(\frac{m-k}{m}\right)^{rp},$$

oder, wenn man den Ausdruck durch Unterschiede zu Hülfe nimmt:

$$7.\quad w = \frac{\Delta^k (m-k)^{rp}}{m^{rp}}.$$

In diesem Ausdruck sind k und m in so weit von einander unabhängig, als k nicht gröfser als m werden kann. Dasselbe gilt von k und rp. Für $k = m$ wird aus (6.) und (7.)

$$8.\quad w = \frac{\Delta^m 0^{rp}}{m^{rp}} = 1 - m\left(\frac{m-1}{m}\right)^{rp} + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{m-2}{m}\right)^{rp} - \ldots . (-1)^m\left(\frac{1}{m}\right)^{rp}.$$

Setzt man $rp = m$, so geht (8.) in

$$9.\quad w = \frac{\Delta 0^m}{m^m} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot m}{m^m}$$

über; wie bekannt. Es ist klar, dafs alle die vorstehenden Gleichungen auch gelten, wenn nur eine Urne vorhanden ist, worin sich m, mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots m$

bezeichnete, Kugeln befinden. Die Zahl der Ziehungen wird dann rp sein. In diesem Fall kann sogar an die Stelle von rp jede beliebige Anzahl von Ziehungen gesetzt werden.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade q verschieden bezeichnete Kugeln (nicht mehr und nicht weniger) erscheinen werden?

Diese Frage beantwortet sich dadurch, dafs wir die Zahl der günstigen Fälle bestimmen, wo gerade q verschieden bezeichnete Kugeln aus einer Urne gezogen werden können, in welcher q verschiedene Kugeln enthalten sind. Diese Gruppen-Anzahl ergiebt sich aus (5.), wenn dort $m = k = q$ gesetzt wird. Hiernach ist

$$A = q^{rp} - q(q-1)^{rp} + \frac{q^{2\,|\,-1}}{1^{2\,|\,1}}(q-2)^{rp} - \frac{q^{3\,|\,-1}}{1^{3\,|\,1}}(q-3)^{rp} + \ldots . (-1)^q\, 1^{rp}.$$

Die hiedurch ausgedrückte Anzahl kann so oft erscheinen, als sich Gruppen zur $q$ten Classe aus m verschiedenen Kugeln bilden lassen. Danach ist die dem Ereignisse günstige Gruppen-Anzahl:

$$10. \quad A = \frac{m^{q\,|\,-1}}{1^{q\,|\,1}}\left[q^{rp} - q(q-1)^{rp} + \frac{q^{2\,|\,-1}}{1^{2\,|\,1}}(q-2)^{rp} - \ldots .\right] = \frac{m^{q\,|\,-1}}{1^{q\,|\,1}}\,\Delta^q 0^{rp}$$
$$= \frac{m^{m-q\,|\,-1}}{1^{m-q\,|\,1}}\,\Delta^q 0^{rp}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$11. \quad w = \frac{m^{q\,|\,-1}}{1^{q\,|\,1}}\left[\left(\frac{q}{m}\right)^{rp} - q\left(\frac{q-1}{m}\right)^{rp} + \frac{q^{2\,|\,-1}}{1^{2\,|\,1}}\left(\frac{q-2}{m}\right)^{rp} - \ldots .\right]$$
$$= \frac{m^{m-q\,|\,-1}}{1^{m-q\,|\,1}} \cdot \frac{\Delta^q 0^{rp}}{m^{rp}}.$$

Durch Beantwortung der vorliegenden Frage wird auch die folgender möglich werden. Wie grofs ist unter den genannten Bedingungen die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens q verschiedene Kugeln in p hinter einander folgenden Ziehungen aus r Urnen erscheinen werden?

Die Bestimmung der Anzahl der dem Ereignisse günstigen Fälle beruht darauf, dafs man die Zahl der Fälle angiebt, in welchen gerade q, oder $q+1$, oder $q+2$ u. s. w., oder endlich m verschieden bezeichnete Kugeln erscheinen werden. Sie wird gefunden, wenn m, $m-1$, $m-2$, ... $q+1$, q statt q in (10.) gesetzt wird. Durch Einführung dieser Werthe entsteht folgende Zusammenstellung:

$$A = m^{rp} - m(m-1)^{rp} + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-2)^{rp} - \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}(m-3)^{rp} + \ldots$$

$$+ m\left[(m-1)^{rp} - \frac{(m-1)}{1}(m-2)^{rp} + \frac{(m-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-3)^{rp} - \frac{(m-1)^{3|-1}}{1^{3|1}}(m-4)^{rp} + \ldots\right]$$

$$+ \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[(m-2)^{rp} - \frac{(m-2)}{1}(m-3)^{rp} + \frac{(m-2)^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-4)^{rp} - \frac{(m-2)^{3|-1}}{1^{3|1}}(m-4)^{rp} + \ldots\right]$$

. . . . . .

$$\frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left[q^{rp} - q(q-1)^{rp} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}(q-2)^{rp} - \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}(q-3) + \ldots\right].$$

Dieser Ausdruck scheint zwar ziemlich weitläuftig. Er läfst aber viele Reductionen zu, wenn die schiefliegenden Glieder in den Reihen zusammengestellt werden. Dies giebt

$$m(m-1)^{rp} - m(m-1)^{rp} = 0,$$

$$\frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[(m-2)^{rp} - 2(m-2)^{rp} + (m-2)^{rp}\right] = \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}(1-1)^2(m-2)^{rp} = 0,$$

$$\frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[(m-3)^{rp} - 3(m-3)^{rp} + 3(m-3)^{rp} + (m-3)^{rp}\right] = \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}(1-1)^3(m-3)^{rp} = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left[q^{rp} - qq^{rp} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}q^{rp} - \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1}}q^{rp} + \ldots\right] = \frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}(1-1)^q \cdot q^{rp} = 0.$$

Es verschwinden also alle in dem obigen Ausdruck schief liegende Glieder, bis zu dem zweiten in der letzten Horizontalreihe; denn sie führen die vollständige Entwicklung des Binomiums $(1-1)^x = 0$ mit sich. Vom zweiten Gliede der genannten Horizontalreihe an sind sie nicht mehr vollständig. Dennoch kann man sie als vollständig betrachten, wenn man nur, um den dadurch entstehenden Fehler wieder gut zu machen, die fehlenden Glieder mit den entgegengesetzten Zeichen zuzählt. Dieses giebt folgenden Ausdruck:

$$\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}\left[(1-1)^{m-q+1} - 1\right](q-1)^{rp} = -\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}(q-1)^{rp},$$

$$\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left[(1-1)^{m-q+2} - 1 + \frac{m-q+2}{1}\right](q-2)^{rp} = \frac{m-q+1}{1} \cdot \frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}(q-2)^{rp},$$

$$\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left[(1-1)^{m-q+3} - 1 + \frac{m-q+3}{1} - \frac{(m-q+3)^{2|-1}}{1^{2|1}}\right](q-3)^{rp}$$

$$= -\frac{(m-q+1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{m^{m-q+3|-1}}{1^{m-q+3|1}}(q-3)^{rp},$$

. . . . . .

Die in Klammern eingeschlossenen Facultäten lassen sich nämlich nach der der Gleichung

$$1-s+\frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}-\frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}}+\ldots.(-1)^x\frac{s^{x|-1}}{1^{x|1}}=(-1)^x\frac{(s-1)^{x|-1}}{1^{x|1}}$$

summiren. Die dem Ereignisse günstige Anzahl ist demnach

$$12.\quad A=m^{rp}-\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}(q-1)^{rp}+\frac{m-q+1}{1}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}(q-2)^{rp}$$
$$-\frac{(m-q+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{m-q+3|-1}}{1^{m-q+3|1}}(q-3)^{rp}+\frac{(m-q+1)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{m^{m-q+4|-1}}{1^{m-q+4|1}}(q-4)^{rp}-\ldots.$$

Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergehen, oder negativ werden sollte. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also

$$13.\quad w=1-\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}\left(\frac{q-1}{m}\right)^{rp}+\frac{m-q+1}{1}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left(\frac{q-2}{m}\right)^{rp}$$
$$-\frac{(m-q+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{m-q+3|-1}}{1^{m-q+3|1}}\left(\frac{q-3}{m}\right)^{rp}+\ldots.$$

oder

$$14.\quad w=1-q\frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left[\frac{1}{m-q+1}\left(\frac{q-1}{m}\right)^{rp}-\frac{q-1}{m-q+2}\left(\frac{q-2}{m}\right)^{rp}+\frac{(q-1)^{2|-1}}{1^{2|1}(m-q+3}\left(\frac{q-3}{m}\right)^{rp}-\ldots.\right].$$

Aus (13.) oder (14.) läfst sich unmittelbar die Wahrscheinlichkeit ableiten, dafs höchstens q verschieden bezeichnete Kugeln in rp Ziehungen erscheinen werden. Es ist $q+1$ statt q zu setzen und das Resultat von der Einheit abzuziehen. Die fragliche Wahrscheinlichkeit ist

$$15.\quad w=\frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left(\frac{q}{m}\right)^{rp}-\frac{m-q}{1}\cdot\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}\left(\frac{q-1}{m}\right)^{rp}+\frac{(m-q)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+|1}}\left(\frac{q-2}{m}\right)^{rp}-\ldots.$$

Die hier gefundenen Gleichungen lösen zugleich Probleme aus der Combinationslehre auf. Werden nämlich die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur (rp)ten Classe gebildet, so giebt die Gleichung (5.) die Anzahl der Gruppen an, in welchen k bestimmte Elemente zugleich und unter diesen jedes wenigstens einmal vorkommt; die Gleichung (10.) giebt die Anzahl der Gruppen, in welchen gerade q verschiedene Elemente, nicht mehr und nicht weniger, vorkommen; die Gleichung (12.) giebt die Anzahl der Gruppen, in welchen wenigstens q verschiedene Elemente vorkommen, und der Zähler in der Gleichung (15.) oder

$$16.\quad A=\frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}q^{rp}-\frac{m-q}{1}\cdot\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}(q-1)^{rp}+\frac{(m-q)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}(q-2)^{rp}-\ldots.$$

giebt die Zahl der Gruppen an, in welchen höchstens q verschiedene Elemente erscheinen.

§. 20.

In einer Urne sind m verschieden bezeichnete Kugeln. Man nimmt r Kugeln einzeln, oder auch auf einmal heraus, und legt sie nach der Ziehung in die Urne zurück. Dies Verfahren wird $p$mal wiederholt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die gezogenen Kugeln nur k bestimmt bezeichneten zugehören werden?

Die Zahl der Fälle, in welchen r Kugeln aus k Kugeln mit bestimmter Bezeichnung erscheinen werden, ist $\frac{k^{r|1}}{1^{r|1}}$. Wird dies Verfahren $p$mal wiederholt, so steigt die Anzahl auf

$$A = \left(\frac{k^{r|-1}}{1^{r|1}}\right)^p = \left(\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}\right).$$

Die Zahl aller möglichen Fälle bei $p$maliger Wiederholung ist

$$A_1 = \left(\frac{k^{r|-1}}{1^{r|1}}\right)^p = \left(\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}\right)^p.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$1. \quad w = \left[\left(\frac{k}{m}\right)^{r|-1}\right]^p = \left(\frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{m(m-1)\cdots(m-r+1)}\right)^p.$$

Diese Gleichung zeigt an, dafs wenigstens r Kugeln von k bestimmten erscheinen werden. Dabei können gerade r, $r+1$, $r+2$, ... oder alle fraglichen Kugeln erscheinen. Das Erscheinen von einer der übrigen $m-k$ Kugeln ist hiebei ausgeschlossen. Daraus findet sich auch die Wahrscheinlichkeit, dafs keine von k bestimmten Kugeln in p Ziehungen erscheinen werde. Sie ist

$$2. \quad w = \left(\frac{(m-k)(m-k-1)\cdots(m-k-r+1)}{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)}\right)^p.$$

Zieht man diese Wahrscheinlichkeit von der Einheit ab, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dafs von k bestimmten Kugeln wenigstens r verschiedene ein- oder mehreremal erscheinen werden. Sie ist

$$3. \quad w = 1 - \left[\left(\frac{m-k}{m}\right)^{r|-1}\right]^p.$$

Das Mit-Erscheinen der übrigen $(m-k)$ Kugeln ist in dieser Gleichung nicht wie bei (1.) ausgeschlossen. Hiebei versteht es sich von selbst, dafs $k<m$ sein mufs. Wird $k=1$ in (3.) gesetzt, so erhält man

$$4. \quad w = 1 - \left(\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-r)}{m(m-1)\cdots(m-r+1)}\right)^p = 1 - \left(\frac{m-r}{m}\right)^p;$$

Diese Gleichung bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den genannten Bedingungen eine bestimmte Kugel wenigstens einmal erscheinen werde; wobei natürlich andere Kugeln mit erscheinen müssen.

Der Zähler in (3.)

$$5. \quad A = \left[\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \left[\frac{(m-k)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p$$

giebt die Anzahl der Gruppen, in welchen r Elemente aus k bestimmten wenigstens einmal erscheinen, wenn die Verbindungen aus m Elementen zur $r$ten Classe gebildet und die Gruppen dieser Classe $p$mal aneinander gereiht werden.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs k bestimmte Kugeln, jede wenigstens einmal erscheinen werden?

Diese Frage läfst sich auf ganz ähnliche Weise wie bei (6.) im vorigen Paragraph beantworten. Von der Zahl der Fälle, in welchen eine bestimmte Kugel wenigstens einmal erschienen ist, läfst sich leicht auf die übergehen, wo k bestimmte Kugeln erscheinen. Es ist zu dem Ende in der Gleichung (5.) $k = 1$ zu setzen und dann der zweite Ausdruck mit k zu vervielfachen. Hiernach ist

$$A_1 = \left[\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - k\left[\frac{(m-k)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p.$$

Durch den zweiten Ausdruck in dieser Darstellung sind zu viele Gruppen ausgeschieden worden. Die Anzahl läfst sich mit unbedeutenden Modificationen aus dem im vorigen Paragraph zu No. 5. angegebenen Schema ermitteln, wenn Verbindungen ohne Wiederholungen statt Versetzungen mit Wiederholungen gesetzt werden. Unter je zwei Kugeln werden die gleichen Kugeln zugleich und dadurch so viele Kugelgruppen zu oft ausgeschieden, als sich $m-2$ Kugeln zur $r$ten Classe, $p$mal wiederholt, gruppiren und k Elemente sich paarweise ordnen und mit ihnen verbinden lassen. Diese Anzahl ist in folgendem Ausdrucke enthalten:

$$\frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{(m-2)(m-3)\cdots(m-r-1)}{1\cdot 2\cdots r}\right)^p.$$

Fährt man mit dieser Ausscheidungsweise fort, so ergiebt sich folgende dem Ereignisse günstige Gruppenzahl:

$$6. \quad A = \left[\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{k}{1}\left[\frac{(m-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(m-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{k^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[\frac{(m-3)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \cdots,$$

oder, wenn man die Darstellung durch Differenzen benutzt:

$$7. \quad A = \Delta^r\left[\frac{(m-k)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$8.\quad w = \left(\frac{m^{r|-1}}{m^{r|-1}}\right)^p - \frac{k}{1}\left[\left(\frac{m-1}{m}\right)^{r|-1}\right]^p + \frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\left(\frac{m-2}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - \frac{k^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[\left(\frac{m-3}{m}\right)^{r|-1}\right]^p + \cdots$$
$$= \frac{\Delta^k[(m-k)^{r|-1}]}{[m^{r|-1}]^p},$$

oder auch in entwickelter Darstellung:

$$9.\quad w = 1 - k\left(\frac{m-r}{m}\right)^p + \frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\left(\frac{m-r}{m}\right)^{2|-1}\right]^p - \frac{k^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[\left(\frac{m-r}{m}\right)^{3|-1}\right]^p + \cdots$$

Ist $k = m$, so erhält man aus (8.) und (9.)

$$10.\quad w = \frac{\Delta^m(0^{r|-1})}{[m^{r|-1}]^p} = \frac{\Delta^m((-r+1)^{r|1})^p}{[m^{r|-1}]^p}$$
$$= 1 - m\left(\frac{m-r}{m}\right)^p + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\left(\frac{m-r}{m}\right)^{2|-1}\right]^p - \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}}\left[\left(\frac{m-r}{m}\right)^{3|-1}\right]^p + \cdots$$

Diese Gleichung bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dafs alle Kugeln erscheinen werden. Die Reihen (8.), (9.), (10.) brechen ab, wenn ein Glied negativ werden oder in 0 übergehen sollte.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade q verschiedene Kugeln, nicht mehr nicht weniger, erscheinen werden?

Enthielte die Urne nur q verschiedene Kugeln, so ergäbe sich die Zahl der dem Ereignisse günstigen Fälle aus (6.), wenn $m = q$, $k = q$ gesetzt wird. Demnach ist

$$A_1 = \left[\frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{q}{1}\left[\frac{(q-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(q-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \cdots.$$

Die Anzahl ist so oft möglich, als aus einer Anzahl von m Kugeln Gruppen gebildet werden können, welche q Kugeln in sich begreifen. Hiernach geht der vorstehende Ausdruck in folgenden über:

$$11.\quad A = \frac{m^{m|-1}}{1^{q|1}\,1^{m-q|1}}\left[\left[\frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{q}{1}\left[\frac{(q-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(q-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right] - \cdots\right].$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$12.\quad w = \frac{m^{q|-1}}{1^{q|1}}\left[\left[\left(\frac{q}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - q\left[\left(\frac{q-1}{m}\right)^{r|-1}\right]^p + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\left(\frac{q-2}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - \cdots\right]$$
$$= \frac{m^{q|-1}}{1^{q|1}}\,\frac{\Delta^q(0^{r|-1})^p}{[m^{r|-1}]^p}.$$

Die Bedingungen sind noch immer dieselben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens q Kugeln erscheinen werden?

Die Beantwortung dieser Frage beruht darauf, dafs die Anzahl der Fälle bestimmt wird, in welchen gerade q, $q+1$, $q+2$ .... oder m Kugeln erscheinen werden. Setzen wir zu dem Ende allmälig die genannten Werthe statt q in (11.), so erhalten wir folgende Zusammenstellung:

$$A = \left[\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - m\left[\frac{(m-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(m-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \ldots.$$

$$+ m\left\{\left[\frac{(m-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{m-1}{1}\left[\frac{(m-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{(m-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(m-3)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \ldots.\right\}$$

$$+ \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left\{\left[\frac{(m-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{m-2}{1}\left[\frac{(m-3)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{(m-2)^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(m-4)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \ldots.\right\}$$

. . . . . .

$$\frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left\{\left[\frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{q}{1}\left[\frac{(q-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\frac{(q-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \ldots.\right\};$$

denn es kommen nach der Bedeutung der Frage $m-q+1$ Fälle in Betracht. Werden nun die Glieder dieser Reihen in schiefer Richtung zusammengezählt, so ergiebt sich eine ganz ähnliche Reduction, wie bei der Entwicklung der Gleichung (12.) §. 16., und wir erhalten für die dem Erfolge günstige Gruppen-Anzahl:

$$13.\quad A = \left[\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}\left[\frac{(q-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{(m-q+1)}{1}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left[\frac{(q-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p$$
$$- \left(\frac{m-q+1}{1}\right)^{2|1}\frac{m^{m-q+3|-1}}{1^{m-q+3|1}}\left[\frac{(q-3)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \ldots.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs eintreffen werde, ist

$$14.\quad w = 1 - \frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}\left[\left(\frac{q-1}{m}\right)^{r|-1}\right]^p + \frac{m-q+1}{1}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left[\left(\frac{q-2}{m}\right)^{r|-1}\right]^p$$
$$- \left(\frac{m-q+1}{1}\right)^{2|1}\frac{m^{m-q+3|-1}}{1^{m-q+3|1}}\left[\left(\frac{q-3}{m}\right)^{r|-1}\right]^p + \ldots.$$
$$= 1 - q\frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left\{\frac{1}{m-q+1}\left[\left(\frac{q-1}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - \frac{q-1}{m-q+2}\left[\left(\frac{q-2}{m}\right)^{r|-1}\right]^p\right.$$
$$\left. + \frac{(q-1)^{2|-1}}{1^{2|1}(m-q+3)}\left[\left(\frac{q-3}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - \ldots.\right\}.$$

Zieht man die Gleichung (14.) von der Einheit ab, und erhöht dann q um die Einheit, so ergiebt sich daraus die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den oben genannten Bedingungen höchstens q Kugeln erscheinen werden. Sie ist

$$15.\quad w = \frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left[\left(\frac{q}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - \frac{m-q}{1}\cdot\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}\left[\left(\frac{q-1}{m}\right)^{r|-1}\right]^p$$
$$+ \left(\frac{m-q}{1}\right)^{2|1}\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left[\left(\frac{q-2}{m}\right)^{r|-1}\right]^p - \ldots.$$

Alle diese Reihen brechen ab, wenn ein Glied in 0 übergehen oder negativ werden sollte.

Die Gleichung (9.) läfst sich, wenn m und $m-r$ nicht unbedeutende Zahlen vorstellen, näherungsweise auf einen kürzeren Ausdruck bringen. Man kann dann nämlich ohne grofse Abweichung vom richtigen Werthe statt der Facultäten Potenzen einführen. Der im Zähler und Nenner der einzelnen Ausdrücke begangene Fehler wird sich durch diese Reduction wieder etwas ausgleichen, besonders auch aus dem Grunde, weil die Perioden der Reihe stark convergiren. Die Gleichung (9.) geht in folgende über:

$$w = 1 - k\left(\frac{m-r}{m}\right)^p + \frac{k^{2|-1}}{1^{2|1}}\left(\frac{m-r}{m}\right)^{2p} - \frac{k^{3|-1}}{1^{3|1}}\left(\frac{m-r}{m}\right)^{3p} + \ldots.$$

Diese Reihe fällt mit dem entwickelten Ausdruck des Binomiums $\left[1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^p\right]^k$ zusammen. Demnach ist nahe genau

$$16. \qquad w = \left[1-\left(\frac{m-r}{m}\right)^p\right]^k.$$

Die Gleichung zeigt, wie die in ihr vorkommenden Gröfsen von einander abhangen, und wie sie also auseinander abgeleitet werden können. Setzt man $w = \frac{s}{t}$, so ist

$$\frac{s}{t} = \left[1-\left(\frac{m-r}{m}\right)^p\right]^k.$$

Hieraus kann die Zahl der Ziehungen gefunden werden, die geschehen müssen, um einen beliebigen Grad von Wahrscheinlichkeit zu erlangen, dafs k bestimmte Kugeln erscheinen werden. Es ist

$$17. \qquad p = \frac{\log \sqrt[k]{t} - \log(\sqrt[k]{t} - \sqrt[k]{s})}{\log m - \log(m-r)}.$$

Soll die Zahl von Kugeln angegeben werden, die nöthig ist um irgend einen Grad von Wahrscheinlichkeit zu haben, dafs sie in p Ziehungen erscheinen werden, wenn in jeder Ziehung r Kugeln aus der Urne genommen und nach der Ziehung in dieselbe zurückgelegt werden, so ist

$$18. \qquad k = \frac{\log t - \log s}{p\log m - \log[m^p - (m-r)^p]}.$$

Soll endlich die Zahl der Kugeln bestimmt werden, die zusammen in jeder einzelnen Ziehung herausgenommen werden müssen, um bei einer bestimmten Anzahl von Kugeln und einem bestimmten Grade von Wahrscheinlichkeit das

Erscheinen von k bestimmten Kugeln erwarten zu können, so ist

$$19. \quad \log(m-r) = \log m - \frac{\log t}{kp} + \frac{\log(\sqrt[k]{t} - \sqrt[k]{s})}{p},$$

oder auch, da m bekannt ist,

$$20. \quad r = m - p\left[\log m - \frac{\log t}{pk} + \frac{\log(\sqrt[k]{t} - \sqrt[k]{s})}{p}\right].$$

Diese Gleichungen gelten noch immer, wenn m statt k gesetzt wird, oder wenn alle Kugeln in Betracht kommen. Es ist demnach aus (17.)

$$21. \quad p = \log \sqrt[m]{t} - \frac{\log(\sqrt[m]{t} - \sqrt[m]{s})}{\log m - \log(m-r)}.$$

Im Lottospiele kommen bekanntlich 90 Zahlen vor, von denen fünf in jeder Ziehung herausgenommen und nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt werden. Setzt man nun in (21.) $m = 90$, $r = 5$, und dann $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ statt $\frac{s}{t}$, so ergiebt sich die Zahl der Ziehungen, welche gemacht werden müssen, um die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ zu erlangen, dafs alle Kugeln erscheinen werden. Man kann demnach 1 gegen 1 wetten, oder man kann mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ erwarten, dafs alle Nummern in 85,77 Ziehungen erscheinen werden; man kann ferner 3 gegen 1, oder mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ wetten, dafs sie in 101 Ziehungen erscheinen werden; endlich kann man 999 gegen 1 oder mit einer Wahrscheinlichkeit 0,999 wetten, dafs sie in 200 Ziehungen erscheinen werden u. s. w.

Besetzt Jemand drei bestimmte Zahlen so oft im Lottospiel, bis er mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ erwarten kann, dafs sie erschienen sein werden, so ist $p = 27{,}61$ nach (17.), und es müfste Jemand ungefähr 28mal die nämlichen drei Zahlen besetzen, um 1 gegen 1 auf das Gelingen wetten zu können. Hätte Jemand fünf bestimmte Nummern besetzt, so müfste er ungefähr 41mal (40,66) seinen Satz wiederholen, um 1 gegen 1 auf das Gelingen wetten zu können. Benutzt man die Gleichung (20.) und setzt $k = 90$, $p = 50$, $s = 3$, $t = 4$, so ist die Zahl der Kugeln (r), die in jeder Ziehung herausgenommen werden müssen, 11,45, um 3 gegen 1 wetten zu können, dafs in 50 Ziehungen alle 90 Nummern erscheinen werden. Wünscht Jemand zu wissen, wie viele bestimmte Kugeln (k) er wählen mufs, um die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu haben, dafs sämmtliche bestimmte Kugeln in 50 Ziehungen erscheinen werden, so giebt die Rechnung 11,27 für die nöthige Anzahl; nach (18.).

Die hier gefundenen Gleichungen lösen zugleich Probleme aus der Combinationslehre auf. Werden die Verbindungen ohne Wiederholungen zur $r$ten Classe gebildet und dann $p$mal an einander gereiht, so giebt (6.) die Anzahl der Gruppen, in welchen k bestimmte Elemente wenigstens einmal vorkommen; No. 11. giebt die Zahl der Gruppen, in welchen gerade q verschiedene Elemente vorkommen (nicht mehr und nicht weniger); No. 13. giebt die Zahl der Gruppen, in welchen wenigstens q verschiedene Elemente vorkommen. Der Zähler der Gleichung (15.) giebt die Zahl der Gruppen an, in welchen höchstens q verschiedene Elemente erscheinen. Er hat folgende Gestalt:

$$22.\quad A = \frac{m^{m-q|-1}}{1^{m-q|1}}\left[\frac{q^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \frac{m-q}{1}\cdot\frac{m^{m-q+1|-1}}{1^{m-q+1|1}}\left[\frac{(q-1)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p + \frac{(m-q)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{m^{m-q+2|-1}}{1^{m-q+2|1}}\left[\frac{(q-2)^{r|-1}}{1^{r|1}}\right]^p - \ldots.$$

Hiermit ist §. 37. meiner Combinationslehre zu vergleichen.

Die in diesem und dem vorhergehenden Paragraph behandelten Probleme gehören, wie man leicht erkennt, zusammen; weswegen sie auch hier zusammengestellt sind. ***Euler*** hat einige von den in diesem Paragraphen mitgetheilten Gleichungen in „Opusc. analyt. T. II. pag. 337" entwickelt, und nach ihm ***Laplace*** in seiner „Théor. anal. d. prob. pag. 191." ***Euler*** hat seine Entwicklungen auf Combinationen gegründet, ***Laplace*** auf endliche Differenzen. Ersterer hat die Gleichungen (10.) und (14.), letzterer die Gleichungen (8.) und (10.) unter einer andern, aber weniger zweckmäfsigen Form mitgetheilt und dann seine Aufmerksamkeit zwei Anwendungen zugewendet, von welchen die eine auch hier behandelt ist. Die übrigen, in beiden Paragraphen entwickelten Gleichungen finden sich, aufser einem besonderen Falle der Gleichung (17.), in den dort angeführten Werken nicht. Die Frage: wie viele Ziehungen im Lottospiele gemacht werden müssen, um bei einer Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ erwarten zu können, dafs alle Kugeln erscheinen werden, behandelt ***Laplace*** auf zwei Arten und findet die Zahl der erforderlichen Ziehungen das einemal 85,53, als das von ihm bezeichnete sichere Resultat, das anderemal 85,204. Hier ist 85,77 gefunden. Bei Anwendung der Gleichung (10.) auf den Fall, wenn m eine sehr grofse Zahl bedeutet, legt ***Laplace*** pag. 198 die Reihe

$$1 - m\left(\frac{m-1}{m}\right)^p + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-2)^p - \ldots. = \frac{\Delta 0^p}{m^p}$$

zu Grunde, setzt sie dem Binomium $\left[1-\left(\frac{m-1}{m}\right)^p\right]^m$ gleich, und macht dabei in so weit eine unrichtige Annahme, dafs er von der Gleichung (10.), also

von der annähernden Reihe

$$1 - m\left(\frac{m-r}{m}\right)^p + \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[\left(\frac{m-r}{m}\right)^2\right]^p - \ldots,$$

die mit dem Binomium $\left[1-\left(\frac{m-r}{m}\right)^p\right]^m$ zusammenfällt (welches ein specieller Fall von No. 16. ist) hätte ausgehen sollen. Hierin liegt wohl auch der Grund der Differenz des hier gefundenen Resultats mit dem von *Laplace* gefundenen (85,204).

Mehrere von den Entwicklungen dieses Paragraphen sind schon früher von mir in diesem Journale mitgetheilt worden. In den Gleichungen (256.) und (257.), welche hierher gehören, sind Unrichtigkeiten stehen geblieben, die nach der Gleichung (14.) dieses Paragraphen zu berichtigen sind.

§. 21.

In einer Urne sind r_1 verschiedene Kugeln, die ein und dasselbe Zeichen haben, r_2 die ein gleiches, aber ein von dem vorigen verschiedenes, r_3 die ein gleiches, aber ein von den vorigen verschiedenes Zeichen tragen u. s. w., endlich, r_m Kugeln, die ein gleiches, aber ein von den früheren verschiedenes Zeichen haben. Man nimmt zwei Kugeln einzeln heraus, und bemerkt ihre Zeichen. Darauf werden p Kugeln einzeln herausgenommen und ihre Zeichen angemerkt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine Kugel, welche das Zeichen der erstern trägt, früher erscheinen werde, als eine Kugel, welche das Zeichen der zweiten trägt?

Hier wird vorausgesetzt, dafs die zwei zuerst gezogenen Kugeln verschiedene Zeichen haben. Die zwei Kugel-Arten, denen die gezogenen Kugeln angehören, sollen r_g und r_k heifsen. Die Zahl aller in der Urne enthaltenen Kugeln sei

$$s = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + \ldots + r_m.$$

Sind zwei Kugeln gezogen, so werden noch $s-2$ Kugeln in der Urne zurück und von der einen Art $r_g - 1$, von der andern $r_k - 1$ darunter begriffen sein. Die dem Erfolge günstigen Fälle beruhen nun darauf, dafs eine von $r_g - 1$ Kugeln in der ersten, zweiten, dritten, u. s. w., $p$ten Ziehung erscheinen werde, ohne dafs vorher eine Kugel von den beiden fraglichen Kugel-Arten erschienen ist.

Diese Bemerkungen führen zu folgenden Bestimmungen:

a. Eine von $r_g - 1$ Kugeln erscheint in der ersten Ziehung. Die Zahl der günstigen Fälle ist $r_g - 1$. Ihr können die übrigen $s-3$ in der Urne

zurückgelassenen Kugeln in allen möglichen Zusammenstellungen durch $p-1$ Ziehungen folgen. Die Zahl der günstigen Kugelgruppen ist

$$A_0 = (r_g-1)(s-3)^{p-1|-1} = (r_g-1)(s-3)^{r_g+r_k-3|-1}(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k+2|-1}.$$

b. Eine von r_g-1 Kugeln erscheint in der zweiten Ziehung. Die Zahl der günstigen Fälle ist r_g-1. Keine von r_g-1 und r_k-1 Kugeln darf in der ersten Ziehung vorausgegangen sein; folgen können alle von $s-4$ in der Urne zurückgelassenen Kugeln in den $p-2$ spätern Ziehungen. Die Zahl der günstigen Kugelgruppen ist

$$A_1 = (s-r_g-r_k)(r_g-1)(s-4)^{p-3|-1}$$
$$= (r_g-1)(s-4)^{r_g+r_k-3|-1}(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k+2|-1}.$$

c. Eine von r_g-1 Kugeln erscheint in der dritten Ziehung. Kugeln, welche das Zeichen der einen oder andern Art tragen, dürfen nicht vorhergegangen sein. In den spätern $p-3$ Ziehungen können Kugeln aller Art $s-5$ erscheinen. Die Zahl der günstigsten Fälle ist

$$A_2 = (s-r_g-r_k)^{2|-1}(r_g-1)(s-5)^{p-4|-1}$$
$$= (r_g-1)(s-5)^{r_g+r_k-3|-1}(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k+2|-1}.$$

Wird auf diese Weise mit Ermittlung der günstigen Fälle fortgefahren, so ergiebt sich

$$A_3 = (s-r_g-r_k)^{3|-1}(r_g-1)(s-6)^{p-5|-1}$$
$$= (r_g-1)(s-6)^{r_g+r_k-3|-1}(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k+2|-1}$$

u. s. w., und endlich

$$A_{p-1} = (s-r_g-r_k)^{p-1|-1}(r_g-1)$$
$$= (r_g-1)(s-p-2)^{r_g+r_k-3|-1}(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k+2|-1}.$$

Die Zahl aller dem Erfolge günstigen Fälle ist demnach:

1. $$A = (r_g-1)[(s-3)^{p-1|-1} + (s-4)^{p-2|-1}(s-r_g-r_k) + (s-5)^{p-3|-1}(s-r_g-r_k)^{2|-1} + \ldots.(s-r_g-r_k)^{p-1|-1}],$$

oder, anders ausgedrückt:

2. $$A = r_g-1)(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k-2|-1}[(s-3^{r_g+r_k-3|-1} + (s-4)^{r_g+r_k-3|-1} + \ldots. \ldots.(s-p-2)^{r_g+r_k-3|-1}].$$

Die Reihe in No. 2., welche in Klammern eingeschlossen ist, läfst sich leicht summiren und man findet:

3. $$A = (r_g-1)(s-r_g-r_k)^{p-r_g-r_k+2|-1}\cdot\frac{1}{r_g+r_k-2}[(s-2)^{r_g+r_k-2|-1} - (s-p-2)^{r_g+r_k-2|-1}].$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn durch die Zahl aller möglichen Gruppen $(s-2)^{p|-1}$ dividirt wird. Sie ist

$$4. \quad w = (r_g-1)\left[\frac{1}{s-2} + \frac{(s-r_g-r_k)}{(s-2)^{2|-1}} + \frac{(s-r_g-r_k)^{2|-1}}{(s-2)^{3|-1}} + \ldots \frac{(s-r_g-r_k)^{p-1|-1}}{(s-2)^{p|-1}}\right],$$

$$5. \quad w = \frac{r_g-1}{r_g+r_k-2}\left[1 - \frac{(s-p-2)^{r_g+r_k-2|-1}}{(s-2)^{r_g+r_k-2|-1}}\right].$$

Die Gleichung (3.) gilt, so lange $p+2 \leqq r_g+r_k$ ist; wie leicht zu sehen. Werden alle Kugeln gezogen, so geht (5.) über in

$$6. \quad w = \frac{r_g-1}{r_g+r_k-2}.$$

Was hier von den Kugeln mit dem einen Zeichen gesagt wurde, gilt ebenso von denen mit dem andern. Die Wahrscheinlichkeit, dafs eine Kugel mit dem zweiten Zeichen vor einer mit dem ersten Zeichen in p Ziehungen erscheinen werde, ergiebt sich, wenn r_k an die Stelle von r_g tritt. Aus (5.) ist

$$7. \quad w = \frac{r_k-1}{r_g+r_k-2}\left[1 - \left(\frac{s-p-2}{s-2}\right)^{r_g+r_k-2|-1}\right].$$

Aus (6.) ist

$$8. \quad w = \frac{r_k-1}{r_g+r_k-2}.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch auf andere Art darstellen, wenn die gezogenen zwei Kugeln, oder mehr als diese, aus dem Calcul weggelassen, oder wenn zwei bestimmte Kugel-Arten vor dem Beginne der Ziehungen bezeichnet werden. Nennt man die Zahl der in der Urne befindlichen Kugeln m, die der beiden in Frage stehenden Arten x und y, so ergeben sich folgende Ausdrücke für die angegebenen Wahrscheinlichkeiten:

$$9. \quad w = \frac{x}{x+y}\left[1 - \left(\frac{m-p}{m}\right)^{x+y|-1}\right],$$

$$10. \quad w = \frac{x}{x+y}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs aus einer Urne, welche s Kugeln von den oben bezeichneten Eigenschaften enthält, eine von r_g bestimmten Kugeln als erste, eine von r_g bestimmten Kugeln als zweite, und dann eine Kugel der ersten Art von einer der zweiten in p nachfolgenden Ziehungen erscheinen werde?

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn das in (4.) oder (5.) gefundene Resultat mit der Wahrscheinlichkeit, zwei Kugeln von den genann-

ten Arten und in bestimmter Ordnung als erste und zweite erscheinen zu sehen, verbunden wird. Sie ist

$$11.\quad w = \frac{r_g \cdot r_k (r_g - 1)}{s^{2|-1}(r_g + r_k - 2)}\left[1 - \left(\frac{s-p-2}{s-2}\right)^{r_g + r_k - 2|-1}\right],$$

$$12.\quad w = \frac{r_g \cdot r_k (r_g - 1)}{s^{3|-1}}\left[1 + \frac{s - r_g - r_k}{s-3} + \left(\frac{s-r_g-r_k}{s-3}\right)^{2|-1} + \cdots + \left(\frac{s-r_g-r_k}{s-2}\right)^{p-1|-1}\right].$$

Werden im Ganzen nur p Ziehungen gemacht, so ist in diesen Gleichungen $p-2$ statt p zu setzen.

Die Bedingungen sind wie oben. Drei Kugeln von verschiedenen Zeichen sind erschienen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine Kugel, welche das Zeichen der ersten trägt, in p Ziehungen eher als eine, welche das Zeichen der beiden übrigen trägt, erscheinen werde?

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich nach Analogie der in a, b, c .... gemachten Schlüsse sehr leicht. Nennt man die Zahl der in Frage stehenden Kugel-Arten r_g, r_k, r_h und bemerkt, dafs drei Kugeln zum Voraus gezogen sind, so ist die Wahrscheinlichkeit

$$13.\quad w = \frac{r_g - 1}{s-3}\left[1 + \frac{s - r_g - r_h - r_k}{s-4} + \left(\frac{s - r_g - r_h - r_k}{s-4}\right)^{2|-1} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \left(\frac{s - r_g - r_h - r_k}{s-4}\right)^{p-1|-1}\right],$$

oder

$$14.\quad w = \frac{r_g - 1}{r_g + r_h + r_k - 3}\left[1 - \left(\frac{s-p-3}{s-3}\right)^{r_g + r_h + r_k - 3|-1}\right].$$

Diese Schlüsse lassen sich leicht verallgemeinern, wenn mehr als drei, etwa q Kugel-Arten in Betracht kommen. Es ist

$$15.\quad w = \frac{(r_d - 1)}{s-q}\left[1 + \left(\frac{s-n}{s-q-1}\right) + \left(\frac{s-n}{s-q-1}\right)^{2|-1} + \cdots + \left(\frac{s-n}{s-q-1}\right)^{p-1|-1}\right],$$

oder

$$16.\quad w = \frac{r_d - 1}{n-q}\left[1 - \left(\frac{s-p-q}{s-q}\right)^{n-q|-1}\right].$$

Hier ist

$$n = r_d + r_e + r_f + \cdots + r_k$$

und q enthält so viele Einheiten, als verschiedene Kugel-Arten vorkommen, oder die Gröfsen r_d, r_e, r_f, ... r_k angeben, wenn jede von ihnen als Einheit betrachtet wird.

Sind noch keine Kugeln gezogen, und werden q verschiedene Kugel-Arten angenommen, deren Erscheinen in bestimmter Ordnung vorkommen soll und

fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, dafs in $p+q$ Ziehungen eine Kugel von der Art, welche r_d Kugeln enthält, vor einer Kugel der übrigen Arten erscheinen werde, so ist aus (16.)

$$17. \quad w = \frac{r_d \cdot r_e \cdot \cdots \cdot r_k (r_d - 1)}{s^{q|-1}(n-q)} \left[1 - \left(\frac{s-p-q}{s-q}\right)^{n-q|-1}\right].$$

Hier gelten die nemlichen Bedingungsgleichungen wie in (16.).

Die hier gefundenen Gleichungen werden einfacher, wenn alle Arten gleich viel Kugeln zählen, also $r_1 = r_2 = r_3 = \cdots = r_m = r$ ist. In diesem Fall geht s in rm, n in qr über und in (15.) und (16.) wird

$$18. \quad w = \frac{r-1}{rm-q}\left[1 + \frac{rm-qr}{rm-q-1} + \left(\frac{rm-qr}{rm-q}\right)^{2|-1} + \cdots + \left(\frac{rm-qr}{rm-q-1}\right)^{p-1|-1}\right],$$

$$19. \quad w = \frac{r-1}{qr-q}\left[1 - \left(\frac{rm-q-p}{rm-q}\right)^{qr-q|-1}\right].$$

Aus (17.) wird

$$20. \quad w = \frac{r^q}{(rm)^{q|-1}q}\left[1 - \left(\frac{rm-q-p}{rm-q}\right)^{qr-q|-1}\right].$$

Kommen nur zwei Kugel-Arten in Betracht, so ist aus (19.) und (20.), unter den dazu gehörigen Bedingungen,

$$21. \quad w = \tfrac{1}{2} - \frac{(rm-p-2)^{2r-2|-1}}{2(rm-2)^{2r-2|-1}},$$

$$22. \quad w = \frac{r}{2m(rm-1)}\,1 - \left[\left(\frac{rm-p-2}{rm-2}\right)^{2r-2|-1}\right].$$

Fragt man aber, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, dafs überhaupt q Kugeln von verschiedenen Zeichen zuerst, und dann in den p folgenden Ziehungen eine Kugel mit einem bestimmten Zeichen vor denen der übrigen erscheinen werde, so ist diese Wahrscheinlichkeit nach der Gleichung (17.), unter den vorhin angegebenen Bedingungen,

$$23. \quad w = \frac{rm\, r^{q-1}(m-1)^{q-1|-1}}{(rm)^{q|-1}\cdot q}\left[1 - \left(\frac{rm-q-p}{rm-q}\right)^{qr-q|-1}\right].$$

Kommen nur zwei Kugel-Arten in Betracht, so ist $q = 2$ und es wird aus (23.)

$$24. \quad w = \frac{(m-1)r}{2(mr-1)}\left[1 - \left(\frac{rm-p-2}{rm-2}\right)^{2r-2|-1}\right].$$

Werden alle Kugeln gezogen, so ist

$$25. \quad w = \frac{(m-1)r}{2(mr-1)}.$$

In einer Urne sind r_1 Kugeln, die ein- und dasselbe Zeichen tragen; r_2 die ein gleiches, aber von den vorigen verschiedenes u. s. w., r_m die ein

und dasselbe, aber von den vorigen verschiedenes Zeichen tragen. Man nimmt p Kugeln einzeln heraus und legt jede nach der Ziehung in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs eine von r_g bestimmten Kugeln früher als eine von r_k bestimmten Kugeln erscheinen werde?

Die Bestimmung der fraglichen Wahrscheinlichkeit beruht ganz auf den gleichen Bedingungen, wie die unter a, b, c, ... angegebenen, jedoch mit dem Unterschiede, dafs hier, wegen des Zurückwerfens der gezogenen Kugeln, die Zahl der in der Urne befindlichen Kugeln nicht geändert wird. Deswegen kommen die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen in Betracht, statt dafs bisher die Gruppen der Versetzungen ohne Wiederholungen in Betracht kamen. Es treten daher in den Calcul Potenzen statt Facultäten ein. Behalten wir also die angenommene Bezeichnung bei, so ist die dem Erfolge günstige Gruppen-Anzahl:

$$26. \quad A = r_g[s^{p-1} + (s - r_g - r_k)\cdot s^{p-2} + (s - r_g - r_k)^2 \cdot s^{p-3} + \cdots + (s - r_g - r_k)^{p-1}]$$
$$= r_g \frac{s^p - (s - r_g - r_k)^p}{r_g + r_k},$$

wenn die bekannte Gleichung

$$\frac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a - b} = a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + \cdots + b^m$$

zu Hülfe genommen wird. Wird durch s^p dividirt, so ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$27. \quad w = \frac{r_g}{r_g + r_k}\left[1 - \left(\frac{s - r_g - r_k}{s}\right)^p\right].$$

Die Bedingungen sind wie oben. Noch ist keine Kugel gezogen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die erste Kugel ein bestimmtes Zeichen r_g, die zweite ein anderes r_k tragen und dafs dann eine Kugel des ersten Zeichens früher, als eine des zweiten in p nachfolgenden Ziehungen erscheinen werde?

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich nach dem Bisherigen leicht. Sie ist

$$28. \quad w = \frac{r_g^2 \cdot r_k}{s^2 (r_g + r_k)}\left[1 - \left(\frac{s - r_g - r_k}{s}\right)^p\right].$$

Die bisherigen Schlüsse lassen sich leicht verallgemeinern. Kommen q bestimmte Kugel-Arten unter den oben aufgestellten Bedingungen in Betracht, so ist aus (27. und 28.) allgemein

$$29.\quad w = \frac{r_d}{r_d+r_e+\cdots+r_k}\left[1-\left(\frac{s-r_d-r_e-\cdots-r_k}{s}\right)^p\right].$$

$$30.\quad w = \frac{r_d^2\cdot r_e\cdot r_f\cdots r_k}{s^q(r_d+r_e+\cdots+r_k)}\left[1-\left(\frac{s-r_d-r_e-\cdots-r_k}{s}\right)^p\right].$$

Ist die Anzahl der verschiedenen Kugel-Arten gleich, so ergeben sich folgende einfachere Ausdrücke aus (29) und (30.):

$$31.\quad w = \frac{1}{q}\left[1-\left(\frac{mr-qr}{mr}\right)^p\right],$$

$$32.\quad w = \frac{1}{qm}\left[1-\left(\frac{m-q}{m}\right)^p\right].$$

Hierin bezeichnet q so viele Einheiten, als Kugel-Arten in Betracht kommen, oder als die Gröfsen r_d, r_e, $\cdots$ r_k enthalten, wenn jede als Einheit betrachtet wird.

Die Gleichungen (27. bis 32.) geben noch zu weitern, nicht unwichtigen Folgerungen Anlafs. Ist p eine grofse Zahl, oder werden die Ziehungen lange fortgesetzt, so wird der Werth des in den Klammern eingeschlossenen Bruches so klein, dafs er vernachlässigt werden kann. Vergleicht man dann die Wahrscheinlichkeiten, welche dem Erscheinen der Kugeln einzelner Arten zugehören, mit einander, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung aus (29.):

$$33.\quad w_g = \frac{r_g}{r_d+r_e+\cdots+r_k},$$

$$w_h = \frac{r_h}{r_d+r_e+\cdots+r_k}$$

u. s. w. Hieraus entnehmen wir Folgendes. Sind in einer Urne m verschiedene Kugel-Arten von der oben angeführten Beschaffenheit enthalten, werden viele Ziehungen gemacht, wird jede gezogene Kugel nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt, und kommen dabei q Kugeln in Betracht, so sind die Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen bestimmter Kugel-Arten bei unbegrenzter Fortsetzung der Ziehungen beinahe derjenigen gleich, welche das Erscheinen dieser Kugeln in der ersten Ziehung hat, wenn nur q bestimmte Kugel-Arten in Betracht kommen; oder sie nähern sich diesen einfachen Wahrscheinlichkeiten immer mehr und mehr, ohne ihnen je vollkommen gleich zu werden.

Vergleicht man endlich die Wahrscheinlichkeiten, oder die Zahl der Fälle, welche angeben, in welchem Verhältnisse die fraglichen Kugel-Arten beziehungsweise unter einander erscheinen werden, so ergiebt sich leicht aus den Gleichungen (27. 29. und 30.):

34. $w_g : w_h : w_k : \cdots = A_g : A_h : A_k : \cdots = r_g : r_h : r_k : \cdots$

Das heifst: die Zahl der Fälle, oder die Wahrscheinlichkeiten, welche das wiederholte Erscheinen bestimmter Kugel-Arten bei unbegrenzter oder auch begrenzter Fortsetzung der Ziehungen angeben, steht mit den zugehörigen Kugel-Anzahlen in geradem Verhältnisse.

Betrachtet man die Kugel-Anzahlen als die Ursachen der aus ihnen hervorgehenden Erscheinungen, so stellt sich, wenn man von letztern ausgeht, der vorstehende Satz so dar.

35. Das Eintreffen von Erscheinungen steht bei häufigen Wiederholungen in geradem Verhältnifs mit den Ursachen, durch welche die Erscheinungen hervorgebracht werden.

§. 22.

In einer Urne befinden sich m verschiedene Kugel-Arten. r_1 Kugeln tragen ein und dasselbe Zeichen, r_2 ein und dasselbe, aber von dem vorigen verschiedenes Zeichen u. s. w. Man zieht p Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogene Kugel in die Urne zurückzulegen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs k Kugeln von einem bestimmten Zeichen r_g früher als die von einem bestimmten Zeichen r_k erscheinen werden?

Das Ereignifs kann entweder in k, oder in $k+1$, oder in $k+2$ ersten Ziehungen u. s. w., oder endlich in p möglichen Ziehungen eintreffen. Dabei ist nothwendige Bedingung, dafs keine von r_k Kugeln in den genannten Ziehungen erscheine. Dies führt zu folgenden Bestimmungen.

a. Die Zahl der Fälle, welche dem Erscheinen von k Kugeln von einem bestimmten Zeichen in den ersten k Ziehungen günstig sind, wird durch $r^{k|-1}$ bestimmt. In den $p-k$ folgenden Ziehungen kann jede beliebige Zusammenstellung aus allen übrigen Kugeln folgen. Nennt man die Zahl aller in der Urne vorhandenen Kugeln, wie im vorigen Paragraph, s, so ist die dem Erfolge in diesem Falle günstige Gruppen-Anzahl

$$A_0 = r_g^{k|-1}(s-k)^{p-k|-1}.$$

b. k Kugeln von bestimmtem Zeichen erscheinen in den ersten $k+1$ Ziehungen. Eine Kugel, welche eines der übrigen, nicht in Frage stehende Zeichen trägt, kann darunter vorkommen. Sie darf aber nicht an der letzten Stelle erscheinen. Erschiene sie nemlich als $k+1$te Kugel, so würde dieser Fall mit den unter *a* bezeichneten zusammenfallen. In den nachfolgenden $p-k-1$ Ziehungen kann jede mögliche Kugelgruppe auftreten. Die Zahl der

in diesem Falle begriffeneu günstigen Kugelgruppen ist

$$A_1 = k \cdot r_g^{k|-1}(s - r_g - r_k)(s - k - 1)^{p-k-1|-1}.$$

c. k Kugeln von bestimmtem Zeichen erscheinen in den $k+2$ ersten Ziehungen. Dies läfst zu, dafs zwei Kugeln, welche nicht die fraglichen Zeichen tragen, zugleich in diesen Ziehungen erscheinen. Keine dieser zwei Kugeln darf in der $k+2$ten Ziehung erscheinen, weil dieser Fall schon in (*b.*) vorhergesehen ist. Hierdurch wird die Zahl der Gruppen um so viele vermehrt, als zwei Kugeln von den übrigen Zeichen durch $k+1$ Fächer, oder, was dasselbe ist, als $k-1$ Kugeln in $k+1$ Fächer zerstreut werden können. In den nachfolgenden $p-k-2$ Ziehungen kann jede mögliche Kugelgruppe vorkommen. Die Zahl der hierdurch bedingten günstigen Fälle ist

$$A_2 = \frac{(k+1)k}{1 \cdot 2} r_g^{k|-1}(s - r_g - r_k)^{2|-1}(s - k - 2)^{p-k-2|-1}$$
$$= \left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1} r_g^{k|-1}(s - r_g - r_k)^{2|-1}(s - k - 2)^{p-k-2|-1}.$$

Führt man diese Schlüsse weiter fort, so erhält man folgende Gesammtzahl der günstigen Kugelgruppen:

$$1.\quad A = r_g^{k|-1}\Big[(s-k)^{p-k|-1} + \left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}(s - r_g - r_k)(s - k - 1)^{p-k-1|-1}$$
$$+ \left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}(s - r_g - r_k)^{2|-1}(s - k - 2)^{p-k-2|-1} + \ldots + \left(\frac{p-k-1}{1}\right)^{k-1|1}(s - r_g - r_k)^{p-k|-1}\Big];$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$2.\quad w = \frac{r_g^{k|-1}}{s^{k|-1}}\Big[1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1} \cdot \frac{s - r_g - r_k}{s-k} + \left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s - r_g - r_k}{s-k}\right)^{2|-1}$$
$$+ \left(\frac{4}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s - r_g - r_k}{s-k}\right)^{3|-1} + \ldots + \left(\frac{p-k-1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s - r_g - r_k}{s-k}\right)^{p-k|-1}\Big].$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der ersten Ziehung eine Kugel, welche zur Art r_g gehört, in der zweiten eine, welche zu r_k gehört, erscheinen, und dafs in den p folgenden Ziehungen k Kugeln von der ersten Art früher als von der zweiten Art erscheinen werden?

Aus den unter *a*, *b*, *c*, ... und zu (11. und 12.) im vorigen Paragraph gemachten Bemerkungen ergiebt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit leicht. Sie ist

$$3.\quad w = \frac{r_g \cdot r_k (r_g - 1)^{k|-1}}{s^{k+2|-1}}\Big[1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\frac{s - r_g - r_k}{s-k-2} + \left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s - r_g - r_k}{s-k-2}\right)^{2|-1} + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s - r_g - r_k}{s-k-2}\right)^{p-k|-1}\Big].$$

Die Gleichungen (2. und 3.) lassen sich leicht verallgemeinern und auf q verschiedene Kugel-Arten ausdehnen. Durch Verbindung der unter $a, b, c, \ldots$ und zu (15. und 17.) im vorigen Paragraph gemachten Bemerkungen ergeben sich aus (2. und 3.) dieses Paragraphen folgende Bestimmungen:

$$4.\quad w = \frac{r^{k|-1}}{s^{k|-1}}\left[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s-k}\right)+\left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s-k}\right)^{2|-1}+\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s-k}\right)^{p-k|-1}\right],$$

$$5.\quad w = \frac{r_d\cdot r_e\cdot\ldots\cdot r_k\cdot(r_d-1)^{k|-1}}{s^{k+q|-1}}\left[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\frac{s-n}{s-k-q}+\left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|-1}\left(\frac{s-n}{s-k-q}\right)^{2|-1}+\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s-k-q}\right)^{p-k|-1}\right].$$

In beiden Gleichungen ist

$$n = r_d+r_e+r_f+\ldots.+r_k,$$

und q enthält so viele Einheiten als Kugel-Arten in Frage stehen, oder als man erhält, wenn jede der Gröfsen $r_d, r_e, r_f, \ldots. r_k$ als Einheit betrachtet wird.

Die Bedingungen sind dieselben, wie oben. Man zieht p Kugeln einzeln heraus und legt die gezogenen Kugeln in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs k Kugeln von einem bestimmten Zeichen r_g früher als von einem andern r_k erscheinen werden?

Bei Bestimmung der dem Erfolge günstigen Fälle treten die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen statt der ohne Wiederholungen auf. Es sind daher die unter $a, b, c, \ldots.$ gemachten Schlüsse und die zu (26.) im vorigen Paragraph gemachten Bemerkungen anzuwenden. Geschieht dies, so ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$6.\quad w = \frac{r_g^k}{s^k}\left[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\frac{s-r_g-r_k}{s}+\left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right)^2+\left(\frac{4}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right)^3+\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right)^{p-k}\right].$$

Fragt man, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, dafs in der ersten Ziehung eine Kugel von der Art r_g, in der zweiten eine von der Art r_k, und in den folgenden Ziehungen k Kugeln der ersten Art früher erscheinen werden, als die der andern, so ist

$$7.\quad w = \frac{r_g^{k+1}\cdot r_k}{s^{k+2}}\left[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right)+\left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right)^2+\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-r_g-r_k}{s}\right)^{p-k}\right].$$

Die Gleichungen (6. und 7.) führen durch weitere Verfolgung des Gesagten zu folgender allgemeinen Gleichung, wenn q verschiedene Kugel-Arten in Betracht kommen:

$$8.\quad w = \frac{r_g^k}{s^k}\left[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\frac{s-n}{s}+\left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s}\right)^2+\ldots+\left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s}\right)^{p-k}\right],$$

$$9.\quad w = \frac{r_d^{k+1}\cdot r_e\cdot r_f\cdots r_k}{s^{k+q}}\left[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}\frac{s-n}{s}+\left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s}\right)^2+\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}\left(\frac{s-n}{s}\right)^{p-k}\right].$$

Hier gelten die nämlichen Bedingungsgleichungen, die zu (5.) angegeben wurden. Die Anwendung der in diesem Paragraph aufgestellten Gleichungen auf specielle Fälle ergiebt sich leicht. Die hier gefundenen Gleichungen sind allgemeiner, als die im vorigen Paragraph. Die Gleichungen, welche zur Bestimmung der Gruppen-Anzahlen aufgestellt wurden, beantworten zugleich Probleme aus der Combinationslehre.

Werden nämlich die Versetzungen ohne Wiederholungen aus Reihen gebildet, deren Elemente den oben angegebenen Gesetzen unterliegen, so giebt die Gleichung (1.) die Zahl der Gruppen an, in welchen k Elemente einer bestimmten Stellenzahl früher erscheinen, als ein Element einer andern bestimmten Stellenzahl.

Soll die Zahl der Gruppen von der nämlichen Eigenschaft bestimmt werden, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen gebildet werden, so erhalten wir durch den Zähler von (6.) folgenden Ausdruck:

$$10.\quad r_g^k\left[s^{p-k}+\left(\frac{2}{1}\right)^{k-1|1}(s-r_g-r_k)s^{p-k-1}+\left(\frac{3}{1}\right)^{k-1|1}(s-r_g-r_k)^2 s^{p-k-2}+\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\left(\frac{p-k+1}{1}\right)^{k-1|1}(s-r_g-r_k)^{p-k}\right].$$

Die Zähler der Gleichungen (3. 4. 5. und 7. 8. 9.) beantworten gleichfalls Probleme aus der Combinationslehre, deren Bedeutung hiernach leicht anzugeben ist.

23.

Wir wenden uns nun zur nähern Betrachtung eines besondern Falles der im vorigen Paragraph entwickelten Gleichung (6.), welchen wir aber in veränderter Gestalt geben.

Jemand trachtet, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{m}$, das Nicht-Eintreffen durch $\frac{b}{m} = \frac{m-a}{m}$ aus-

gedrückt wird, durch p Wiederholungsversuche gerade $r$mal herbeizuführen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sein Unternehmen gelingen werde?

Das Gelingen des Unternehmens beruht darauf, dafs das fragliche Ereignifs $r$mal, und also das Gegentheil $p-r$mal eintreffe. Jede Anordnung, nach der beide Ereignisse sich aneinanderreihen, ist zuläfslich. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$1. \quad w = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{a^r b^{p-r}}{m^p} = \frac{p^{p-r|-1}}{1^{p-r|1}} \cdot \frac{a^r b^{p-r}}{m^p}.$$

Jemand unternimmt unter den angegebenen Bedingungen, ein Ereignifs in p Versuchen wenigstens $r$mal herbeizuführen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs das Unternehmen gelingen werde?

Die fragliche Wahrscheinlichkeit beruht darauf, dafs das Unternehmen entweder $r$mal, oder $r+1$mal, oder $r+2$mal, u. s. w., oder endlich $p$mal in p Versuchen eintreffen werde. Setzt man daher in (1.) allmälig r, $r+1$, $r+2$, ... p statt r und zählt die erhaltenen Resultate zusammen, so ergiebt sich:

$$2. \quad w = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} \cdot \frac{a^r b^{p-r}}{m^p} + \frac{p^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}} \cdot \frac{a^{r+1} b^{p-r-1}}{m^p} + \frac{p^{r+2|-1}}{1^{r+2|1}} \cdot \frac{a^{r+2} b^{p-r-2}}{m^p} + \ldots .$$
$$\ldots . + \frac{p^{p-1|-1}}{1^{p-1|1}} \cdot \frac{a^{p-1} b}{m^p} + \frac{p^{p|-1}}{1^{p|1}} \cdot \frac{a^p}{m^p}.$$

Die Anzahl der in der Reihe vorkommenden Glieder ist $p-r+1$. Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, oder diejenige, dafs das fragliche Ereignifs höchstens $r-1$mal eintreffen werde, ist

$$3. \quad w = \frac{b^p}{m^p} + \frac{p}{1} \cdot \frac{b^{p-1} a}{m^p} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{b^{p-2} a^2}{m^p} + \ldots . + \frac{p^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}} \cdot \frac{b^{p-r+1} a^{r-1}}{m^p}.$$

Sie wird gefunden, wenn man in (1.) allmälig 0, 1, 2, ... $r-1$ statt r setzt. Die Gleichungen (2.) und (3.) enthalten die Glieder des Binomiums $\left(\frac{a+b}{m}\right)^p$, die sich zur Einheit ergänzen, da nach der Annahme $a+b=m$ ist.

Eine andere Auflösung des zweiten Problems ergiebt sich auf folgende Weise. Das Unternehmen gelingt in den r, oder $r+1$, oder $r+2$ ersten Versuchen, oder endlich in p Versuchen. Hieraus ergeben sich folgende Bestimmungen.

a. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es in den r ersten Versuchen gelingen werde, ist

$$w_1 = \frac{a^r}{m^r}.$$

b. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es in den $r+1$ ersten Versuchen gelingen werde, setzt voraus, dafs einmal das Gegentheil, aber in einem der r ersten Versuche eintreffen werde. Träfe das Gegentheil im $r+1$ten Versuche ein, so würde dies mit dem Falle in (*a.*) übereinkommen. Die hieraus sich ergebende Wahrscheinlichkeit ist

$$w_2 = r\frac{a^r}{m^r}\cdot\frac{b}{m} = \frac{2^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}\cdot\frac{a^r b}{m^{r+1}}.$$

c. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es in den $r+2$ ersten Versuchen eintreffen werde, setzt voraus, dafs das Gegentheil zweimal, aber nicht im $r+2$ten Versuche eintreffen werde, weil dieser Fall unter *b* vorgesehen ist. Das Gegentheil kann in den $k+1$ vorhergehenden Versuchen auf jede beliebige Weise eintreffen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$w_3 = \frac{(r+1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{a^r b^2}{m^r\cdot m^2} = \left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1}\frac{a^r b^2}{m^{r+2}}.$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so führen sie zu folgendem Ausdrucke der gesuchten Wahrscheinlichkeit:

$$4.\quad w = \frac{a^r}{m^r}\left[1+\left(\frac{2}{1}\right)^{r-1|1}\frac{b}{m}+\left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1}\frac{b^2}{m^2}+\left(\frac{4}{1}\right)^{r-1|1}\frac{b^3}{m^3}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\frac{p-r+1}{1}\right)^{r-1|1}\frac{b^{p-r}}{m^{p-r}}\right].$$

Diese Gleichung ist ein besonderer Fall der Gleichung (6. §. 22.), wenn dort $r_g = a$, $r_k = b$, $s = r_g + r_k$ gesetzt und das Erscheinen einer Kugel, welche das Zeichen von r_k Kugeln trägt, nicht wie dort geschah ausgeschlossen, sondern angenommen wird.

Die in den Klammern eingeschlossene Reihe in (4.) läfst sich nach No. 462. §. 96. m. „aufsteigenden Functionen" und §. 101. u. ff. m. „Differenz. Calculs" auf folgende Form bringen:

$$5.\quad w = \left(\frac{p-r+1}{1}\right)^{r|1}\left(\frac{a}{m}\right)^r\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}\frac{1}{\left(\frac{b}{m}-1\right)^r}\left[\frac{r}{p}\left(\frac{b}{m}\right)^{r-1}-\frac{r-1}{1}\cdot\frac{r}{p-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{r-2}\right.$$
$$\left.+\frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{r}{p-2}\left(\frac{b}{m}\right)^{r-3}-\cdots\cdot(-1)^{r-1}\frac{r}{p-r+1}\right](-1)^r\frac{1}{\left(\frac{b}{m}-1\right)^r}\left(\frac{a}{m}\right)^r.$$

Wird hierin $\left(\frac{b}{m}-1\right)^r = \left(\frac{b-m}{m}\right)^r = (-1)^r\left(\frac{m-b}{m}\right)^r = (-1)^r\left(\frac{a}{m}\right)^r$ gesetzt, womit die Prämissen der Aufgabe stimmen, so geht (5.) über in

6. $$w = 1-(-1)^r\left(\frac{p-r+1}{1}\right)^{r|1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}\left[\frac{r}{p}\left(\frac{b}{m}\right)^{r-1}-\frac{r-1}{1}\cdot\frac{r}{p-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{r-2}\right.$$
$$\left.+\frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{r}{p-2}\left(\frac{b}{m}\right)^{r-3}-\ldots\ldots(-1)^{r-1}\frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}}\cdot\frac{r}{p-r+1}\right].$$

Wird $(-1)^{r-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}$ in die Klammern gebracht, so geht die Gleichung (6.) in folgende über:

7. $$w = 1-\frac{r^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot r\left[\frac{b^{p-r+1}}{(p-r+1)m^{p-r+1}}-\frac{r-1}{1}\cdot\frac{b^{p-r+2}}{(p-r+2)m^{p-r+2}}\right.$$
$$\left.+\frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{b^{p-r+3}}{(p-r+3)m^{p-r+3}}-\ldots\ldots(-1)^{r-1}\frac{b^p}{p\cdot m^p}\right].$$

Setzt man endlich hierin $\frac{b}{m}=x$, so geht (7.) über in

8. $$w = 1-\frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}r\int x^{p-r}(1-x)^{r-1}\partial x.$$

Integrirt man (8.) nach der bekannten Formel

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,\partial x = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m+pn}+\frac{pna}{m+pn}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\,\partial x$$

und setzt nach der Integration die gehörigen Werthe, und $x=\frac{b}{m}$, $1-x=\frac{a}{m}$ so ergiebt sich

9. $$w = 1-\frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{rb^{p-r+1}}{pm^{p-r+1}}\left[\left(\frac{a}{m}\right)^{r-1}+\frac{r-1}{p-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-2}+\left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-3}+\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{r-1|-1}\right].$$

Diese Gleichung läfst sich gut benutzen, wenn p im Verhältnifs zu r eine sehr grofse Zahl bedeutet; denn die Glieder der Reihe werden stark convergiren, und einige werden hinreichen, um den Werth der gesuchten Wahrscheinlichkeit zu finden.

Aus (7. 8. und 9.) ergiebt sich auch, wenn die gefundenen Ausdrücke von der Einheit abgezogen werden, für den Werth der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit, nämlich, dafs das fragliche Ereignifs höchstens $r-1$mal in p Versuchen eintreffen werde:

10. $$w_1 = \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}r\int x^{p-r}(1-x)^{r-1}\partial x$$
$$= \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}r\left[\frac{b^{p-r+1}}{(p-r+1)m^{p-r+1}}-\frac{r-1}{p-r+2}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+2}+\frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}(p-r+3)}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+3}\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.(-1)^{r-1}\left(\frac{b}{m}\right)^p\right]$$
$$= \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{r}{p}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}\left[\left(\frac{a}{m}\right)^{r-1}+\frac{r-1}{p-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-2}+\left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-3}+\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{r-1|-1}\right].$$

Vergleicht man die Ausdrücke (7. bis 9.) mit (2. 10. und 5.), so ergeben sich daraus, da sie dieselben Begriffe ausdrücken, folgende Formeln:

11. $$w = \left(\frac{a}{m}\right)^p + \frac{p}{1}\cdot\frac{a^{p-1}b}{m^p} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{a^{p-2}b^2}{m^p} + \ldots + \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{a^r b^{p-r}}{m^p}$$
$$= 1 - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} r \int x^{p-r}(1-x)^{r-1}\,\partial x$$
$$= 1 - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{r\,b^{p-r+1}}{m^{p-r+1}}\left[\frac{1}{p-r+1} - \frac{r+1}{1}\cdot\frac{b}{(p-r+2)m} + \frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{b^2}{(p-r+3)m^2} - \ldots\right],$$

12. $$w_1 = \frac{b^p}{m^p} + \frac{p}{1}\cdot\frac{b^{p-1}a}{m^p} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{b^{p-2}a^2}{m^p} + \ldots + \frac{p^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}}\cdot\frac{b^{p-r+1}a^{r-1}}{m^p}$$
$$= \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} r \int x^{p-r}(1-x)^{r-1}\,\partial x$$
$$= \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}} r \left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}\left[\frac{1}{p-r+1} - \frac{(r-1)b}{(p-r+2)m} + \frac{(r-1)^{2|-1}b^2}{1^{2|1}(p-r+3)m^2} - \frac{(r-1)^{3|-1}b^3}{1^{3|1}(p-r+4)m^3} + \ldots\right].$$

Setzt man nun, in (12.) a statt b und b statt a, und zugleich $p-r=s$, also $r=p-s$, so folgt daraus

13. $$w_1 = \frac{a^p}{m^p} + \frac{p}{1}\cdot\frac{a^{p-1}b}{m^p} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{a^{p-2}b^2}{m^p} + \ldots + \frac{p^{p-s-1|-1}\cdot a^{s+1}b^{p-s-1}}{1^{p-s-1|1}m^p}$$
$$= \frac{p^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}}(p-s)\int x^s(1-x)^{p-s-1}\,\partial x$$
$$= \frac{p^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}}(p-s)\frac{a^{s+1}}{m^{s+1}}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{(p-s-1)a}{(s+2)m} + \frac{(p-s-1)^{2|-1}a^2}{1^{2|1}(s+3)m^2} - \ldots\right]$$
$$= \frac{p^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}}\left(\frac{p-s}{p}\right)\frac{a^{s+1}}{m^{s+1}}\left[\left(\frac{b}{m}\right)^{p-s-1} + \frac{p-s-1}{p-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-s-2} + \left(\frac{p-s-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-s-3} + \ldots\right].$$

Nach der Integration ist nämlich $x=\frac{a}{m}$ und $1-x=\frac{b}{m}$ gesetzt. Die Ausdrücke in (12.) bestimmen die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch $\frac{a}{m}$ bedingt ist, wenigstens $s+1$mal in p Versuchen eintreffen werde. Verbindet man (13. und 11.) miteinander, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Ereignifs wenigstens $r$mal und höchstens $s$mal in p Versuchen eintreffen werde. Für diesen Fall ist (13.) von (11.) abzuziehen. Es findet sich

$$14.\quad w = \frac{p^{p|-1}}{1^{p-s|1}\,1^{s|1}}\cdot\frac{a^s b^{p-s}}{m^p} + \frac{p^{p|-1}}{1^{p-s+1}\,1^{s-1|1}}\cdot\frac{a^{s-1}b^{p-s+1}}{m^p} + \cdots + \frac{p^{p|-1}}{1^{r|1}\,1^{p-r|1}}\cdot\frac{a^r b^{p-r}}{m^p}$$

$$= 1 - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\,r\int x^{p-r}(1-x)^{r-1}\,\partial x - \frac{p^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}}(p-s)\int y^s(1-y)^{p-s-1}\,\partial y$$

$$= 1 - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{r}{1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}\left[\frac{1}{p-r+1} - \frac{(r-1)\,b}{(p-r+2)\,m} + \frac{(r-1)^{2|-1}\,b^2}{1^{2|1}(p-r+3)\,m^2} - \cdots\right]$$

$$- \frac{p^{-s|-1}}{1^{p-s|1}}(p-s)\left(\frac{a}{m}\right)^{s+1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{(p-s-1)\,a}{(s+2)\,m} + \frac{(r-1)^{2|-1}\,a^2}{1^{2|1}(s+3)\,m^2} - \cdots\right].$$

Wird integrirt und dann $x = \frac{b}{m}$, $1-x = \frac{a}{m}$, $y = \frac{a}{m}$, $1-y = \frac{b}{m}$ gesetzt, so ist auch

$$15.\quad w = 1 - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{r}{p}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-r+1}\left[\left(\frac{a}{m}\right)^{r-1} + \frac{r-1}{p-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-2} + \left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-3} + \cdots\right]$$

$$- \frac{p^{p-s|-1}}{1^{p-s|1}}\cdot\frac{p-s}{p}\left(\frac{a}{m}\right)^{s+1}\left[\left(\frac{b}{m}\right)^{p-s-1} + \frac{p-s-1}{p-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-s-2}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{p-s-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{b}{m}\right)^{p-s-3} + \cdots\right].$$

Die eben gefundene Wahrscheinlichkeit läfst sich auch noch auf eine andere Art mit Hülfe der Gleichungen (7. bis 9.) ausdrücken. Es ist nämlich die Wahrscheinlichkeit, dafs das genannte Ereignifs wenigstens $(s+1)$mal in p Versuchen eintreffen werde, aus einer dieser Gleichungen darzustellen und dann das erhaltene Resultat von der bezüglichen Gleichung selbst abzuziehen. Dies geschieht, wenn $s+1$ statt r gesetzt wird. Es ergiebt sich

$$16.\quad w = \frac{p^{s+1|-1}}{1^{s+1|1}}(s+1)\int x^{p-s-1}(1-x)^s\,\partial x - \frac{p^{r|-1}}{1^{r|1}}\,r\int x^{p-r}(1-x)^{r-1}\,\partial x.$$

Aus der Gleichung (15.) läfst sich nun leicht beweisen, dafs durch die Annahme von p, bei bestimmten Werthen von r und s, die Wahrscheinlichkeit, ein Ereignifs wenigstens r und höchstens $s$mal durch wiederholte Versuche herbeizuführen, bis zu jedem, der Gewifsheit beliebig sich nähernden Grade gesteigert werden kann. Der Gleichung (15.) läfst sich folgende Form geben:

$$17.\quad w = 1 - \frac{p^{p|-1}}{1^{r|1}\,1^{p-r|1}}\cdot\frac{b^{p-r+1}\,a^{r-1}}{m^p}\cdot\frac{r}{p}\left[1 + \frac{r-1}{p-1}\cdot\frac{m}{a} + \left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \cdots\right.$$

$$\left. \cdots + \left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{r-1|-1}\left(\frac{m}{a}\right)^{r-1}\right]$$

$$- \frac{p^{p|-1}}{1^{p-s|1}\,1^{s|1}}\cdot\frac{a^{s+1}\,b^{p-s-1}}{m^p}\cdot\frac{p-s}{p}\left[1 + \frac{p-s-1}{p-1}\cdot\frac{m}{b} + \left(\frac{p-s-1}{p-1}\right)^{2|-1}\left(\frac{m}{b}\right)^2 + \cdots\right.$$

$$\left. \cdots + \left(\frac{p-s-1}{p-1}\right)^{p-s-1}\left(\frac{m}{b}\right)^{p-s-1}\right]$$

$$= 1 - A - B.$$

Nun ist, wie leicht zu sehen,

$$\left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{x|-1} < \left(\frac{r-1}{p-1}\right)^{x} \quad \text{und} \quad \left(\frac{p-s-1}{p-1}\right)^{x|-1} < \left(\frac{p-s-1}{p-1}\right)^{x},$$

also ist der Werth der ersten Reihe in (17.) (A) kleiner als

$$18. \qquad D = \frac{p^{p|-1}}{1^{r|1} \cdot 1^{p-r|1}} \cdot \frac{b^{p-r+1} \cdot a^{r-1}}{m^p} \cdot \frac{r}{p} \cdot \frac{1-\left(\frac{r-1}{p-1}\right)^r \left(\frac{m}{a}\right)^r}{1-\frac{r-1}{p-1} \cdot \frac{m}{a}}.$$

Was nun auch r, a und b bedeuten mögen, so läfst sich p so annehmen, dafs der Werth des Ausdrucks

$$\frac{b \cdot r}{a \cdot p} \cdot \frac{1-\left(\frac{r-1}{p-1}\right)^r \left(\frac{m}{a}\right)^r}{1-\frac{r-1}{p-1} \cdot \frac{m}{a}}$$

kleiner als die Einheit bleibt, oder sie höchstens erreicht. Demnach kann der Werth von D kleiner oder höchstens so grofs als

$$\frac{p^{p|-1}}{1^{r|1} \cdot 1^{p-r|1}} \cdot \frac{a^r b^{p-r}}{m^p}$$

werden. Dieser Ausdruck ist ein Glied des Binomiums $\left(\frac{a+b}{m}\right)^r = 1$, dessen Werth, der Einheit gegenüber, durch Annahme von p beliebig grofs gemacht werden kann, selbst wenn es das gröfste unter allen Gliedern des genannten Binomiums wäre. Nun ist aber der Werth von A in (17.) kleiner als der von D in (18.): also kann um so mehr der Werth von A beliebig klein gemacht werden. Das Nemliche gilt von der zweiten Reihe (B) in (17.), und dies führt dann zu dem Schlusse, dafs der Werth der Gleichung (17.) der *Gewifsheit* bis auf jeden beliebigen Grad nahe gebracht werden kann.

Diese Bemerkungen gelten noch, wenn auch r und s in irgend ein beliebiges Verhältnifs (etwa in das der einfachen Wahrscheinlichkeiten a und b) eingeschlossen werden; selbst dann, wenn dieses Verhältnifs der Einheit sehr nahe liegt. Dies führt zu folgendem Satze:

19. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das Erscheinen eines Ereignisses, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch $\frac{a}{m}$ bedingt ist, bei Wiederholungs-Versuchen in bestimmte Grenzen ($q:t$) eingeschlossen bleiben werde, wächst bei fortgesetzter Wiederholung und kann durch Vervielfältigung der Versuche der *Gewifsheit* beliebig nahe gebracht werden; auch für den Fall, dafs das Verhältnifs ($q:t$) der Einheit sehr nahe liegen sollte.

Bedeuten p, r und s grofse Zahlen, so kann man eine der Gleichungen 189. oder 190. meiner Comb. Lehre benutzen. Bezeichnet man zu dem Ende die eingeklammerten Reihen in (17.) der Kürze wegen durch M und N und wählt die Gleichung 190., so ergiebt sich für diesen Fall folgender Ausdruck:

$$20. \quad w = 1 - \frac{p^p \sqrt{p} \cdot a^{r-1} b^{p-r+1} r \cdot M}{r^r (p-r)^{p-r} p \sqrt{(2\pi r(p-r))} \cdot m^p} - \frac{p^p \sqrt{p} \cdot a^{s+1} b^{p-s-1} (p-s) N}{s^s (p-s)^{p-s} p \cdot m^p \sqrt{(2\pi s(p-s))}}.$$

Diese Gleichung genügt für Näherungswerthe. Bei Berechnung der Werthe M und N ergeben sich bald Resultate, welche auf die Abnahme der betreffenden Glieder hinweisen und die Auffindung des Werthes erleichtern. Auch die Gleichung (18.) kann zu Näherungs-Bestimmungen benutzt werden, wenn man die oben gemachten Bemerkungen berücksichtigt.

Nimmt man an, dafs die Geburten der Knaben zu denen der Mädchen im Verhältnifs wie 1 zu 1 stehen, und fragt, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, dafs dieses Verhältnifs bei 200000 Geburten die Grenzen von 49 und 51 nicht überschreiten werde, so findet sich aus der Gleichung (20.), wenn $m = 2$, $a = 1$, $b = 1$, $p = 200000$, $r = 98000$ und $s = 102000$ gesetzt wird, ein Werth für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, der wenigstens

$$w = 1 - \frac{0{,}724725\ldots.}{10^{13}}$$

ist und man kann daher wenigstens $9 \cdot 10^{12}$ gegen 1 wetten, dafs unter der obigen Voraussetzung bei 200000 Geburten die Zahl der Geburten des einen Geschlechts die des andern nicht um 4000 übersteigen, oder nicht unter 98000 fallen und nicht über 102000 steigen werde.

Jac. Bernoulli hat in seinem Werke: „Ars conjectandi Bas. 1713. Pars IV." den in (19.) angegebenen Satz aufgestellt. *Moivre* hat in 65 Probl. seines Werks „Doctr. of Chances III. ed." einen speciellen Fall von (2.) angegeben. *Trembley* hat im 12ten Bande der „Comment. Soc. reg. Scient. Götting. ad A. 1793 et 1794" die Gleichungen (1. 2. und 4.) entwickelt. *Laplace* hat dasselbe Problem in „Théor. anal. d. probl. No. 16. pg. 275" behandelt.

§. 24.

A trachtet, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit $\frac{a}{m}$ bezeichnet wird, $r$mal eher herbeizuführen, als B im Stande ist, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch $\frac{b}{n}$

bezeichnet wird, $s$mal herbeizuführen. B trachtet nach dem Gegentheil und will das für ihn günstige Ereignifs $s$mal eher herbeiführen, als A das für ihn günstige $r$mal herbeiführen wird. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für A und wie grofs die für B?

A wird seinen Zweck erreichen, wenn er $r$mal das ihm günstige Ereignifs herbeiführt, und zwar in r, $r+1$, $r+2$, ... oder $r+s-1$ Versuchen. Dabei kann das seinem Gegner günstige Ereignifs entweder ein-, oder zwei-, oder dreimal u. s. w., oder $s-1$mal eintreffen. Der letzte Fall bezeichnet die Grenze des Eintreffens der für ihn ungünstigen Versuche. Benutzen wir nun die im Anfange des vorigen Paragraphs gemachten Bemerkungen, so ergiebt sich folgender Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$1.\quad w = \left(\frac{a}{m}\right)^r + \left(\frac{2}{1}\right)^{r-1|1}\left(\frac{a}{m}\right)^r\frac{b}{n} + \left(\frac{3}{1}\right)^{r-1}\left(\frac{a}{m}\right)^r\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{s}{1}\right)^{r-1|1}\left(\frac{a}{m}\right)^r\left(\frac{b}{n}\right)^{s-1}$$

$$= \left(\frac{a}{m}\right)^r\left(\frac{n}{n-b}\right)^r - \left(\frac{s}{1}\right)^{r-1|1}\frac{b^s}{n^s}\cdot\frac{a^r}{m^r}\left(\frac{n}{n-b}\right)^r\cdot r\left[\frac{1}{s} - \frac{r-1}{s+1}\cdot\frac{b}{n}\right.$$

$$\left. + \frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}(s+2)}\left(\frac{b}{n}\right)^2 - \cdots (-1)^{r-1}\frac{1}{r+s-1}\left(\frac{b}{n}\right)^{r-1}\right].$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von B folgende Gleichung:

$$2.\quad w = \left(\frac{b}{n}\right)^s\left[1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{s-1|1}\frac{a}{m} + \left(\frac{3}{1}\right)^{s-1|1}\left(\frac{a}{m}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{r}{1}\right)^{s-1|1}\left(\frac{a}{m}\right)^{r-1}\right]$$

$$= \left(\frac{b}{n}\right)^s\left(\frac{m}{m-a}\right)^s\left[1 - \left(\frac{r}{1}\right)^{s|1}\frac{a^r}{m^r}\cdot s\left(\frac{1}{r} - \frac{s-1}{r+1}\cdot\frac{a}{m} + \frac{(s-1)^{2|-1}}{1^{2|1}(r+2)}\left(\frac{a}{m}\right)^2 - \cdots\right.\right.$$

$$\left.\left. \cdots (-1)^{s-1}\frac{1}{r+s-1}\left(\frac{a}{m}\right)^{s-1}\right)\right].$$

Die hier entwickelten Gleichungen sind in einer Beziehung allgemeiner, als die im vorigen Paragraph. Die Gleichung (4.) §. 23. läfst sich aus (1.) ableiten, wenn $m = n$, $a + b = m$, $r + s - 1 = p$ gesetzt wird.

A wünscht, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit a bezeichnet ist, $r$mal eher herbeizuführen, als B im Stande ist, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch b bezeichnet wird, $s$mal und als C im Stande ist ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch c bezeichnet ist, $t$mal herbeizuführen. Ein Gleiches wünscht B seinen beiden Gegnern gegenüber; ein Gleiches C gegenüber von A und B. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für A und wie grofs für B und C?

Die Gröfsen a, b und c sind echte Brüche. Die Wahrscheinlichkeit für A findet sich leicht, wenn wir die im Vorhergehenden gemachten Schlüsse in Beziehung auf B und C anwenden. A hat hiebei $r$mal das ihm günstige Ereignifs herbeizuführen, ehe B das seinige $s$mal und C das seinige $t$mal herbeiführen kann. Dies kann nun in r oder mehr Versuchen geschehen. Die Grenze der Anzahl dieser Versuche ist $r+s+t-2$. Nun kommt es auf die Betrachtung folgender Fälle an.

a. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r$mal in r Versuchen eintreffen werde, ist

$$w_1 = a^r.$$

b. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es $r$mal in $r+1$ Versuchen eintreffen werde, läfst zu, dafs das für B oder C günstige Ereignifs einmal, jedoch nicht beim $(r+1)$ten Versuche eintreffen werde. Diese Wahrscheinlichkeit führt auf folgende zwei Ausdrücke:

$$w_2 = \left(\frac{2}{1}\right)^{r-1|1} a^r b + \left(\frac{2}{1}\right)^{r-1|1} a^r c = \left(\frac{2}{1}\right)^{r-1|1} a^r (b+c).$$

c. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r$mal in $r+2$ Versuchen eintreffen werde, läfst zu, dafs das für B und C günstige Ereignifs zweimal, einzeln oder in Verbindung mit einander, eintreffen werde. Hieraus ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$w_3 = \left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1} a^r b^2 + \left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1} a^r \cdot 2bc + \left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1} a^r c^2 = \left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1} a^r (b+c)^2.$$

d. In $r+3$ Versuchen ist die Wahrscheinlichkeit für A:

$$w_4 = \left(\frac{4}{1}\right)^{r-1|1} a^r [b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3] = \frac{4^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} a^r (b+c)^3.$$

Die Fortsetzung dieser Schlüsse giebt eine Reihe, deren Glieder der Ordnung nach die steigenden Potenzen des Binomiums $b+c$ enthalten. Dieses Binomium ist so lange vollständig, als sich sein Exponent nicht über $s-1$ oder $t-1$ erhebt. Geschieht dies, und ist in diesem Falle $s-1$ kleiner als $t-1$, so werden die folgenden Binominalglieder nicht mehr vollständig sein, sondern bei der Erhebung des Exponenten über die genannte Höhe hinaus ein, zwei oder mehr Glieder an der vollständigen Reihe fehlen. Das $s+1$te Glied wird folgende Gestalt haben:

$$w_{s+1} = \left(\frac{s+1}{1}\right)^{r-1|1} \left[s b^{s-1} c + \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}} b^{s-2} c^2 + \cdots + \frac{s^{s-1|-1}}{1^{s-1|1}} b c^{s-1} + \frac{s^{s|-1}}{1^{s|1}} c^s\right],$$

das $s+2$te Glied folgende:

$$w_{s+2} = \left(\frac{s+2}{1}\right)^{r-1|1}\left[\frac{(s+1)^{2|-1}}{1^{2|1}}b^{s-1}c^2 + \frac{(s+1)^{3|-1}}{1^{3|1}}b^{s-2}c^3 + \ldots + \frac{(s+1)^{s+1|-1}}{1^{s+1|1}}c^{s+1}\right]$$

u. s. w. Hier dürfen die Potenzen von c sich nicht über $t-1$ erheben. Dies führt zu folgendem Ausdruck der gesuchten Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} 3.\quad w = a^r\Big[1 &+ \left(\frac{2}{1}\right)^{r-1|1}(b+c) + \left(\frac{3}{1}\right)^{r-1|1}(b+c)^2 + \ldots + \left(\frac{s}{1}\right)^{r-1|1}(b+c)^{s-1} \\ &+ \left(\frac{s+1}{1}\right)^{r-1|1}\left(sb^{s-1}c + \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}b^{s-2}c^2 + \ldots + c^s\right) \\ &+ \left(\frac{s+2}{1}\right)^{r-1|1}\left(\frac{(s+1)^{2|-1}}{1^{2|1}}b^{s-1}c^2 + \frac{(s+1)^{3|-1}}{1^{3|1}}b^{s-2}c^3 + \ldots + c^{s+1}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \left(\frac{s+t-1}{1}\right)^{r-1|1}b^{s-1}c^{t-1}\Big]. \end{aligned}$$

Hieraus findet sich die Wahrscheinlichkeit für B leicht. Es tritt b an die Stelle von a und umgekehrt s an die Stelle von r in (3.). Dabei ist weiter zu beachten, welche von den Gröfsen r und t kleiner als die andere sei. Die Reihe wird dann folgende Gestalt haben:

$$4.\quad w = b^s\left[1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{s-1|1}(a+c) + \left(\frac{3}{1}\right)^{s-1|1}(a+c)^2 + \ldots\left(\frac{r+t-1}{1}\right)^{s-1|1}a^{r-1}c^{t-1}\right],$$

die Wahrscheinlichkeit für C wird sein:

$$5.\quad w = c^t\left[1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{t-1|1}(a+b) + \left(\frac{3}{1}\right)^{t-1|1}(a+b)^2 + \ldots\left(\frac{r+s-1}{1}\right)^{t-1|1}a^{r-1}b^{s-1}\right].$$

Die Beantwortung der vorliegenden Frage bereitet die folgender allgemeinern vor.

A_1 trachtet, gegen $n-1$ Gegner, A_2, A_3, A_4, ... A_n ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch a bezeichnet wird, $r$mal eher herbeizuführen, als A_2 im Stande ist, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch b bezeichnet wird, $s$mal u. s. f. und als A_n im Stande ist, für sich ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch n bezeichnet wird, $z$mal für sich herbeizuführen. Ein Gleiches unternimmt A_2 allen übrigen gegenüber; ebenso A_3 u. s. w. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für A_1, A_2, ... A_n?

Die Anwendung der Schlüsse, welche zur Auffindung der Gleichungen (1. bis 5.) geführt haben, führen auch hier, mit geringen Veränderungen, zum Ziele; wie sich schon aus der Vergleichung dieser Gleichungen unter-

einander ergiebt. Dies giebt für die Wahrscheinlichkeit von A_1:

$$6. \quad w = a^r \Big[1 + \Big(\frac{2}{1}\Big)^{r-1|1}(b+c+d+\cdots+n) + \Big(\frac{3}{1}\Big)^{r-1|1}(b+c+d+\cdots+n)^2 + \Big(\frac{4}{1}\Big)^{r-1|1}(b+c+d+\cdots+n)^3 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{(s+t+\cdots+z-n+2)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} b^{s-1}c^{t-1}\cdots n^{z-1}\Big].$$

Die Wahrscheinlichkeit für A_2 ist

$$7. \quad w = b^s \Big[1 + \Big(\frac{2}{1}\Big)^{s-1|1}(a+c+d+\cdots+n) + \Big(\frac{3}{1}\Big)^{s-1|1}(a+c+d+\cdots+n)^2 + \Big(\frac{4}{1}\Big)^{s-1|1}(a+c+d+\cdots+n)^3 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{(r+t+\cdots+z-n+2)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} a^{r-1}c^{t-1}\cdots n^{z-1}\Big]$$

u. s. w. Die begleitenden Polynomien lassen sich so lange vollständig entwickeln, als der Exponent sich nicht über eine der Gröfsen

$$r-1, \quad s-1, \quad t-1, \quad u-1, \quad \ldots\ldots \quad z-1$$

erhebt. Geschieht dies, so ergeben sich Entwicklungen von beschränkter Glieder-Anzahl; denn die Wahrscheinlichkeiten dürfen nicht öfter vorkommen, als die eben angeführten Werthe andeuten. Deshalb dürfen denn auch keine höheren Potenzen als die genannten erscheinen. Nimmt man für die vorliegenden Entwicklungen die Combinationen zu Hülfe, so zeigt sich, dafs diejenigen Ausdrücke, welche die Glieder der eingeschlossenen Reihe begleiten, die Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen $a, b, c, \ldots n$ bilden; wobei jedoch die Beschränkung eintritt, dafs die Wiederholungen eine bestimmte Grenze nicht überschreiten können. Das Element a darf nicht mehr als $r-1$ mal, das Element b nicht mehr als $s-1$mal u. s. w. wiederholt vorkommen.

Diese Bemerkungen führen zu folgendem Ausdruck der Wahrscheinlichkeit für A_1:

$$8.\quad w = a^r\Big[1+\Big(\frac{2}{1}\Big)^{r-1|1}P'(b,c,d,\ldots.n)^1 + \Big(\frac{3}{1}\Big)^{r-1|1}P'(b,c,d,\ldots.n)^2 + \Big(\frac{4}{1}\Big)^{r-1|1}P'(b,c,d,\ldots.n)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(s+t+\cdots+z-n+2)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}P'(b,c,d,\ldots.n)^{s+t+\ldots.z-n+1}\Big]$$

$$(b^{s-1},\ c^{t-1},\ d^{u-1},\ \ldots.\ n^{z-1});$$

die Wahrscheinlichkeit für A_2 ist

$$9.\quad w = b^s\Big[1+\Big(\frac{2}{1}\Big)^{s-1|1}P'(a,c,d,\ldots.n)^1 + \Big(\frac{3}{1}\Big)^{s-1|1}P'(a,c,d,\ldots.n)^2 + \Big(\frac{4}{1}\Big)^{s-1|1}P'(a,c,d,\ldots.n)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(r+t+\cdots+z-n+2)^{s-1|1}}{1^{s-1|1}}P'(a,c,d,\ldots.n)^{r+t+\ldots.+z-n+1}\Big]$$

$$(a^{r-1},\ c^{t-1},\ d^{u-1},\ \ldots.\ n^{z-1})$$

u. s. w. Die unten angeschriebene Reihe

$$(a^{r-1},\ c^{t-1},\ d^{u-1},\ \ldots.\ n^{z-1})$$

soll die oben angegebene Beschränkung der Wiederholungen anzeigen.

Die einfachen Fälle der Gleichungen dieses Paragraphs hat ***Pascal*** in einem Briefe an ***Fermat*** behandelt, und nach ihm ***Montmort*** in seiner „Analyse sur les jeux d. har. Propos. XL et XLI. IIe édit." und ***Moivre*** in seinen „Doctr. of Chances Probl. VI." ***Lagrange*** hat einzelne Fälle durch zurücklaufende Reihen in „Nouv. Mémoires de l'acad. roy. d. sciences et bell. lett. de Berl. an. 1775" gelöset, und nach ihm hat ***Trembley*** dieselben Fälle in „Comment. soc. reg. scient. Gotting. ad ann. 1793 et 1794 Vol. XII" behandelt. ***Laplace*** hat die von ihm betrachteten Fälle durch die „Fonct. génératr." in seiner „Théor. anal. d. prob. Chap. II" abgeleitet. Er bemerkt Pg. 210, dafs das vorliegende Problem den Namen „Problème des partis" führt. Die Form, unter welcher es aufgestellt werden kann und aufgestellt werden würde, ist folgende:

A und ***B*** spielen mit einander um eine bestimmte Summe a. Jeder von ihnen gewinnt die ausgesetzte Summe, wenn er eine bestimmte Anzahl Spiele, oder Partieen gewinnt, ehe der andere die gleiche oder eine andere gewonnen

hat. Dem A fehlen noch r, dem B s Partieen, zu gewinnen. Sie kommen überein, das Spiel nicht fortzusetzen. Nach welchem Maafsstabe soll die ausgesetzte Summe unter A und B vertheilt werden?

Die Gleichungen (1. und 2.) geben hierüber Aufschlufs. Sind z. B. A und B übereingekommen, fünf Spiele zu machen, und soll Derjenige die ausgesetzte Summe a erhalten, welcher in drei Spielen Sieger bleibt, und setzen sie nun das Spiel nicht weiter fort, nachdem ein Spiel gemacht ist, worin A Sieger blieb, so ist der Anspruch von A auf die ausgesetzte Summe $\frac{11}{16}a$, und der von B: $\frac{5}{16}a$. Hiebei ist die Wahrscheinlichkeit für Jeden, im einzelnen Falle zu siegen, gleichgrofs, also $=\frac{1}{2}$ angenommen und in den Gleichungen (1. und 2.) $r=2$, $s=3$ gesetzt.

Der Rückblick auf die Paragraphen 21. bis 24. zeigt, dafs die dort behandelten Probleme zusammengehören; weswegen sie auch hier zusammengestellt sind. Die hieher gehörige Literatur ist in diesem und dem vorigen Paragraph angegeben.

(Die Fortsetzung folgt.)

18.

Über einige, die elliptischen Functionen betreffenden Formeln.

(Von Herrn Professor Dr. *C. G. J. Jacobi* zu Berlin.)

Es sei

$$x = \sin\mathrm{am}(u,k), \quad \int_0^u (1-k^2x^2)\,du = E(u), \quad \int_0^u E(u) = \log\Omega.$$

Bedeutet $F(x)$ den rationellen Nenner der Substitution, welche eine Transformation der $n$ten Ordnung ergiebt, und $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$ die transformirte Function, so wird

$$1. \qquad F(x) = e^{-\tau uu}\cdot\frac{\Omega\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}{(\Omega u)^n},$$

wo τ eine Constante ist. (S. *Crelle's* Journal Bd. IV. S. 374.) Es sei

$$x^2 = u^2(1+S_1^{(2)}u^2+S_2^{(2)}u^4+\text{etc.}),$$

so wird

$$E(u) = u-k^2u^3\left\{\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}S_1^{(2)}u^2+\tfrac{1}{7}S_2^{(2)}u^4+\text{etc.}\right\},$$

$$2. \qquad \log\Omega(u) = \tfrac{1}{2}u^2-k^2u^4\left\{\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}S_1^{(2)}u^2+\frac{1}{7\cdot8}S_2^{(2)}u^4+\text{etc.}\right\}.$$

Ist $T_m^{(2)}$ dieselbe Function von λ wie $S_m^{(2)}$ von k, so folgt aus (1.) und (2.):

$$\log F(x) = -k^2\varrho u^2-\frac{\lambda^2u^4}{M^4}\left(\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}T_1^{(2)}\frac{u^2}{M^2}+\frac{1}{7\cdot8}T_2^{(2)}\frac{u^4}{M^4}+\text{etc.}\right)$$
$$+nk^2u^4\left(\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}S_1^{(2)}u^2+\frac{1}{7\cdot8}S_2^{(2)}u^4+\text{etc.}\right),$$

wo, wie am a. O. S. 372 (6.), $k^2\varrho = \frac{n}{2}+\tau-\frac{1}{2M^2}$. Setzt man jetzt

$$u^n = x^n\{1+R_1^{(n)}x^2+R_2^{(n)}x^4+\text{etc.}\},$$
$$\log F(x) = C_1x^2+C_2x^4+C_3x^6+\text{etc.},$$

so wird

$$3. \qquad C_m = -k^2\varrho R_{m-1}^{(2)}-\lambda^2\left(\frac{R_{m-2}^{(4)}}{3\cdot4\cdot M^4}+\frac{R_{m-3}^{(6)}T_1^{(2)}}{5\cdot6\cdot M^6}+\frac{R_{m-4}^{(8)}T_2^{(2)}}{7\cdot8\cdot M^8}+\text{etc.}\right)$$
$$+nk^2\left(\frac{R_{m-2}^{(4)}}{3\cdot4}+\frac{R_{m-3}^{(6)}S_1^{(2)}}{5\cdot6}+\frac{R_{m-4}^{(8)}S_2^{(2)}}{7\cdot8}+\text{etc.}\right).$$

Diese Formel umfafst auch die Multiplication. Soll nämlich $F(x)$ den Nenner in dem Ausdrucke von $\sin\mathrm{am}(nu)$ bedeuten, so hat man in (1.) und dem vor-

stehenden Werthe von C_m nur $\tau = \varrho = 0$, $\lambda = k$, $M = n$ zu setzen; ferner n^2 für n und S für T. Hiedurch erhält man

$$C_m = -k^2\left\{\frac{n^4-n^2}{3\cdot 4}R^{(4)}_{m-2} + \frac{n^6-n^2}{5\cdot 6}R^{(6)}_{m-3}S^{(2)}_1 + \frac{n^8-n^2}{7\cdot 8}R^{(8)}_{m-4}S^{(2)}_2 + \text{etc.}\right\}.$$

Auf diesem und ähnlichem Wege erhält man die von Herrn Dr. ***Eisenstein*** gegebnen, auf die Multiplication und Transformation bezüglichen Formeln, und zwar als eine unmittelbare Folge der Theoreme, durch welche man vermittelst der Transcendente $\Omega(u)$ den Zähler und Nenner der Multiplications- und Transformationsformeln abgesondert definiren kann.

Setzt man $\{(1-x^2)(1-k^2x^2)\}^{-\frac{1}{2}} = 1 + c_1x^2 + c_2x^4 + \cdots$ und

4. $$\tfrac{1}{2}u^2 - \log\Omega(u) = k^2x^4(D_0 + D_1x^2 + D_2x^4 + \cdots)$$
$$= k^2\int(1 + c_1x^2 + c_2x^4 + \cdots)(\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}c_1x^5 + \tfrac{1}{7}c_2x^7 + \cdots)\,dx,$$

so wird

$$D_n = \frac{1}{2n+4}\left(\frac{1}{2n+3}c_n + \frac{1}{2n+1}c_1c_{n-1} + \frac{1}{2n-1}c_2c_{n-2} + \cdots \tfrac{1}{3}c_n\right).$$

Die Gröfse D_{n-2} ist die in (3.) und ***Fund.*** S. 126 etc. vorkommende,

$$\frac{1}{3\cdot 4}R^{(4)}_{n-2} + \frac{1}{5\cdot 6}S^{(2)}_1R^{(6)}_{n-3} + \frac{1}{7\cdot 8}S^{(2)}_2R^{(8)}_{n-4} + \cdots \frac{1}{(2n-1)2n}S^{(2)}_{n-2}\ *).$$

Für $k^2 = -1$ oder für die Lemniscate wird $\frac{d^2\cdot x^m}{du^2} = m(m-1)x^{m-2} - m(m+1)x^{m+2}$.

Man erhält daher aus (4.), durch zweimalige Differentiation nach u,

$$x^2 = 3\cdot 4D_0x^2 + 5\cdot 6D_1x^4 + 7\cdot 8D_2x^6 + 9\cdot 10D_3x^8 + 11\cdot 12D_4x^{10} + \cdots$$
$$- \{4\cdot 5D_0x^6 + 6\cdot 7D_1x^8 + 8\cdot 9D_2x^{10} + \cdots\},$$

und hieraus $D_1 = D_3 = \cdots = 0$, $D_0 = \frac{1}{3\cdot 4}$, $D_2 = \frac{1\cdot 5}{3\cdot 7\cdot 8}$, etc., also

$$\log\Omega(u) - \tfrac{1}{2}uu = \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{5\cdot x^8}{3\cdot 7\cdot 8} + \frac{5\cdot 9\cdot x^{12}}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 12} + \frac{5\cdot 9\cdot 13\cdot x^{16}}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 15\cdot 16} + \cdots.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\tfrac{1}{2}uu = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\right)^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{3\cdot x^6}{5\cdot 6} + \frac{3\cdot 7\cdot x^{10}}{5\cdot 9\cdot 10} + \frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot x^{14}}{5\cdot 9\cdot 13\cdot 14} + \cdots,$$

$$(n+1)\int_0^u du\int_0^u x^n\,du = \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{(n+3)x^{n+6}}{(n+5)(n+6)} + \frac{(n+3)(n+7)x^{n+10}}{(n+5)(n+9)(n+10)} + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2}u^2\log x - \int_0^u du\int_0^u \log x\,du = \frac{b_0x^2}{2} + \frac{3b_1x^6}{5\cdot 6} + \frac{3\cdot 7\cdot b_2x^{10}}{5\cdot 9\cdot 10} + \cdots,$$

wo $b_i = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{4i+1} + \frac{1}{4i+2}$.

Berlin, im Dec. 1845.

---

*) Am a. O. fehlen die Factoren $R^{(4)}_{n-2}$, $R^{(6)}_{n-3}$, etc.; auch ist ***Fund.*** S. 130 Z. 10 für $m+n$ zu lesen $2m+n$.

19.

Über eine Eigenschaft der Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte.

(Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.)

1. Zum Behuf der hier mitzutheilenden Eigenschaft ist es zweckmäfsig den folgenden bekannten Satz etwas umständlicher aufzufassen.

„Der Ort der Scheitel aller rechten Winkel, welche einem gegebenen Kegelschnitte umgeschrieben sind, ist ein mit dem letztern concentrischer Kreis K; das Quadrat seines Radius r ist gleich der Summe der Quadrate der Halbaxen a und b des Kegelschnitts, also $r^2 = a^2 \pm b^2$."

Über diesen Ortskreis K ist in Rücksicht der verschiedenen Kegelschnitte folgendes zu bemerken.

a. Bei der Ellipse ist sein Radius r gleich der Sehne, welche die Axenscheitel verbindet, also $r^2 = a^2 + b^2$. Geht die Ellipse in einen Kreis über, wird also $a = b$, so ist $r^2 = 2a^2$.

b. Bei zwei conjugirten Hyperbeln H_1 und H_2 können nur der einen, H_1, welche die gröfsere reelle Axe $2a$ hat, oder welche im spitzen Asymptotenwinkel liegt, rechte Winkel umschrieben werden, der andern H_2 nicht. Also gehört auch nur zu der erstern ein *reeller* Ortskreis K, für den $r^2 = a^2 - b^2$. Sind die Hyperbeln insbesondere *gleichseitige*, so wird $r = 0$, d. h. es reducirt sich der Ortskreis K auf seinen Mittelpunct und alsdann sind die Asymptoten das einzige Paar zu einander rechtwinklige (reelle) Tangenten, und dieses Paar gehört dann beiden Hyperbeln zugleich an.

c. Bei der Parabel geht der Ortskreis K in eine Gerade, in die Leitlinie, über.

2. Die Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte haben nun zu dem genannten Ortskreise nachstehende Beziehung.

„Wenn man die Krümmungsradien eines gegebenen Kegelschnitts, jeden nach entgegengesetzter Seite hin um sich selbst verlängert und über den Verlängerungen, als Durchmesser, Kreise K_1 beschreibt, so schneiden alle diese Kreise jenen Ortskreis K rechtwinklig." Und umgekehrt:

„Beschreibt man einen solchen Kreis K_1, welcher den gegebenen Kegelschnitt in irgend einem Puncte A berührt und zudem dessen Orts-

kreis K rechtwinklig schneidet, so ist sein Durchmesser allemal dem Krümmungsradius des Kegelschnitts im genannten Puncte A gleich. Wird der durch A gehende Durchmesser des Kreises K_1 über A hinaus um sich selbst verlängert, so hat man den Krümmungsradius, seiner Gröfse und Lage nach."

Diese Sätze gelten auch für die oben erwähnte zweite Hyperbel H_2 (die im stumpfen Asymptotenwinkel liegt (1. *b.*)), wenn man für sie den Ortskreis K der ihr conjugirten ersten Hyperbel H_1 benutzt; jedoch unter der veränderten Bedingung, dafs dieser Kreis K von jedem Kreise K_1 im *Durchmesser* (statt rechtwinklig) geschnitten wird.

Bei der gleichseitigen Hyperbel gehen alle Kreise K_1 durch ihren Mittelpunct, und bei der Parabel liegen die Mittelpuncte aller Kreise K_1 in ihrer Leitlinie.

Soll also in einem gegebenen Puncte A eines Kegelschnitts der Krümmungsradius bestimmt werden, so ist nur nöthig, den durch A gehenden Durchmesser des zugehörigen Kreises K_1 zu construiren; was sehr einfach wie folgt geschieht.

*„In A errichte man die Normale AB auf den Kegelschnitt und construire die Harmonische (Polare) α des Punctes A in Bezug auf den Ortskreis K *); sie schneide die Normale in B: so ist AB Durchmesser des zugehörigen Kreises K_1 und somit dem verlangten Krümmungsradius gleich.*"

Für die Hyperbel H_2 hat man wieder den Ortskreis von H_1 zu benutzen, aber statt α hat man eine andere Gerade β zu nehmen, welche parallel α und so liegt, dafs der Mittelpunct von K oder von H_2 gleich weit von α und β absteht, und welche alsdann in der Normale den Punct B giebt. Bei der gleichseitigen Hyperbel insbesondere hat man aus ihrem Mittelpunct M auf den Leitstrahl MA die Senkrechte zu errichten; diese ist hier die Harmonische α und trifft die Normale in B. Bei der Parabel liegt der Mittelpunct des Kreises K_1 in der Leitlinie, wodurch der Durchmesser AB unmittelbar bestimmt ist, und was den bekannten Satz giebt, dafs der Krümmungsradius doppelt so grofs als das Stück der Normale bis an die Leitlinie ist.

Berlin, im März 1845.

---

*) Man ziehe in dem Kreise K zwei beliebige Sehnen CD und C_1D_1 durch den Punct A, ziehe ferner die Sehnen CC_1 und DD_1, die sich in P, so wie die Sehnen CD_1 und DC_1, die sich in Q schneiden, so ist bekanntlich die Gerade PQ die genannte Harmonische α des Punctes A in Bezug auf den Kreis K.

20.

Lehrsätze und Aufgaben.

(Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.)

---

1. Es sei ABC ein beliebiges Dreieck, H der Durchschnitt seiner drei Höhen und a, b, c seien die Mitten der den Ecken A, B, C gegenüber stehenden Seiten. Wird um H irgend ein Kreis beschrieben, welcher die Seiten ab, ac, bc des Dreiecks abc beziehlich in den Puncten C_1, B_1, A_1 schneidet, so ist allemal

$$AA_1 = BB_1 = CC_1.$$

2. *„Sind in einer Ebene ein Dreieck und ein Kegelschnitt gegeben, so kann, wenn das Dreieck fest bleibt, der Kegelschnitt ihm im Allgemeinen auf 6 verschiedene Arten eingeschrieben werden; die 6 Lagen seines Mittelpuncts befinden sich in einem Kreise, dessen Mittelpunct ein bestimmter ausgezeichneter Punct des Dreiecks ist, der also immer der nämliche bleibt, wenn auch der Kegelschnitt seine Form und Gröfse ändert.“* Und umgekehrt: *„Bleibt der Kegelschnitt fest, so kann ihm das Dreieck in 6 verschiedenen Lagen umgeschrieben werden, und dann ist der nämliche ausgezeichnete Punct desselben in allen 6 Lagen gleich weit vom Mittelpunct des Kegelschnitts entfernt.“* Oder:

„Unter der unendlichen Menge Kegelschnitte, welche einem gegebenen Dreieck sich einschreiben lassen, sind nur immer je 6 und 6 einander gleich (congruent); die Mittelpuncte von je 6 gleichen Kegelschnitten liegen in einem Kreise, und alle diese Kreise haben einen ausgezeichneten Punct des Dreiecks zum gemeinsamen Mittelpuncte.“ — *„Ebenso sind unter der unendlichen Schaar Dreiecke, welche einem gegebenen Kegelschnitte sich umschreiben lassen, nur immer 6 und 6 congruent, und die genannten ausgezeichneten Puncte von je 6 gleichen Dreiecken liegen allemal in einem mit dem Kegelschnitte concentrischen Kreise.“*

„Die Mittelpuncte aller, einem gegebenen Dreieck eingeschriebenen ähnlichen Kegelschnitte liegen in einer Curve 4ter Ordnung; von solchen Kegelschnitten sind nur immer 6 und 6 einander gleich, u. s. w.“

3. „Einem beliebigen Viereck sei irgend ein Kegelschnitt eingeschrieben; aus jeder Ecke ziehe man nach den Berührungspuncten der beiden gegenüber stehenden Seiten zwei Strahlen; die auf diese Weise erhaltenen 8 Strahlen werden allemal von irgend einem andern Kegelschnitte berührt." Oder vollständiger:

„Werden bei vier beliebigen Tangenten eines Kegelschnitts aus dem Schnittpuncte je zweier Strahlen nach den Berührungspuncten der beiden andern gezogen, was zusammen 12 Strahlen giebt, so werden von diesen 12 Strahlen allemal dreimal 8 von irgend einem Kegelschnitte berührt."

„Einem beliebigen Viereck sei irgend ein Kegelschnitt umgeschrieben und in dessen Eckpuncten seien Tangenten an diesen gelegt, so wird jede Seite des Vierecks von den Tangenten in den ihr gegenüber liegenden Ecken in 2 Puncten geschnitten und die auf diese Weise entstehenden 8 Puncte liegen allemal in irgend einem andern Kegelschnitte." Oder vollständig:

„Ist einem vollständigen Viereck ein beliebiger Kegelschnitt umgeschrieben und werden in den Ecken desselben an den letztern die Tangenten gelegt, so wird jede der 6 Seiten des Vierecks von den Tangenten in den ihr nicht anliegenden Ecken in 2 Puncten geschnitten, so dafs im Ganzen 12 Puncte entstehen; von diesen 12 Puncten liegen immer 3mal 8 in irgend einem Kegelschnitte." — Und ferner: „Die jedesmaligen 8 Puncte haben zudem die Eigenschaft, dafs sie auf dreifache Art paarweise in vier Geraden liegen, welche sich in einem Puncte *a, b, c* schneiden; und zwar sind diese drei Schnittpuncte *a, b, c* für jedes der drei Systeme von 8 Puncten die nemlichen;" u. s. w.

4. „Fünf beliebige Puncte *a, b, c, d, e* in einer Ebene bestimmen, zu zweien verbunden, 10 Gerade *G*, welche einander (aufser in den gegebenen 5 Puncten) in 15 Puncten *r* schneiden. Von diesen 15 Puncten *r* liegen zunächst 10mal 6 in irgend einem Kegelschnitte *K*. Die 15 Puncte *r* bestimmen, zu zweien, 75 neue Gerade, die sich in zwei Arten unterscheiden, nemlich in 60 Gerade *H*, von welchen jede durch zwei solche Puncte *r* geht, die zusammen von allen fünf Fundamentalpuncten *a, b, c, d, e* abhängen, und in 15 Gerade *L*, deren jede durch solche zwei Puncte *r* bestimmt wird, die nur von je vier der fünf gegebenen Puncte abhängen; durch jeden Punct *r* gehen 8 Gerade *H* und 2 Gerade *L*. Die 15 Geraden *L* werden zu 6 und 6 von 10 Kegelschnitten K_1 berührt, die den vorigen 10 Kegelschnitten *K* in gewissem Sinne beziehlich entsprechen. Die 60 Geraden *H* schneiden einander, in bestimmter Ordnung paarweise genommen, in 30 Puncten *s*, welche

zu 6 und 6 auf 5 Geraden A, B, C, D, E liegen; diese Geraden gehen beziehlich durch die 5 Fundamentalpuncte a, b, c, d, e; die 6 Puncte s in jeder dieser fünf Geraden bilden Involution etc.; die 30 Puncte s liegen zugleich in den ersten 10 Geraden G, in jeder G liegen $3s$. Die 5 Geraden A, B, C, D, E schneiden einander in 10 neuen Puncten t. Von den auf diese Weise bestimmten 55 Puncten, nämlich den $15r+30s+10t$, liegen nun, unter andern, 120mal 8 in irgend einem Kegelschnitte K, wobei die jedesmaligen 8 Puncte zusammen von allen fünf Fundamentalpuncten abhängen; und ferner liegen von denselben noch 15mal 8 in irgend einem Kegelschnitte K_1, wo aber die jedesmaligen 8 Puncte nur von je vier Fundamentalpuncten abhängen."

Man gelangt zu Eigenschaften, die diesen zur Seite stehen, wenn von 5 gegebenen Geraden ausgegangen wird.

5. Zieht man zwischen 6 beliebigen Puncten eines Kegelschnitts die 15 Sehnen S und legt in denselben Puncten die 6 Tangenten T: so schneiden sich die $15\,S$, aufser den gegebenen Puncten, paarweise in 45 Puncten s, und die $6\,T$ schneiden einander in 15 Puncten t, und endlich schneiden die $15\,S$ und die $6\,T$ einander, aufser den gegebnen Puncten, in 60 Puncten r. Von diesen 120 Puncten, $45s+15t+60r$, liegen unter andern 900mal 8 in irgend einem Kegelschnitte K, wobei die jedesmaligen 8 Puncte zusammen von allen 6 gegebenen Puncten abhängen. Aufserdem liegen von den genannten Puncten auch noch 720mal 8 in irgend einem Kegelschnitte K_1, wo aber jede 8 Puncte nur von je 5 der gegebenen 6 Puncte abhängen; und ferner liegen von denselben noch 45mal 8 in irgend einem Kegelschnitte K_2, wobei aber die jedesmaligen 8 Puncte nur s und r sind und von nur je vier gegebenen Puncten abhangen. Im Ganzen liegen somit von den 120 Puncten 1665mal 8 in einem Kegelschnitte."

6. In eine gegebene Ellipse E lassen sich eine Schaar gröfste Dreiecke ACB einschreiben; nemlich jeder Punct der Ellipse ist Ecke eines solchen Dreiecks; dieselben haben gleichen Inhalt und ihre Schwerpuncte liegen im Mittelpuncte M der Ellipse E.

Sind a, b die Halb-Axen und c die Excentrität der Ellipse E, und ist H der Schnittpunct der drei Höhen des Dreiecks ABC und N der Mittelpunct des ihm umgeschriebenen Kreises, so finden unter andern folgende Eigenschaften Statt:

1) Der Ort des Mittelpuncts N ist eine andere Ellipse E_1, ähnlich der gegebenen E; die Axen beider fallen verwechselt aufeinander, d. h. die grofse $2a_1$ und kleine $2b_1$ Axe von E_1 fallen beziehlich auf die kleine $2b$ und grofse $2a$ Axe von E, und es ist

$$a_1 = \frac{c^2}{4b}; \quad b_1 = \frac{c^2}{4a}; \quad c_1 = \frac{c^3}{4ab}.$$

2) Ebenso ist der Ort des Höhenschnittpuncts H eine dritte Ellipse E_2, ähnlich den beiden ersten und mit ihnen concentrisch, und zwar fallen ihre Axen $2a_2$, $2b_2$ auf die gleichnamigen Axen der zweiten E_1 und in Rücksicht ihrer Gröfse ist $a_2 = 2a_1$, $b_2 = 2b_1$, oder:

$$a_2 = \frac{c^2}{2b}; \quad b_2 = \frac{c^2}{2a}; \quad c_2 = \frac{c^3}{2ab}.$$

3) Wird im Kreise N (der dem Dreieck ABC umgeschrieben) derjenige Durchmesser PQ gezogen, welcher durch den Mittelpunct M der Ellipse E geht, so wird derselbe von diesem Punct M in zwei solche Abschnitte MP, MQ getheilt, deren Rechteck constant ist, nemlich es ist allemal

$$PM \cdot MQ = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

4) Der Radius r des Kreises N wird ein *Maximum* oder *Minimum*, wenn eine Ecke des Dreiecks ABC beziehlich in einem Scheitel der *kleinen* oder *grofsen* Axe der Ellipse E liegt. Unter derselben Bedingung wird zugleich das Product der drei Seiten α, β, γ des Dreiecks ABC beziehlich ein *Maximum* oder *Minimum*. Diese Maxima und Minima haben folgende Werthe:

Max. $r = \frac{a^2+3b^2}{4b}$; Minim. $r = \frac{3a^2+b^2}{4a}$;

$- \quad \alpha\beta\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot a(a^2+3b^2)$; $- \quad \alpha\beta\gamma = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot b(3a^2+b^2)$.

Berlin, im Juni 1845.

21.

De integrali $-\int_0^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha$.

(Auctore Dr. *Schaeffer* Berol.)

---

§. 1. Denotetur integrale $-\int_0^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha$ signo $\lambda(x)$, ita ut identice sit

$$1.\quad \lambda(x) = -\int_0^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha.$$

Hinc primo patet, esse $\lambda(x)$ reale si $x \leqq 1$, imaginarium si $x > 1$.

Jam quoniam est, si v. n. $\alpha < 1$,

$$-\frac{\log(1-\alpha)}{\alpha} = 1+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{3}+\frac{\alpha^3}{4}+\ldots \text{ in inf.},$$

erit

$$-\int^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha = \frac{x}{1}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+\ldots \text{ in inf.},$$

qua de re est

$$2.\quad \lambda(x) = \frac{x}{1}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+\ldots \text{ in inf.}$$

(v. n. $x \leqq 1$)

Constat esse

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots \text{ in inf.} = \tfrac{1}{6}\pi^2, \quad 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots \text{ in inf.} = \tfrac{1}{12}\pi^2;$$

unde colligitur esse

$$3.\quad \begin{cases} \lambda(0) = 0, \\ \lambda(1) = \frac{1}{6}\pi^2, \\ \lambda(-1) = -\frac{1}{12}\pi^2. \end{cases}$$

§. 2. Posito $-\alpha = \beta$, $\partial\alpha = -\partial\beta$, invenitur

$$\int_0^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha = \int_0^{-x} \frac{\log(1+\beta)}{\beta}\partial\beta;$$

unde

$$4.\quad \lambda(x) = -\int_0^{-x} \frac{\log(1+\beta)}{\beta}\partial\beta.$$

Posito $1-\alpha=\beta$, $\alpha=1-\beta$, $\partial\alpha=-\partial\beta$, est

$$\int_0^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha = -\int_0^{1-x} \frac{\log\beta}{1-\beta}\partial\beta;$$

ergo

$$5. \quad \lambda(x) = \int_1^{1-x} \frac{\log\beta}{1-\beta}\partial\beta.$$

Hinc, ob

$$\lambda(1) = \int_1^0 \frac{\log\beta}{1-\beta}\partial\beta = \tfrac{1}{6}\pi^2,$$

et ob

$$\int_1^{1-x} \frac{\log\beta}{1-\beta}\partial\beta = \int_1^0 \frac{\log\beta}{1-\beta}\partial\beta + \int_0^{1-x} \frac{\log\beta}{1-\beta}\partial\beta,$$

elicitur

$$6. \quad \lambda(x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 + \int_0^{1-x} \frac{\log\beta}{1-\beta}\partial\beta.$$

§. 3. Jam integrando partialiter obtinetur

$$\int \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha = \log(1-\alpha)\log\alpha + \int \frac{\log\alpha}{1-\alpha}\partial\alpha,$$

unde, ut facile perspicitur, evadit

$$-\int_0^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha = -\log(1-x)\log x - \int_0^x \frac{\log\alpha}{1-\alpha}\partial\alpha;$$

qua relatione conjuncta cum relationibus (1. et 6.) eruitur

$$\lambda(x) = -\log(1-x)\log x - \lambda(1-x) + \tfrac{1}{6}\pi^2,$$

sive

$$7. \quad \lambda(x) + \lambda(1-x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \log x \log(1-x).$$

Quodsi in hac relatione ponitur $x=\frac{1}{2}$, invenitur $2\lambda(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}\pi^2 - (\log 2)^2$, unde

$$8. \quad \lambda(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{12}\pi^2 - \tfrac{1}{2}(\log 2)^2.$$

§. 4. Accipiatur $x>1$; tum erit

$$-\int_0^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha = -\int_0^1 \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha - \int_1^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha,$$

sive

$$\lambda(x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \int_1^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha.$$

At, si est $\alpha>1$, habetur $\log(1-\alpha) = \log(\alpha-1) + \pi\sqrt{-1}$; unde sequitur esse $\int_1^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha = \int_1^x \frac{\log(\alpha-1)}{\alpha}\partial\alpha + \pi\sqrt{-1}\int_1^x \frac{\partial\alpha}{\alpha}$, itaque secundum re-

lationem antecedentem erit

$$9. \quad \lambda(x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \pi\log x\sqrt{-1} - \int_1^x \frac{\log(\alpha-1)}{\alpha}\partial\alpha.$$
$$(x>1)$$

Quod integrale hic intercedit, etiam transformari potest; est enim

$$\int_1^x \frac{\log(\alpha-1)}{\alpha}\partial\alpha = \int_1^x \frac{\log\alpha}{\alpha}\partial\alpha + \int_1^x \frac{\log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}\partial\alpha = \tfrac{1}{2}(\log x)^2 + \int_1^x \frac{\log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}\partial\alpha;$$

ergo ex (9.) est

$$10. \quad \lambda(x) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \tfrac{1}{2}(\log x)^2 - \pi\log x\sqrt{-1} - \int_1^x \frac{\log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}\partial\alpha.$$

Porro ponendo $\frac{1}{\alpha} = \beta$, $\alpha = \frac{1}{\beta}$, $\partial\alpha = \frac{-\partial\beta}{\beta^2}$, obtinetur

$$\int_1^x \frac{\log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}\partial\alpha = -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\log(1-\beta)}{\beta}\partial\beta = -\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{\log(1-\beta)}{\beta}\partial\beta + \int_0^1 \frac{\log(1-\beta)}{\beta}\partial\beta;$$

unde

$$11. \quad \lambda\left(\frac{1}{x}\right) = \tfrac{1}{6}\pi^2 + \int_1^x \frac{\log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}\partial\alpha.$$
$$(x>1)$$

Jam relationibus (10.), (11.) comparatis, apparet esse

$$12. \quad \lambda(x) + \lambda\left(\frac{1}{x}\right) = \tfrac{1}{3}\pi^2 - \tfrac{1}{2}(\log x)^2 - \pi\log x\sqrt{-1}.$$
$$(x>1)$$

Hinc secundum (8.) invenitur

$$13. \quad \lambda(2) = \tfrac{1}{4}\pi^2 - \pi\log 2\sqrt{-1}.$$

§. 5. Deinde sit $x<-1$; tum erit

$$-\int_0^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha = -\int_0^{-1} \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha = -\int_{-1}^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha$$
$$= \lambda(-1) - \int_{-1}^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha - \int_{-1}^x \frac{\log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}\partial\alpha,$$

h. e.

$$14. \quad \lambda(x) = -\tfrac{1}{12}\pi^2 - \tfrac{1}{2}(\log(-x))^2 - \int_{-1}^x \frac{\log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}\partial\alpha.$$
$$(x<-1)$$

At posito $\frac{1}{\alpha} = \beta$, obtinetur

$$-\int_{-1}^{x} \frac{\log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}\partial\alpha = -\int_{-1}^{\frac{1}{x}} \frac{\log(1-\beta)}{\beta}\partial\beta = \int_{0}^{-1} \frac{\log(1-\beta)}{\beta}\partial\beta - \int_{0}^{\frac{1}{x}} \frac{\log(1-\beta)}{\beta}\partial\beta;$$

unde

$$15.\quad \lambda\left(\frac{1}{x}\right) = -\tfrac{1}{12}\pi^2 + \int_{-1}^{x} \frac{\log\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha}\partial\alpha.$$

$$(x < -1).$$

Jam nunc ex (14. et 15.) deducitur

$$16.\quad \lambda(x) + \lambda\left(\frac{1}{x}\right) = -\tfrac{1}{6}\pi^2 - \tfrac{1}{2}(\log(-x))^2.$$

Quae relatio non solum si $x < -1$, sed generaliter, si x negativum, atque etiam, ut ex comparatione cum relatione (12.) apparet, si $x > 1$, valet.

§. 6. Integrale $\int_0^x \frac{\log(1-\beta^2)}{\beta}\partial\beta$ ad functionem λ revocari potest. Posito enim $\beta^2 = \alpha$, $2\beta\partial\beta = \partial\alpha$, $\frac{\partial\beta}{\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\alpha}$, invenitur

$$\int_0^x \frac{\log(1-\beta^2)}{\beta}\partial\beta = \tfrac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha,$$

unde

$$17.\quad \int_0^x \frac{\log(1-\beta^2)}{\beta}\partial\beta = -\tfrac{1}{2}\lambda(x^2).$$

At est

$$\lambda(x) = -\int_0^x \frac{\log(1-\beta)}{\beta}\partial\beta,$$

et ex (4.)

$$\lambda(-x) = -\int_0^x \frac{\log(1+\beta)}{\beta}\partial\beta;$$

ergo

$$\lambda(x) + \lambda(-x) = -\int_0^x \frac{\log(1-\beta^2)}{\beta}\partial\beta;$$

ideoque secundum (17.) oritur

$$18.\quad \lambda(x) + \lambda(-x) = \tfrac{1}{2}\lambda(x^2).$$

§. 7. Si est $x > 0$, secundum (7.) habetur

$$\lambda(-x) = -\lambda(1+x) + \tfrac{1}{6}\pi^2 - \log x \log(1+x) - \pi\log(1+x)\sqrt{-1},$$

et ex (12.)

$$\lambda(1-x) = -\lambda\left(\frac{1}{1+x}\right) + \tfrac{1}{3}\pi^2 - \tfrac{1}{2}(\log(1+x))^2 - \pi\log(1+x)\sqrt{-1};$$

ergo erit

$$19.\quad \lambda(-x) = \lambda\left(\frac{1}{1+x}\right) - \tfrac{1}{6}\pi^2 + \tfrac{1}{2}(\log(1+x))^2 - \log x \log(1+x). \qquad (x>0)$$

Qui valor ipsius $\lambda(-x)$, si in relatione (18.) substituitur, prodibit

$$20.\quad \lambda(x^2) = 2\lambda(x) + 2\lambda\left(\frac{1}{1+x}\right) - \tfrac{1}{3}\pi^2 + (\log(1+x))^2 - 2\log x \log(1+x). \qquad (x>0)$$

Denique quum ex (7.) sit

$$\lambda(x^2) = -\lambda(1-x^2) + \tfrac{1}{6}\pi^2 - 2\log x \log(1-x^2),$$

erit

$$21.\quad 2\lambda(x) + 2\lambda\left(\frac{1}{1+x}\right) + \lambda(1-x^2) = \tfrac{1}{2}\pi^2 - (\log(1+x))^2 - 2\log x \log(1-x). \qquad (x>0)$$

Quod si in hac relatione x ita definitur, ut sit $x = \frac{1}{1+x}$, h. e. $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, erit $1-x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = x$; quamobrem invenitur

$$22.\quad \lambda\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \tfrac{1}{10}\pi^2 - \tfrac{1}{5}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2 - \tfrac{2}{5}\log\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\log\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Hinc ope relationis (7.) invenitur

$$23.\quad \lambda\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \tfrac{1}{15}\pi^2 + \tfrac{1}{5}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2 - \tfrac{3}{5}\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\log\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Posito in relatione (19.) $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, evadit

$$24.\quad \lambda\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$-\tfrac{1}{15}\pi^2 + \tfrac{3}{10}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2 - \tfrac{2}{5}\log\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\log\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - \log\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Posito in relatione (12.) $\frac{1}{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, oritur

$$25.\quad \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$\tfrac{7}{30}\pi^2 - \tfrac{3}{10}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2 + \tfrac{2}{5}\log\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\log\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - \pi\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{-1}.$$

Statuatur in (16.) $\frac{1}{x} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; tum prodibit

$$26.\quad \lambda\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$-\tfrac{1}{10}\pi^2 - \tfrac{4}{5}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2 + \tfrac{2}{5}\log\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\log\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) + \log\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Denique si in (12.) ponitur $\frac{1}{x} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, obtinetur

$$27.\quad \lambda\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$\tfrac{4}{15}\pi^2 - \tfrac{1}{2}\left(\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2 - \tfrac{1}{5}\left(\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2 + \tfrac{3}{5}\log\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\log\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - \pi\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt{-1}.$$

Jam ex relatione (20.) aliam relationem derivasse juvat. Est autem secundum (7.)

$$\lambda\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\lambda\left(\frac{x}{1+x}\right) + \tfrac{1}{6}\pi^2 + \log(1+x)\log\left(\frac{x}{1+x}\right);$$

quo valore in (20.) substituto, obtinetur

$$28.\quad \lambda(x^2) = 2\lambda(x) - 2\lambda\left(\frac{x}{1+x}\right) - (\log(1+x))^2;$$

$$(x>0)$$

et posito in hac relatione per (7.)

$$\lambda(x) = -\lambda(1-x) + \tfrac{1}{6}\pi^2 - \log x \log(1-x),$$

erit

$$29.\quad \lambda(x^2) = -2\lambda(1-x) - 2\lambda\left(\frac{x}{1+x}\right) + \tfrac{1}{3}\pi^2 - 2\log x\log(1-x) - (\log(1+x))^2.$$

$$(x>0)$$

§. 8. Quum sit

$$-\int_0^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha = -\int_0^y \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha - \int_y^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha;$$

erit

$$\lambda(x) = \lambda(y) - \int_y^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha.$$

Jam habetur

$$-\int_y^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha = -\int_0^{x-y} \frac{\log(1-y-\alpha)}{y+\alpha}\partial\alpha$$

$$= -\int_0^{x-y} \frac{\log(1-y)}{y+\alpha}\partial\alpha - \int_0^{x-y} \frac{\log\left(1-\frac{\alpha}{1-y}\right)}{y+\alpha}\partial\alpha,$$

siquidem non simul est $x<1$, $y>1$,

$$= -\log(1-y)\log\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y}\int_0^{x-y} \frac{\log\left(1-\frac{\alpha}{1-y}\right)}{1+\frac{\alpha}{y}}\partial\alpha;$$

unde exoritur

$$30.\quad \lambda(x) = \lambda(y) - \log(1-y)\log\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y}\int_0^{x-y} \frac{\log\left(1-\frac{\alpha}{1-y}\right)}{1+\frac{\alpha}{y}}\partial\alpha.$$

(ubi non simul $x<1,\ y>1$)

Jam si est v. n. $\left(\frac{x-y}{1-y}\right) \leqq 1,\ -1 < \frac{x-y}{y} \leqq 1$, in quibus relationibus involvitur, non simul esse $x<1,\ y>1$, habetur

$$-\frac{1}{y}\int_0^{x-y} \frac{\log\left(1-\frac{\alpha}{1-y}\right)}{1+\frac{\alpha}{y}}\partial\alpha$$

$$= \frac{1}{y}\int_0^{x-y} \left\{\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\infty}\left(\frac{\left(\frac{\alpha}{1-y}\right)^{1+\varrho}}{1+\varrho}\right) \times \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\infty}\left\{(-1)^\sigma\left(\frac{\alpha}{y}\right)^\sigma\right\}\right\}\partial\alpha$$

$$= \frac{1}{1-y}\int_0^{x-y} \left\{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left\{(-1)^\lambda\left(\frac{\alpha}{y}\right)^{1+\lambda} \times \left(\sum_{\eta=0}^{\eta=\lambda}\left(\frac{(-1)^\eta\left(\frac{y}{1-y}\right)^\eta}{1+\eta}\right)\right)\right\}\right\}\partial\alpha$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left\{\frac{(-1)^\lambda\left(\frac{x-y}{y}\right)^{2+\lambda}}{2+\lambda} \times \left(\sum_{\eta=0}^{\eta=\lambda}\left(\frac{(-1)^\eta\left(\frac{y}{1-y}\right)^{1+\eta}}{1+\eta}\right)\right)\right\}$$

$$= \frac{\left(\frac{x-y}{y}\right)^2}{2}\cdot\frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{x-y}{y}\right)^3}{3}\left(\frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)^2}{2}\right)$$

$$+ \frac{\left(\frac{x-y}{y}\right)^4}{4}\left(\frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)^3}{3}\right) - \cdots \text{ in inf.}$$

Hinc relatio (30.) mutatur in

$$31.\quad \lambda(x) = \lambda(y) - \log(1-y)\log\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\left(\frac{x-y}{y}\right)^2}{2}\cdot\frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)}{1}$$

$$- \frac{\left(\frac{x-y}{y}\right)^3}{3}\left(\frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)^2}{2}\right) + \frac{\left(\frac{x-y}{y}\right)^4}{4}\left(\frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{y}{1-y}\right)^3}{3}\right) - \cdots \text{ in inf.}$$

$$\left(\text{v. n.}\left(\frac{x-y}{1-y}\right) \leqq 1,\ -1 < \frac{x-y}{y} \leqq 1\right)$$

Ponendo in hac relatione $y = \frac{1}{2}$, et $\frac{1}{2}+x$ loco x, eruitur

32. $$\lambda\left(\tfrac{1}{2}+x\right) = \tfrac{1}{12}\pi^2 - \tfrac{1}{2}(\log 2)^2 + \log 2\cdot\log(1+2x) + \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^3}{3}\left[1-\tfrac{1}{2}\right] + \frac{(2x)^4}{4}\left[1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right] - \cdots \text{ in inf.}$$
$$(-1 < x \leqq 1)$$

Atque si in relatione (31.) ponitur $y = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}+x$ loco x, obtinetur

33. $$\lambda\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}+x\right) = \tfrac{1}{15}\pi^2 + \left(\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2 - \log\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\log\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}+x\right) + \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)^2}{2}\cdot\frac{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)^3}{3}\left(\frac{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2}\right) + \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}x\right)^4}{4}\left(\frac{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3}{3}\right) - \cdots \text{ in inf.}$$
$$\left(-1 < \frac{3+\sqrt{5}}{2}x \leqq 1\right)$$

§. 9. Quae expositae sunt relationes, ad computandos valores particulares functionis $\lambda(x)$ singulis valoribus ipsius x ab $x = -\infty$ ad $x = +\infty$ respondentes inservire possunt.

Ac primum quidem valores particulares ipsius $\lambda(x)$ ope relationum (32.), (33.), investigentur ab $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \delta$ ad $x = \frac{1}{2}$, indicante δ quantitatem positivam quamvis parvam, h. e. ab $x = 0{,}38$ ad $x = 0{,}5$.

Jam posito $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$, erit $\alpha^2 = \frac{\alpha}{1+\alpha} = 1-\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Quod si statuitur $x = \alpha - y$, erit $x^2 = \alpha^2 - (2\alpha - y)y$; $\frac{x}{1+x} = \frac{\alpha}{1+\alpha} - \frac{y}{(1+\alpha)(1+\alpha-y)}$; $1-x = 1-\alpha+y$. Itaque, si est $0 < y \leqq \alpha$, erit $x^2 < \frac{x}{1+x} < 1-x$; atque, quum sit pro $x \geqq \frac{1}{2}$, $1-x \leqq \frac{1}{2}$, ex illis valoribus computatis ope relationis (29.) valores ipsius $\lambda(x)$ ab $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \delta$ ad $x = \frac{1}{4}$ erui possunt.

Deinde, quum etiam, si est $0 < x < \frac{1}{2}$, sit $x^2 < \frac{x}{1+x} < x$, ponendis valoribus loco x minoribus quam $\frac{1}{2}$, per relationem (28.) reliquos valores functionis $\lambda(x)$ ab $x = \frac{1}{4}$ ad $x = 0$ computare licet. Porro, adhibita relatione (7.), ex valoribus notis facile inveniuntur valores ipsius $\lambda(x)$ ab $x = \frac{1}{2}$ ad $x = 1$.

Jam nunc ope relationis (19.) aut omnes valores ipsius $\lambda(x)$ ab $x=0$ ad $x=-\infty$, aut tantum ab $x=0$ ad $x=-1$, et reliqui ab $x=-1$ ad $x=-\infty$ ex relatione (16.) notescunt. Denique relatio (12.) valores ipsius $\lambda(x)$ ab $x=1$ ad $x=+\infty$ praebet.

§. 10. Recipiatur relatio (31.), ponaturque, compendii causa $\frac{x-y}{y}=v$, $\frac{y}{1-y}=w$,

$$\frac{v^2}{2}\cdot\frac{w}{1}-\frac{v^3}{3}\left[\frac{w}{1}-\frac{w^2}{2}\right]+\cdots+(-1)^\lambda\frac{v^{2+\lambda}}{2+\lambda}\left[\frac{w}{1}-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}-\cdots+(-1)^\lambda\frac{w^{1+\lambda}}{1+\lambda}\right]$$
$$-\cdots \text{ in inf.} = Q.$$

ita ut relatio (31.) mutetur in

$$\lambda(x) = \lambda(y)-\log(1-y)\log\left(\frac{x}{y}\right)+Q.$$

Jam est

$$\frac{w}{1}-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}-\cdots+(-1)^\lambda\frac{w^{1+\lambda}}{1+\lambda}=\int_0^1(w-w^2\alpha+w^3\alpha^2-\cdots+(-1)^\lambda w^{1+\lambda}\alpha^\lambda)\,\partial\alpha$$
$$=w\int_0^1\frac{1-(-1)^{1+\lambda}(w\alpha)^{1+\lambda}}{1+w\alpha}\,\partial\alpha;$$

ergo erit

$$Q = w\int_0^1\left(\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left[\frac{(-1)^\lambda v^{2+\lambda}}{2+\lambda}\right]\cdot\frac{1}{1+w\alpha}+\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left[\frac{(vw\alpha)^{2+\lambda}}{2+\lambda}\right]\cdot\frac{1}{w\alpha(1+w\alpha)}\right)\partial\alpha$$
$$=w\int_0^1\left(\frac{-\log(1+v)+v}{1+w\alpha}-\frac{\log(1-vw\alpha)+vw\alpha}{w\alpha(1+w\alpha)}\right)\partial\alpha$$
$$=-\int_0^1\frac{\log(1+v)}{1+w\alpha}\partial\alpha-\int_0^1\frac{\log(1-vw\alpha)}{\alpha(1+w\alpha)}\partial\alpha$$
$$=-\log(1+v)\log(1+w)-\int_0^1\frac{\log(1-vw\alpha)}{\alpha+w\alpha^2}\partial\alpha.$$

Quo valore ipsius Q in relatione superiore substituto, si pro v, w valores restituuntur, illa transit in

$$34.\quad \lambda(x) = \lambda(y)-\int_0^1\frac{\log\left(1-\frac{x-y}{1-y}\alpha\right)}{\alpha+\frac{y}{1-y}\alpha^2}\partial\alpha.$$

$$\left(\text{v. n.}\left(\frac{x-y}{1-y}\right)\gtrless 1,\quad -1<\frac{x-y}{y}\gtrless 1\right)$$

Jam ob

$$\int \frac{\log\left(1-\frac{x-y}{1-y}\alpha\right)}{\alpha+\frac{y}{1-y}\alpha^2}\partial\alpha = \int \frac{\log(1-vw\alpha)}{\alpha+w\alpha^2}\partial\alpha$$

$$= \log(1-vw\alpha)\log\left(\frac{w\alpha}{1+w\alpha}\right) + vw\int \frac{\log\left(\frac{w\alpha}{1+w\alpha}\right)}{1-w\alpha}\partial\alpha$$

obtinetur

$$35.\quad -\int_0^1 \frac{\log\left(1-\frac{x-y}{1-y}\alpha\right)}{\alpha+\frac{y}{1-y}\alpha^2}\partial\alpha = -\log(1-vw)\log\left(\frac{w}{1+w}\right) - vw\int_0^1 \frac{\log\left(\frac{w\alpha}{1+w\alpha}\right)}{1-vw\alpha}\partial\alpha.$$

At si statuitur $1-vw\alpha=\beta$, $\frac{w\alpha}{1+w\alpha}=\frac{1-\beta}{v+1-\beta}$, $\partial\alpha=-\frac{\partial\beta}{vw}$, obtinetur

$$36.\quad -vw\int_0^1 \frac{\log\left(\frac{w\alpha}{1+w\alpha}\right)}{1-vw\alpha}\partial\alpha = \int_1^{1-vw} \frac{\log\left(\frac{1-\beta}{v+1-\beta}\right)}{\beta}\partial\beta.$$

Ob relationes conditionales v. n. $\left(\frac{x-y}{1-y}\right) \gtreqless 1$, $-1 < \frac{x-y}{y} \leqq 1$, sive v. n. $(vw) \gtreqless 1$, $-1 < v \gtreqless 1$, β induente valores particulares ab 1 ad $1-vw$, $1-\beta$ jacet inter 0 et vw, $v+1-\beta$ inter v et $v+vw$; ideoque, posito $\log(1-\beta)-\log(1+v)-\log\left(1-\frac{\beta}{1+v}\right)=q$,

A. Si est aut $vw>0$, $v>0$, aut $vw<0$, erit

$$\log\left(\frac{1-\beta}{v+1-\beta}\right) = q;$$

B. Si est $vw>0$, $v<0$, $v+vw<0$, erit

$$\log\left(\frac{1-\beta}{v+1-\beta}\right) = q+2\pi\sqrt{-1};$$

C. Si est $vw>0$, $v<0$, $v+vw>0$, erit

$\log\left(\frac{1-\beta}{v+1-\beta}\right)=q+2\pi\sqrt{-1}$, ab $\beta=1$ ad $\beta=1+v$,

$\log\left(\frac{1-\beta}{v+1-\beta}\right)=q$ ab $\beta=1+v$ ad $\beta=1-vw$.

Hinc sequitur

A. Si est aut $vw>0$, $v>0$, aut $vw<0$, posito hoc casu

$$\int_1^{1-vw} \frac{\log\left(\frac{1-\beta}{v+1-\beta}\right)}{\beta}\partial\beta = R,$$

esse

$$R = \int_1^{1-vw} \frac{\log(1-\beta)}{\beta}\partial\beta - \int_1^{1-vw} \frac{\log(1+v)}{\beta}\partial\beta - \int_1^{1-vw} \frac{\log\left(1-\frac{\beta}{1+v}\right)}{\beta}\partial\beta,$$

atque posito in integrali ultimo $\frac{\beta}{1+v} = \gamma$, $\beta = (1+v)\gamma$, $\partial\beta = (1+v)\partial\gamma$, evadere

$$\begin{aligned} R &= \int_1^{1-vw} \frac{\log(1-\beta)}{\beta}\partial\beta - \int_1^{1-vw} \frac{\log(1+v)}{\beta}\partial\beta - \int_{\frac{1}{1+v}}^{\frac{1-vw}{1+v}} \frac{\log(1-\gamma)}{\gamma}\partial\gamma \\ &= -\int_0^1 \frac{\log(1-\beta)}{\beta}\partial\beta + \int_0^{1-vw} \frac{\log(1-\beta)}{\beta}\partial\beta - \log(1+v)\log(1-vw) \\ &\quad - \int_0^{\frac{1-vw}{1+v}} \frac{\log(1-\gamma)}{\gamma}\partial\gamma + \int_0^{\frac{1}{1+v}} \frac{\log(1-\gamma)}{\gamma}\partial\gamma \\ &= -\log(1+v)\log(1-vw) + \lambda(1) - \lambda(1-vw) + \lambda\left(\frac{1-vw}{1+v}\right) - \lambda\left(\frac{1}{1+v}\right). \end{aligned}$$

Quo valore ipsius R in (36.) substituto, positoque $v = \frac{x-y}{y}$, $w = \frac{y}{1-y}$, $\lambda(1) = \frac{1}{6}\pi^2$, ex relatione (35.) invenitur

$$37.\ A.\quad -\int_0^1 \frac{\log\left(1-\frac{x-y}{1-y}\alpha\right)}{\alpha + \frac{y}{1-y}\alpha^2}\partial\alpha$$

$$= \tfrac{1}{6}\pi^2 - \log x \log\left(\frac{1-x}{1-y}\right) - \lambda\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + \lambda\left(\frac{(1-x)y}{(1-y)x}\right) - \lambda\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$\left(\text{ubi aut } \frac{x-y}{1-y} > 0,\ \frac{x-y}{y} > 0,\ \text{aut } \frac{x-y}{1-y} < 0\right)$$

B. Si est $vw > 0$, $v < 0$, $v + vw < 0$, posito hoc casu

$$\int_1^{1-vw} \frac{\log\left(\frac{1-\beta}{1+v-\beta}\right)}{\beta}\partial\beta = R',$$

erit

$$R' = R + \int_1^{1-vw} \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\beta}\partial\beta = R + 2\pi\log(1-vw)\sqrt{-1}.$$

Itaque ex (35.) invenitur

$$37.\ \boldsymbol{B}.\quad -\int_0^1 \frac{\log\left(1-\frac{x-y}{1-y}\alpha\right)}{\alpha+\frac{y}{1-y}\alpha^2}\partial\alpha$$

$$= \tfrac{1}{6}\pi^2 - \log x \log\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\pi\log\left(\frac{1-x}{1-y}\right)\sqrt{-1} - \lambda\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + \lambda\left(\frac{(1-x)y}{(1-y)x}\right) - \lambda\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$\left(\frac{x-y}{1-y}>0,\ \frac{x-y}{y}<0,\ y<1\right)$$

C. Si est $vw>0$, $v<0$, $v+vw>0$, posito hoc casu

$$\int_1^{1-vw} \frac{\log\left(\frac{1-\beta}{1+v-\beta}\right)}{\beta}\partial\beta = \boldsymbol{R}'',$$

erit

$$\boldsymbol{R}'' = \boldsymbol{R} + \int_1^{1+v} \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\beta}\partial\beta$$
$$= \boldsymbol{R} + 2\pi\log(1+v)\sqrt{-1};$$

ergo ex (35.) erit

$$37.\ \boldsymbol{C}.\quad -\int_0^1 \frac{\log\left(1-\frac{x-y}{1-y}\alpha\right)}{\alpha+\frac{y}{1-y}\alpha^2}\partial\alpha$$

$$= \tfrac{1}{6}\pi^2 - \log x \log\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\pi\log\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{-1} - \lambda\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + \lambda\left(\frac{(1-x)y}{(1-y)x}\right) - \lambda\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$\left(\frac{x-y}{1-y}>0,\ \frac{x-y}{y}<0,\ y>1\right)$$

Quibus constitutis, relatio (34.) pro tribus casibus transit in

$$38.\ \boldsymbol{A}.\quad \lambda(x) - \lambda(y) + \lambda\left(\frac{y}{x}\right) + \lambda\left(\frac{1-x}{1-y}\right) - \lambda\left(\frac{(1-x)y}{(1-y)x}\right) = \tfrac{1}{6}\pi^2 - \log x \log\left(\frac{1-x}{1-y}\right),$$

$$\left(\text{ubi aut } \frac{x-y}{1-y}>0,\ 0<\frac{x-y}{y}\leqq 1,\ \text{aut } -1\leqq\frac{x-y}{1-y}<0,\ -1<\frac{x-y}{y}\leqq 1\right)$$

$$38.\ \boldsymbol{B}.\quad \lambda(x) - \lambda(y) + \lambda\left(\frac{y}{x}\right) + \lambda\left(\frac{1-x}{1-y}\right) - \lambda\left(\frac{(1-x)y}{(1-y)x}\right)$$
$$= \tfrac{1}{6}\pi^2 - \log x \log\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\pi\log\left(\frac{1-x}{1-y}\right)\sqrt{-1},$$
$$\left(0<\frac{x-y}{1-y}\leqq 1,\ -1<\frac{x-y}{y}<0,\ y<1\right)$$

$$39.\ \boldsymbol{C}.\quad \lambda(x) - \lambda(y) + \lambda\left(\frac{y}{x}\right) + \lambda\left(\frac{1-x}{1-y}\right) - \lambda\left(\frac{(1-x)y}{(1-y)x}\right)$$
$$= \tfrac{1}{6}\pi^2 - \log x \log\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + 2\pi\log\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{-1}.$$
$$\left(0<\frac{x-y}{1-y}\leqq 1,\ -1<\frac{x-y}{y}<0,\ y>1\right)$$

§. 11. Ex his relationibus duas variabiles continentibus, relatione inter x et y statuenda, aequationes, quae unam variabilem involvunt, deduci possunt. V. c. ponendo $x=\frac{1-y}{1-x}$, $y=1-x+x^2$, erit

$$\frac{x-y}{1-y}=-\frac{1-x}{x},\quad \frac{x-y}{x}=-\frac{(1-x)^2}{1-x+x^2}.$$

Quod si est $\frac{1}{2}<x\leqq 1$, erit

$$-1<\frac{x-y}{1-y}\leqq 0,\quad \text{et}\quad -1<\frac{x-y}{y}\leqq 1.$$

Itaque secundum (38. ***A***.) obtinetur

39. ***A***. $$\lambda(x)-\lambda(1-x+x^2)+\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x}\right)+\lambda\left(\frac{1}{x}\right)-\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x^2}\right)$$
$$=\tfrac{1}{6}\pi^2+(\log x^2).$$
$$\left(\tfrac{1}{2}<x\leqq 1\right)$$

Si autem est $x>1$, erit $0<\frac{x-y}{1-y}<1$, $-1<\frac{x-y}{y}<0$, $y>1$; ergo secundum (38. ***C***.) habetur

39. ***B***. $$\lambda(x)-\lambda(1-x+x^2)+\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x}\right)+\lambda\left(\frac{1}{x}\right)-\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x^2}\right)$$
$$=\tfrac{1}{6}\pi^2+(\log x)^2-2\pi\log\left(\frac{1-x+x^2}{x}\right)\sqrt{-1}.$$
$$(x>1)$$

Deinde posito $1-x=\frac{y}{x}$, $y=x-x^2$, invenitur $\frac{x-y}{1-y}=\frac{x^2}{1-x+x^2}$, $\frac{x-y}{y}=\frac{x}{1-x}$. Jam si est $0<x\leqq\frac{1}{2}$, erit $0<\frac{x-y}{1-y}<1$, $0<\frac{x-y}{y}\leqq 1$; ergo ex (38. ***A***.) colligitur esse

40. ***A***. $$\lambda(x)-\lambda(x-x^2)+\lambda(1-x)+\lambda\left(\frac{1-x}{1-x+x^2}\right)-\lambda\left(\frac{(1-x)^2}{1-x+x^2}\right)$$
$$=\tfrac{1}{6}\pi^2-\log x\log\left(\frac{1-x}{1-x+x^2}\right).$$
$$\left(0<x\leqq\tfrac{1}{2}\right)$$

Atque si est $x<0$, erit $0<\frac{x-y}{1-y}<1$, $-1<\frac{x-y}{y}<0$, $y<0$; quamobrem ex (38. ***B***.) eruitur

40. ***B***. $$\lambda(x)-\lambda(x-x^2)+\lambda(1-x)+\lambda\left(\frac{1-x}{1-x+x^2}\right)-\lambda\left(\frac{(1-x)^2}{1-x+x^2}\right)$$
$$=\tfrac{1}{6}\pi^2-\log x\log\left(\frac{1-x}{1-x+x^2}\right)+2\pi\log\left(\frac{1-x}{1-x+x^2}\right)\sqrt{-1}.$$
$$(x<0)$$

Jam ex (12.) est, si $0<x\leqq 1$,

$$\lambda\left(\frac{1}{x}\right)+\lambda(x)=\tfrac{1}{3}\pi^2-\tfrac{1}{2}(\log x)^2+\pi\log x\sqrt{-1},$$

et si $x>1$,

$$\lambda(x)+\lambda\left(\frac{1}{x}\right)=\tfrac{1}{3}\pi^2-\tfrac{1}{2}(\log x)^2-\pi\log x\sqrt{-1};$$

deinde secundum (7.) habetur

$$\lambda(x)+\lambda(1-x)=\tfrac{1}{6}\pi^2-\log x\log(1-x),$$

$$\lambda(x-x^2)=-\lambda(1-x+x^2)+\tfrac{1}{6}\pi^2-\log(x-x^2)\log(1-x+x^2),$$

$$\lambda\left(\frac{1-x}{1-x+x^2}\right)=-\lambda\left(\frac{x^2}{1-x+x^2}\right)+\tfrac{1}{6}\pi^2-\log\left(\frac{1-x}{1-x+x^2}\right)\log\left(\frac{x^2}{1-x+x^2}\right),$$

$$\lambda\left(\frac{(1-x)^2}{1-x+x^2}\right)=-\lambda\left(\frac{x}{1-x+x^2}\right)+\tfrac{1}{6}\pi^2-\log\left(\frac{(1-x)^2}{1-x+x^2}\right)\log\left(\frac{x}{1-x+x^2}\right);$$

atque quum, si est $x<\frac{1}{2}$, sit $0<\frac{x^2}{1-x+x^2}<1$, si est $0<x<\frac{1}{2}$, sit $0<\frac{x}{1-x+x^2}<1$, et si est $x<0$, sit $-1<\frac{x}{1-x+x^2}<0$, secundum (12. et 16.) habetur

$$-\lambda\left(\frac{x^2}{1-x+x^2}\right)=\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x^2}\right)-\tfrac{1}{3}\pi^2+\tfrac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1-x+x^2}{x^2}\right)\right)^2+\pi\log\left(\frac{1-x+x^2}{x^2}\right)\sqrt{-1},$$

$$\left(x<\tfrac{1}{2}\right)$$

$$-\lambda\left(\frac{x}{1-x+x^2}\right)=\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x}\right)-\tfrac{1}{3}\pi^2+\tfrac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1-x+x^2}{x}\right)\right)^2+\pi\log\left(\frac{1-x+x^2}{x}\right)\sqrt{-1}.$$

$$\left(0<x<\tfrac{1}{2}\right)$$

$$-\lambda\left(\frac{x}{1-x+x^2}\right)=\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x}\right)-\tfrac{1}{6}\pi^2-\tfrac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1-x+x^2}{-x}\right)\right)^2.$$

$$(x<0)$$

Quibus valoribus in relationibus (39. et 40.) sustitutis, eruuntur relationes

41. *A.* $$-\lambda(1-x+x^2)+\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x}\right)-\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x^2}\right)$$

$$=-\tfrac{1}{6}\pi^2+\tfrac{3}{2}(\log x)^2-\pi\log x\sqrt{-1},$$

$$\left(\tfrac{1}{2}<x\leqq 1\right)$$

41. *B.* $$-\lambda(1-x+x^2)+\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x}\right)-\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x^2}\right)$$

$$=-\tfrac{1}{6}\pi^2+\tfrac{3}{2}(\log x)^2+\pi(3\log x-2\log(1-x+x^2))\sqrt{-1},$$

$$(x>1)$$

41. *C.* $$-\lambda(1-x+x^2)+\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x}\right)-\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x^2}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{6}\pi^2+\tfrac{3}{2}(\log x)^2-\pi(3\log x-2\log(1-x+x^2))\sqrt{-1},$$
$$(0<x\leqq\tfrac{1}{2}),$$

41. *D.* $$-\lambda(1-x+x^2)+\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x}\right)-\lambda\left(\frac{1-x+x^2}{x^2}\right)$$
$$= -\tfrac{2}{3}\pi^2+\tfrac{3}{2}(\log(-x))^2+2\log\left(\frac{1-x+x^2}{-x}\right)\sqrt{-1}.$$
$$(x<0)$$

Ex his relationibus ope relationum (7. 12. et 16.) aliae possent inveniri.

§. 12. Posito in relatione (38.) $y=\frac{1}{2}$, erit $\frac{x-y}{1-y}=2x-1=\frac{x-y}{y}$. Itaque ex (38. *A.*), quum sit $\lambda(\frac{1}{2})=\frac{1}{12}\pi^2-\frac{1}{2}(\log 2)^2$, eruitur

42. $$\lambda(x)+\lambda\left(\frac{1}{2x}\right)+\lambda(2-2x)-\lambda\left(\frac{1-x}{x}\right)=\tfrac{1}{4}\pi^2-\tfrac{1}{2}(\log 2)^2-\log x\log(2-2x).$$
$$(0<x\leqq 1)$$

Posito $y=\frac{1}{2}x$, erit $\frac{x-y}{1-y}=\frac{x}{2-x}$, $\frac{x-y}{y}=1$; hinc deducitur ex (38. *A.*)

43. $$\lambda(x)-\lambda(\tfrac{1}{2}x)+\lambda\left(\frac{2-2x}{2-x}\right)-\lambda\left(\frac{1-x}{2-x}\right)=\tfrac{1}{12}\pi^2+\tfrac{1}{2}(\log 2)^2-\log x\log\left(\frac{2-2x}{2-x}\right).$$
$$(x<1)$$

Atque eodem modo etiam plures relationes derivari possent.

§. 13. Restat ut de seriebus

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{4^2}+\frac{x^6}{6^2}+\cdots \text{ in inf.} \quad \text{et} \quad \frac{x}{1}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}+\cdots \text{ in inf.}$$

verba nonnulla subjiciantur. Nam quum sit

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{4^2}+\frac{x^6}{6^2}+\cdots \text{ in inf.} = \frac{1}{2^2}\left(\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{2^2}+\frac{x^6}{3^2}+\cdots \text{ in inf.}\right),$$

obtinetur

44. $$\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{4^2}+\frac{x^6}{6^2}+\cdots \text{ in inf.} = \tfrac{1}{4}\lambda(x^2).$$
$$(\text{v. n. } x\leqq 1)$$

Deinde quoniam est

$$\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}+\cdots \text{ in inf.}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots \text{ in inf.}\right]-\tfrac{1}{2}\left[-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{3}+\cdots \text{ in inf.}\right],$$

erit

45. $$\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}+\cdots \text{ in inf.} = \tfrac{1}{2}\lambda(x)-\tfrac{1}{2}\lambda(-x).$$

§. 14. Denique de serie, quae in relatione (31.) intercedit, addantur haecce. Posito $\frac{x-y}{y}=v$, $\frac{y}{1-y}=w$, erit $y=\frac{w}{1+w}$, $x=\frac{(1+v)w}{1+w}$. Ergo ex (31.) invenitur

46. $$\frac{v^2}{2}\cdot\frac{w}{1}-\frac{v^3}{3}\left[\frac{w}{1}-\frac{w^2}{2}\right]+\frac{v^4}{4}\left[\frac{w}{1}-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}\right]-\cdots \text{ in inf.}$$
$$=\lambda\left(\frac{(1+v)w}{1+w}\right)-\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right)-\log(1+w)\log(1+v).$$
$$(\text{v. n. } (vw)\gtrless 1,\ -1<v\gtrless 1)$$

Hinc posito $-v$ loco v, quum sit

$$\frac{v^2}{2}\cdot\frac{w}{1}+\frac{v^3}{3}\left[\frac{w}{1}-\frac{w^2}{2}\right]+\frac{v^4}{4}\left[\frac{w}{1}-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}\right]+\cdots \text{ in inf.}$$
$$=\lambda\left(\frac{(1+v)w}{1+w}\right)-\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right)-\log(1+w)\log(1-v),$$
$$(\text{v. n. } (vw)\gtrless 1,\ -1<-v\gtrless 1)$$

ex his relationibus addendo et subtrahendo eruuntur relationes

47. $$\frac{v^2}{1}\cdot\frac{w}{1}+\frac{v^4}{2}\left[\frac{w}{1}-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}\right]+\frac{v^6}{3}\left[\frac{w}{1}-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}-\frac{w^4}{4}+\frac{w^5}{5}\right]+\cdots \text{ in inf.}$$
$$=\lambda\left(\frac{(1+v)w}{1+w}\right)+\lambda\left(\frac{(1-v)w}{1+w}\right)-2\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right)-\log(1+w)\log(1-v^2),$$
$$(\text{v. n. } (vw)\gtrless 1,\ \text{v. n. } v<1)$$

48. $$\frac{v^3}{3}\left[\frac{w}{1}-\frac{w^2}{2}\right]+\frac{v^5}{5}\left[\frac{w}{1}-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}-\frac{w^4}{4}\right]$$
$$+\frac{v^7}{7}\left[\frac{w}{1}-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}-\frac{w^4}{4}+\frac{w^5}{5}-\frac{w^6}{6}\right]+\cdots \text{ in inf.}$$
$$=\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{(1+v)w}{1+w}\right)-\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{(1-v)w}{1+w}\right)+\tfrac{1}{2}\log(1+w)\log\left(\frac{1+v}{1-v}\right).$$
$$(\text{v. n. } (vw)\gtrless 1,\ \text{v. n. } v<1)$$

Posito $w=1$, hae relationes mutantur in

49. $$\frac{v^2}{2}\cdot 1-\frac{v^3}{3}\left[1-\tfrac{1}{2}\right]+\frac{v^4}{4}\left[1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right]-\cdots \text{ in inf.}$$
$$=-\tfrac{1}{12}\pi^2+\tfrac{1}{2}(\log 2)^2+\lambda\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}v\right)-\log 2.\log(1+v).$$
$$(-1<v\gtrless 1)$$

et adhibita relatione (7.),

$$50.\quad \frac{v^2}{1}\cdot 1+\frac{v^4}{2}\left[1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right]+\frac{v^6}{3}\left[1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}\right]+\cdots \text{ in inf.}$$
$$= -\log(1+v)\log(1-v),$$
$$(\text{v. n. } v<1)$$

$$51.\quad \frac{v^3}{3}\left[1-\tfrac{1}{2}\right]+\frac{v^5}{5}\left[1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\right]+\frac{v^7}{7}\left[1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}\right]+\cdots \text{ in inf.}$$
$$= \tfrac{1}{12}\pi^2-\tfrac{1}{2}(\log 2)^2-\lambda\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}v\right)+\log 2\log(1+v)-\tfrac{1}{2}\log(1+v)\log(1-v).$$
$$(\text{v. n. } v<1)$$

Hinc, quoties valores functionum λ in his relationibus occurrentium sunt noti, etiam valores serierum istarum notescant. Sic posito in (49.) $v=1$, eruitur

$$52.\quad \tfrac{1}{2}\cdot 1-\tfrac{1}{3}\left[1-\tfrac{1}{2}\right]+\tfrac{1}{4}\left[1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right]-\cdots \text{ in inf.} = \tfrac{1}{12}\pi^2-\tfrac{1}{2}(\log 2)^2.$$

§. 15. Si relatio, quae ex relatione (46.) ponendo $-w$ loco w evadit, ad hanc additur, obtinetur

$$\left(\frac{v^3}{3}-\frac{v^4}{4}\right)\frac{w^2}{1}+\left(\frac{v^5}{5}-\frac{v^6}{6}\right)\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}\right]+\left(\frac{v^7}{7}-\frac{v^8}{8}\right)\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}+\frac{w^6}{3}\right]+\cdots \text{ in inf.}$$
$$= \frac{v^3}{3}\cdot\frac{w^2}{1}+\frac{v^5}{5}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}\right]+\frac{v^7}{7}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}+\frac{w^6}{3}\right]+\cdots \text{ in inf.}$$
$$-\tfrac{1}{2}\left[\frac{v^4}{2}\cdot\frac{w^2}{1}+\frac{v^6}{3}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}\right]+\frac{v^8}{4}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}+\frac{w^6}{3}\right]+\cdots \text{ in inf.}\right]$$
$$= \lambda\left(\frac{(1+v)w}{1+w}\right)+\lambda\left(\frac{-(1+v)w}{1-w}\right)-\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right)-\lambda\left(\frac{-w}{1-w}\right)-\log(1-w^2)\log(1+v).$$
$$(\text{v. n. } (vw)\lessgtr 1,\ -1<v\lessgtr 1)$$

At ex (46.) est

$$\frac{v^4}{2}\cdot\frac{w^2}{1}+\frac{v^6}{3}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}\right]+\frac{v^8}{4}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}+\frac{w^6}{3}\right]+\cdots \text{ in inf.}$$
$$= -\lambda\left(\frac{-(1-v^2)w^2}{1-w^2}\right)+\lambda\left(\frac{-w^2}{1-w^2}\right)+\log(1-w^2)\log(1-v^2);$$

ergo ex relatione antecedente invenitur

$$53.\quad \frac{v^3}{3}\cdot\frac{w^2}{1}+\frac{v^5}{5}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}\right]+\frac{v^7}{7}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}+\frac{w^6}{3}\right]+\cdots \text{ in inf.}$$
$$= \lambda\left(\frac{(1+v)w}{1+w}\right)+\lambda\left(\frac{-(1+v)w}{1-w}\right)-\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{-(1-v^2)w^2}{1-w^2}\right)-\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right)-\lambda\left(\frac{-w}{1-w}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{-w^2}{1-w^2}\right)+\tfrac{1}{2}\log(1-w^2)\log\left(\frac{1-v}{1+v}\right).$$
$$(\text{v. n. } (vw)\lessgtr 1,\ \text{v. n. } v<1)$$

Jam est ex relationibus (12. et 16.),

si $w>0$, $\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right) = -\lambda\left(\frac{1+w}{w}\right) + \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1+w}{w}\right)\right)^2 - \pi\log\left(\frac{1+w}{w}\right)\sqrt{-1}$,

si $-1<w<0$, $\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right) = -\lambda\left(\frac{1+w}{w}\right) - \frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1+w}{-w}\right)\right)^2$,

si $w<-1$, $\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right) = -\lambda\left(\frac{1+w}{w}\right) + \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1+w}{w}\right)\right)^2 + \pi\log\left(\frac{1+w}{w}\right)\sqrt{-1}$.

Quodquum ex (7.) sit

$$\lambda\left(\frac{1+w}{w}\right) = -\lambda\left(-\frac{1}{w}\right) + \frac{1}{6}\pi^2 - \log\left(\frac{1+w}{w}\right)\log\left(-\frac{1}{w}\right)$$

eruitur

$$\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right) = \lambda\left(-\frac{1}{w}\right) + \frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1+w}{w}\right)\right)^2 + \log\left(\frac{1+w}{w}\right)\log\left(\frac{1}{w}\right),$$

$$(w>0)$$

$$\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right) = \lambda\left(-\frac{1}{w}\right) - \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1+w}{-w}\right)\right)^2 + \log\left(\frac{1+w}{-w}\right)\log\left(\frac{1}{-w}\right) + \log\left(\frac{1}{-w}\right)\pi\sqrt{-1},$$

$$(-1<w<0)$$

$$\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right) = \lambda\left(-\frac{1}{w}\right) + \frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1+w}{w}\right)\right)^2 + \log\left(\frac{1+w}{w}\right)\log\left(\frac{1}{-w}\right) + \pi\log\left(\frac{1+w}{w}\right)\sqrt{-1}.$$

$$(w<-1)$$

Ex quibus relationibus invenitur esse generaliter

$$54.\quad -\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right) - \lambda\left(\frac{-w}{1-w}\right) + \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{-w^2}{1-w^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\right)^2.$$

Quapropter (53.) transit in

$$55.\quad \frac{v^3}{3}\cdot\frac{w^2}{1} + \frac{v^5}{5}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}\right] + \frac{v^7}{7}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}+\frac{w^6}{3}\right] + \cdots \text{ in inf.}$$

$$= \lambda\left(\frac{(1+v)w}{1+w}\right) + \lambda\left(\frac{-(1+v)w}{1-w}\right) - \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{-(1-v^2)w^2}{1-w^2}\right) + \frac{1}{2}\log(1-w^2)\log\left(\frac{1-v}{1+v}\right) + \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\right)^2.$$

$$(\text{v. n. } (vw) \gtrless 1,\ \text{v. n. } v<1)$$

Si relatio (47.) et quae ex ea ponendo $-w$ loco w evadit, adduntur, oritur

$$-\frac{v^4}{2}\cdot\frac{w^2}{1} - \frac{v^6}{3}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}\right] - \frac{v^8}{4}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}+\frac{w^6}{3}\right] - \cdots \text{ in inf.}$$

$$= \lambda\left(\frac{(1+v)w}{1+w}\right) + \lambda\left(\frac{-(1+v)w}{1-w}\right) + \lambda\left(\frac{(1-v)w}{1+w}\right) + \lambda\left(\frac{-(1-v)w}{1-w}\right) - 2\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right) - 2\lambda\left(\frac{-w}{1+w}\right) - \log(1-w^2)\log(1-v^2)$$

atque quum ex (54.) sit

$$-2\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right) - 2\lambda\left(\frac{-w}{1-w}\right) = -\lambda\left(\frac{-w^2}{1-w^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\right)^2,$$

eruitur

56. $$\frac{v^4}{2}\cdot\frac{w^2}{1}+\frac{v^6}{3}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}\right]+\frac{v^8}{4}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}+\frac{w^6}{3}\right]+\cdots \text{ in inf.}$$
$$= -\lambda\left(\frac{(1+v)w}{1+w}\right)-\lambda\left(\frac{-(1+v)w}{1-w}\right)-\lambda\left(\frac{(1-v)w}{1+w}\right)-\lambda\left(\frac{-(1-v)w}{1-w}\right)$$
$$+\lambda\left(\frac{-w^2}{1-w^2}\right)+\log(1-w^2)\log(1-v^2)-\tfrac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\right)^2.$$
$$(\text{v. n. } (vw)\lessgtr 1,\ \text{v. n. } v<1)$$

Si relatio (47.) et quae ex ea ponendo $-w$ loco w oritur, subtrahuntur, obtinetur

57. $$\frac{v^2}{1}\cdot\frac{w}{1}+\frac{v^4}{2}\left[\frac{w}{1}+\frac{w^3}{3}\right]+\frac{v^6}{3}\left[\frac{w}{1}+\frac{w^3}{3}+\frac{w^5}{5}\right]+\cdots \text{ in inf.}$$
$$= \tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{(1+v)w}{1+w}\right)-\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{-(1+v)w}{1-w}\right)+\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{(1-v)w}{1+w}\right)-\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{-(1-v)w}{1-w}\right)$$
$$-\lambda\left(\frac{w}{1+w}\right)+\lambda\left(\frac{-w}{1-w}\right)-\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\log(1-v^2).$$
$$(\text{v. n. } (vw)\lessgtr 1,\ \text{v. n. } v<1)$$

Si relatio (48.) et quae ex ea ponendo $-w$ loco w evadit, adduntur, habetur

58. $$\frac{v^3}{3}\cdot\frac{w^2}{1}+\frac{v^5}{5}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}\right]+\frac{v^7}{7}\left[\frac{w^2}{1}+\frac{w^4}{2}+\frac{w^6}{3}\right]+\cdots \text{ in inf.}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{(1+v)w}{1+w}\right)-\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{-(1+v)w}{1-w}\right)+\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{(1-v)w}{1+w}\right)+\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{-(1-v)w}{1-w}\right)-\tfrac{1}{2}\log(1-w^2)\log\left(\frac{1+v}{1-v}\right).$$
$$(\text{v. n. } (vw)\lessgtr 1,\ \text{v. n. } v<1)$$

Denique si relatio (48.) et quae ex ea ponendo $-w$ loco w oritur, subtrahuntur, eruitur

59. $$\frac{v^3}{3}\cdot\frac{w}{1}+\frac{v^5}{5}\left[\frac{w}{1}+\frac{w^3}{3}\right]+\frac{v^7}{7}\left[\frac{w}{1}+\frac{w^3}{3}+\frac{w^5}{5}\right]+\cdots \text{ in inf.}$$
$$= \tfrac{1}{4}\lambda\left(\frac{(1+v)w}{1+w}\right)-\tfrac{1}{4}\lambda\left(\frac{-(1+v)w}{1-w}\right)-\tfrac{1}{4}\lambda\left(\frac{(1-v)w}{1+w}\right)+\tfrac{1}{4}\lambda\left(\frac{-(1-v)w}{1-w}\right)+\tfrac{1}{4}\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\log\left(\frac{1+v}{1-v}\right).$$
$$(\text{v. n. } (vw)\lessgtr 1,\ \text{v. n. } v<1)$$

Jam nunc ex comparatione relationum (55. et 58.) prodibit

60. $$3\lambda\left(\frac{(1+v)w}{1+w}\right)+3\lambda\left(\frac{-(1+v)w}{1-w}\right)-\lambda\left(\frac{(1-v)w}{1+w}\right)-\lambda\left(\frac{-(1-v)w}{1-w}\right)-\lambda\left(\frac{-(1-v^2)w^2}{1-w^2}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\right)^2.$$
$$(\text{v. n. } (vw)\lessgtr 1,\ \text{v. n } v<1)$$

Atque si valores ipsorum v et w restituuntur, h. e. ponendo $v=\frac{x-y}{y}$, $w=\frac{y}{1-y}$, relatio antecedens mutatur in

61. $$3\lambda(x)+3\lambda\left(\frac{x}{2y-1}\right)-\lambda(2y-x)-\lambda\left(\frac{2y-x}{2y-1}\right)-\lambda\left(\frac{x(2y-x)}{2y-1}\right)=-\tfrac{1}{2}(\log(1-2y))^2.$$
$$\left(\text{v. n. }\left(\frac{x-y}{1-y}\right)\lessgtr 1,\ \text{v. n. }\left(\frac{x-y}{y}\right)<1\right)$$

22.

Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Von Hrn. Dr. *Öttinger*, Prof. ord. an der Universität zu Freiburg im Br.)

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 16. im dritten, No. 21. im vierten Heft 26ten und No. 17. im 3ten Heft 30ten Bandes.)

III.

In einer Urne befinden sich r verschiedene Kugel-Arten und von jeder Art m verschiedene, aber auf gleiche Art bezeichnete Kugeln. p Kugeln werden einzeln herausgenommen und die gezogene Kugel wird nicht in die Urne zurückgelegt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade s Kugeln von einer bestimmten Bezeichnung nach einander erscheinen werden?

Die Anzahl der Kugelgruppen, welche ein bestimmtes Zeichen haben und s Kugeln in sich begreifen, ist $r^{s|-1}$. Diese Gruppen können von der ersten, oder zweiten, oder dritten u. s. w. oder von der $(p-s+1)$ten Ziehung an erscheinen, also $p-s+1$mal. Jede dieser Kugelgruppen kann so oft erscheinen, als sie (als Ganzes betrachtet) von Kugelgruppen mit anderer Bezeichnung auf den übrigen $p-s$ Stellen, sie mögen folgen oder vorangehen, oder theilweise zugleich folgen und vorangehen, begleitet werden kann. Hieraus ergiebt sich für die dem Ereignifs günstige Gruppen-Anzahl:

$$(p-s+1)\cdot r^{s|-1}(mr-r)^{p-s|-1}.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle ist $(rm)^{p|-1}$. Denn die Zahl der in der Urne enthaltenen Kugeln ist rm. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$1. \qquad w = \frac{(p-s+1)\cdot r^{s|-1}(mr-r)^{p-s|-1}}{(mr)^{p|-1}}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs s Kugeln, von einem bestimmten Zeichen, hintereinander gerade zweimal erscheinen werden.

Die Zahl der Kugelgruppen von der Dimension s, die dasselbe Zeichen haben, welches s vorher erschienene Kugeln schon hatten, ist

$$r^{s|-1}(r-s)^{s|-1} = r^{2s|-1}.$$

Diese Kuppelgruppen, welche in zwei Partieen getrennt und dabei als Ganzes erscheinen sollen, können so oft vorkommen, als sie $p-2s+2$ Stellen ausfüllen oder die Zerstreuung in $p-2s+2$ Fächer eingehen können. Diese Anzahl ist nach §. 41. meiner Comb. Lehre $\frac{(p-2s+2)^{2|-1}}{1^{2|1}}$. Aufserdem treten mit jeder einzelnen Gruppe alle diejenigen in Verbindung, welche von anderer Bezeichnung sind und die übrigen $p-2s$ Stellen einnehmen können. Die Anzahl der günstigen Gruppen ist demnach

$$\frac{(p-2s+1)^{2|1}}{1^{2|1}} r^{2s|-1}(mr-r)^{p-2s|-1},$$

und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$2. \quad w = \frac{(p-2s+1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{r^{2s|-1}(mr-r)^{p-2s|-1}}{(rm)^{p|-1}}.$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so ergiebt sich für die Wahrscheinlichkeit, dafs s Kugeln von einem bestimmten Zeichen hintereinander gerade $x$mal unter den oben genannten Bedingungen erscheinen werden:

$$3. \quad w = \frac{(p-xs+1)^{x|1}}{1^{x|1}} \cdot \frac{r^{xs|-1}(mr-r)^{p-xs|-1}}{(mr)^{p|-1}}.$$

Hiebei ist vorausgesetzt, dafs eine Kugel von der bestimmten Bezeichnung in den übrigen $p-xs$ Ziehungen nicht mehr erscheine.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs unter den genannten Bedingungen wenigstens einmal eintreffen werde, ergiebt sich aus (3.) leicht, wenn man allmälig 1, 2, 3, 4, ... statt x setzt. Sie ist

$$4. \quad w = (p-s+1)\frac{r^{s|-1}(mr-r)^{p-s|-1}}{(mr)^{p|-1}} + \frac{(p-2s+1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{r^{2s|-1}(mr-r)^{p-2s|-1}}{(mr)^{p|-1}}$$
$$+ \frac{(p-3s+1)^{3|1}}{1^{3|1}} \cdot \frac{r^{3s|-1}(mr-r)^{p-3s|-1}}{(mr)^{p|-1}} + \ldots.$$

Diese Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht.

Nimmt man p Kugeln unter den oben genannten Bedingungen aus der Urne und fragt: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach einander gerade x_1 Kugeln von einer bestimmten Bezeichnung, x_2 von einer zweiten, x_3 von einer dritten u. s. f., x_s von einer $s$ten Bezeichnung erscheinen wer-

den, so ergiebt sich leicht aus den obigen Bemerkungen der Ausdruck

$$5.\quad w = \frac{(p-x_1-x_2-\cdots-x_s+1)^{s|-1}\cdot r^{x_1|-1}\cdot r^{x_2|-1}\cdots r^{x_s|-1}(mr-sr)^{p-x_1-x_2-\cdots-x_s|-1}}{(mr)^{p|-1}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs das Ereignifs in einer bestimmten Ordnung eintreffen werde, ist

$$6.\quad w = \frac{(p-x_1-x_2-\cdots-x_s+1)^{s|-1}}{1^{s|1}}\cdot\frac{r^{x_1|-1}\cdot r^{x_2|-1}\cdots r^{x_s|-1}(mr-r)^{p-x_1-x_2-\cdots-x_s|-1}}{(mr)^{p|-1}}.$$

Diese Gleichungen finden mancherlei Anwendungen.

In einer Urne sind r verschiedene Kugel-Arten, von denen jede m verschiedene, aber auf gleiche Weise bezeichnete Kugeln zählt. Man zieht s Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogene Kugel zurückzulegen, und wiederholt das Verfahren so lange als möglich. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs s Kugeln von einer bestimmten Bezeichnung hintereinander in einer der möglichen Ziehungsreihen erscheinen werden, ohne dafs vorher eine oder mehrere Kugeln von einer andern Bezeichnung erschienen sind?

Die Wahrscheinlichkeit beruht darauf, dafs s Kugeln mit der bestimmten Bezeichnung entweder in der ersten Ziehungsreihe, oder, wenn es nicht geschieht, in der zweiten, oder, wenn es in den beiden ersten nicht geschieht, in der dritten Ziehungsreihe erscheinen werden u. s. w., ohne dafs vorher eine Kugel von anderer Bezeichnung erschienen ist. Die Glieder dieser zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit ergeben sich aus der Gleichung (1.) leicht. Es findet sich

$$7.\quad w = \frac{r^{s|-1}}{(rm)^{s|-1}} + \frac{(mr-r)^{s|-1}r^{s|-1}}{(rm)^{2s|-1}} + \frac{(mr-r)^{2s|-1}r^{s|-1}}{(rm)^{3s|-1}} + \frac{(mr-r)^{3s|-1}r^{s|-1}}{(rm)^{4s|-1}} + \cdots.$$

Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht.

Sind schon q Kugeln gezogen und darunter x von der bestimmten Bezeichnung erschienen, so ergiebt sich aus (7.) folgender Ausdruck:

$$8.\quad w = \frac{(r-x)^{s|-1}}{(rm-q)^{s|-1}}\left[1 + \frac{(rm-r-q)^{s|-1}}{(rm-q-s)^{s|-1}} + \frac{(rm-r-q)^{2s|-1}}{(rm-q-s)^{2s|-1}} + \cdots\right].$$

Diese Gleichungen finden unter anderm beim Pharao Anwendung und bestimmen die Wahrscheinlichkeit, dafs in einen Abzug (Plié) zwei gleiche Blätter von einer bestimmten Bezeichnung fallen werden, ohne dafs vorher ein Blatt mit dieser Bezeichnung erschien. Gesetzt, es sei noch kein Blatt hievon erschienen und der Banquier habe noch 21 Blätter in der Hand, so ist die

Wahrscheinlichkeit, dafs ein Plié fallen werde:

$$9. \quad w = \frac{4\cdot 3}{(2r)^{4|-1}}[(2r-2)(2r-3)+(2r-4)(2r-5)+\cdots 4\cdot 3+2\cdot 1],$$

wenn in (8.) $x=0$, $q=0$, $r=4$, $rm=2r$, $s=2$ gesetzt wird. Die in Klammern eingeschlossene Reihe läfst sich wie folgt summiren. Es ist

$$1^{2|1}+2^{2|1}+3^{2|1}+\cdots\quad(2r-3)^{2|1}=\frac{(2r-3)(2r-2)(2r-1)}{3}.$$

Ferner ist aus 409. Pg. 177 m. Lehre von den aufst. Funct.

$$1^{2|1}-2^{2|-1}+3^{2|-1}-\cdots+(2r-3)^{2|1}=\frac{(2r-2)^2}{2}.$$

Werden beide Gleichungen zusammengezählt und das Resultat durch 2 dividirt, so ergiebt sich

$$1^{2|1}+3^{2|1}+5^{2|1}+\cdots(2r-3)^{2|1}=\frac{(2r-2)2r(4r-5)}{4\cdot 3}.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also aus (9.)

$$10. \quad w=\frac{4r-5}{(2r-1)(2r-3)}.$$

Ist schon ein Blatt von einer bestimmten Bezeichnung erschienen und sind noch $2r$ Blätter umzuschlagen, so ist in (8.) $x=1$, $rm-q=2r$, $s=2$ zu setzen. Die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Plié erscheinen werde, ehe eines der drei noch übrigen Blätter gefallen ist, wird

$$w=\frac{3\cdot 2}{(2r)^{3|-1}}[2r-2+2r-4+\cdots+4+2]$$

sein. Die eingeklammerte Reihe ist leicht zu summiren. Die Summe ist $r^{2|-1}$. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$11. \quad w=\frac{3}{2(2r-1)}.$$

Sind schon zwei Blätter von einer bestimmten Bezeichnung erschienen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Plié erscheinen werde, wenn noch $2r$ Carten umzuschlagen sind,

$$12. \quad w=\frac{1}{2r-1}.$$

Dieser Werth ergiebt sich, wenn $x=2$, $rm-q=2r$ und $s=2$ gesetzt wird und die nöthigen Reductionen gemacht werden.

Sind noch $2r$ Carten umzuschlagen und wird eine von ihnen, etwa die unterste, als nicht mitwirkend betrachtet, so ergeben sich auf ähnliche Weise folgende Wahrscheinlichkeiten für die oben bezeichneten Fälle; und zwar,

wenn noch kein Blatt erschienen ist:

$$13. \quad w = \frac{4\cdot 3}{(2r-1)^{4|-1}}[(2r-3)^{2|-1}+(2r-5)^{2|-1}+\cdots 5^{2|-1}+3^{2|-1}] = \frac{4r-3}{(2r-1)(2r-3)};$$

wenn Ein Blatt erschienen ist:

$$14. \quad w = \frac{3\cdot 2}{(2r-1)^{3|-1}}[2r-3+2r-5+\cdots+3+1] = \frac{3(r-1)}{(2r-1)(2r-3)};$$

wenn Zwei Blätter erschienen sind:

$$15. \quad w = \frac{2\cdot 1}{(2r-1)^{2|-1}}(r-1) = \frac{1}{2r-1}.$$

Von p Urnen enthält jede m verschiedene Kugeln, deren Bezeichnungsart in allen dieselbe ist. Man nimmt aus jeder Urne eine Kugel heraus. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die gezogenen Kugeln die gleiche Bezeichnung haben?

Die Zahl der Fälle, welche dem Ereignifs günstig sind, ist m, denn von m verschiedenen Zeichen kann jedes nur einen günstigen Fall geben; die Zahl aller möglichen Fälle ist m^p. Hieraus ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit

$$16. \quad w = \frac{1}{m^{p-1}}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nur Kugeln von zweierlei Zeichen erscheinen werden, und zwar x_1 von dem einen und $p-x_1$ von dem zweiten Zeichen?

Betrachtet man x_1 Kugeln von der einen Bezeichnung als ein Ganzes, und die von der andern Bezeichnung auch als solches, so ergeben sich so viele Kugelgruppen von zwei verschiedenen Bezeichnungen, als Versetzungen aus m Elementen zur zweiten Classe gebildet werden können. Diese Anzahl ist $m(m-1)$. Erwägt man aber, dafs die gezogenen p Kugeln von zweierlei Bezeichnung so oft mit einander verbunden werden können, als x_1 unter sich gleiche Elemente Versetzungen von $p-x_1$ unter sich gleichen Elementen eingehen können, so hat man, mit Rücksicht auf (§. 9. m. Comb. L.), für die Zahl der günstigen Fälle:

$$A_1 = \frac{p^{p|-1}}{1^{x_1|1}\cdot 1^{p-x_1|1}} m^{2|-1}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$17. \quad w = \frac{p^{p|-1}\, m^{2|-1}}{1^{x_1|1}\cdot 1^{p-x_1|1}\cdot m^p}.$$

Diese Gleichung gilt nur so lange, als x_1 und $p - x_1$ unter sich ungleich sind. Ist $p - x_1 = x_1$, so müssen die Versetzungen, welche bei den Kugelgruppen von gleicher Bezeichnung eintreten sollten, ausgeschlossen werden. Die Zahl der günstigen Fälle ist dann

$$A_1 = \frac{p^{p|-1}}{1^{x_1|1} \cdot 1^{p-x_1|1}} \cdot \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}}$$

und die Wahrscheinlichkeit geht in

$$18. \quad w = \frac{p^{p|-1}\, m^{2|-1}}{1^{2|1} \cdot 1^{x_1|1} \cdot 1^{p-x_1|1} m^p}$$

über. In diesem Falle ist $p = 2x_1$, also p eine gerade Zahl.

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs Kugeln von dreierlei Bezeichnung, x_1 von einer, x_2 von einer zweiten und x_3 von einer dritten erscheinen werden?

Setzt man die oben angegebene Betrachtungsart weiter fort, so ergiebt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$19. \quad w = \frac{p^{p|-1}\, m^{3|-1}}{1^{x_1|1} \cdot 1^{x_2|1} \cdot 1^{x_3|1} m^p}.$$

Hier ist die Bedingungsgleichung: $x_1 + x_2 + x_3 = p$. Sind zwei dieser Gröfsen einander gleich, so ist die Wahrscheinlichkeit

$$20. \quad w = \frac{p^{p|-1}\, m^{3|-1}}{1^{2|1} \cdot 1^{x|1} \cdot 1^{x_1|1} \cdot 1^{x_1|1} m^p}.$$

Sind alle drei gleich, so ist $p = 3x$ und es ergiebt sich

$$21. \quad w = \frac{p^{p|-1}\, m^{3|-1}}{1^{3|1} (1^{x|1})^3 m^p}.$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so ergiebt sich leicht für die Wahrscheinlichkeit, dafs Kugeln von r verschiedenen Bezeichnungen, x_1 von der einen, x_2 von einer zweiten u. s. w. erscheinen werden:

$$22. \quad w = \frac{p^{p|-1}}{1^{x_1|1} \cdot 1^{x_2|1} \cdots 1^{x_r|1}} \cdot \frac{m^{r|-1}}{m^p}.$$

Hier ist die Bedingungsgleichung:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_r = p.$$

Dabei können die Zahlen, welche die Bezeichnungen andeuten, selbst wieder unter einander gleich sein und es kann die eine Art t_1 mal, die andere t_2 mal u. s. w. vorkommen. Daraus ergiebt sich folgende allgemeine Gleichung:

$$23. \quad w = \frac{p^{p|-1}}{(1^{x_1|1})^{t_1} \cdot (1^{x_2|1})^{t_2} \cdots (1^{x_r|1})^{t_r}} \cdot \frac{m^{s|-1}}{1^{t_1|1} \cdot 1^{t_2|1} \cdot 1^{t_3|1} \cdots 1^{t_r|1} \cdot m^p}.$$

Folgendes sind die Bedingungsgleichungen für diese Formel:

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 + \ldots . t_r x_r = p,$$
$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots . t_r = s.$$

Die Gröfsen t_1, t_2, t_3, ... t_r und x_1, x_2, x_3, ... x_r können unter der genannten Beschränkung jeden Werth haben, und selbst 0 sein. Sollen Kugeln von lauter verschiedenen Zeichen und je eine erscheinen, so ist die Wahrscheinlichkeit aus (23.):

$$24. \quad w = \frac{p^{p|-1}}{(1^{1|1})^p} \cdot \frac{m^{p|-1}}{1^{p|1} \cdot m^p} = \frac{m^{p|-1}}{m^p};$$

wie bekannt. Es ist leicht zu sehen, dafs die vorstehenden Gleichungen auch die Wahrscheinlichkeiten für den Fall ausdrücken, wo nur eine Urne vorhanden ist und man $p$mal aus ihr eine Kugel zieht, die nach jeder Ziehung in die Urne zurückgelegt wird. Der Ausdruck

$$25. \quad A = \frac{p^{p|-1}}{(1^{x_1|1})^{t_1} (1^{x_2|1})^{t_2} \ldots . (1^{x_r|1})^{t_r}} \cdot \frac{m^{t_1+t_2+t_3+\ldots . t_r|-1}}{1^{t_1|1} \cdot 1^{t_2|1} \cdot 1^{t_3|1} \ldots . 1^{t_r|1}}$$

giebt die Anzahl der Gruppen, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur $p$ten Classe gebildet werden, worin Elemente mit derselben Stellenzahl ein- oder mehreremal vorkommen, und löset also eine Aufgabe aus der Combinationslehre. Die Bedingungsgleichungen zu (23.) gelten auch hier.

Die Gleichungen dieses Paragraphs finden späterhin mancherlei Anwendungen. Insbesondere gewähren sie manche Anwendungen auf unser Zahlensystem. Dieses System beruht nämlich auf den Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu den verschiedenen Classen, und weicht nur darin davon ab, dafs das Zeichen 0 nicht geschrieben wird, wenn es zu Anfange und vor einem der übrigen Zahlzeichen ein- oder mehreremal, oder allein, stehen würde. Das Zahlensystem ist unstreitig eine der wichtigsten Entdeckungen im Gebiete der Mathematik, die um so sinnreicher ist, weil das System auf so einfachen Principien beruht und die Entdeckung, in grauer Vorzeit gemacht, der Wissenschaft so viele Jahrhunderte voraneilte und als ein Vermächtnifs eines grofsen Geistes so lange vereinzelt und verwaiset da stand, bis es gelang ihr die gebührende Stelle anzuweisen. Der Erfinder ist unbekannt; vielleicht gehört die Entdeckung mehreren Generationen an, weil sie die Kräfte des Einzelnen überstieg. Diese Vermuthung gewinnt an Wahrscheinlichkeit, wenn man den Versuch Archimedes, ein Zahlensystem zu schaf-

fen, erwägt; was nun auf so einfache Weise gelöset ist, und was selbst jenem schöpferischen Geiste mifslang.

Die Menge der $n$stelligen Zahlen ergiebt sich leicht, wenn man bemerkt, dafs nur 9 Zeichen die erste Stelle einnehmen, an den folgenden Stellen aber alle Zeichen ohne Unterschied erscheinen können. Sie ist

$$26. \quad A = 9P'[0, 1, 2, \ldots . 9]^{n-1} = 9 \cdot 10^{n-1}.$$

Die Menge aller Zahlen, welche n Stellen und weniger haben können, ist

$$27. \quad A = P'[0, 1, 2, \ldots . 9]^{n} - 1 = 10^{n} - 1;$$

denn die Gruppe, in welcher das Zeichen 0 als ein $n$faches erscheint, dient nicht als Zahl. In diesen Zahlen erscheinen die Ziffern zum Theil wiederholt, zum Theil auch nicht.

In einer Urne sind alle $n$zifferigen Zahlen enthalten. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu ziehen, in welcher keine Ziffer wiederholt ist?

Die Menge der günstigen Zahlen findet sich, wenn man bemerkt, dafs auf der ersten Stelle nur eines der Zahlzeichen 1, 2, 3, ... 9, auf den folgenden $n-1$ Stellen weder dasselbe, noch eines der übrigen ergänzenden Zeichen wiederholt erscheinen darf. Sie ist

$$28. \quad A = 9 \cdot 9^{n-1|-1}.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle ist in (26.) angegeben. Die Wahrscheinlichkeit ist

$$29. \quad w = \frac{9^{n-1|-1}}{10^{n-1}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, unter den genannten Bedingungen eine Zahl aus den $n$zifferigen zu ziehen, wenn wenigstens eine Ziffer wiederholt erscheint, ist aus (29.)

$$30. \quad w = 1 - \frac{9^{n-1|-1}}{10^{n-1}} = \frac{10^{n-1} - 9^{n-1|-1}}{10^{n-1}};$$

n kann sich in dieser Gleichung nicht über 10 erheben.

Die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, die n Ziffern und weniger enthält, eine zu ziehen, in welcher keine Ziffer wiederholt erscheint, ergiebt sich, wenn man in (28.) n der Reihe nach $= 1, 2, 3, \ldots . n$ setzt und das Resultat durch (27.) dividirt. Sie ist

$$31. \quad w = 9 \cdot \frac{\Sigma_1^n 9^{n-1|-1}}{10^n - 1}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu ziehen, welche wenigstens eine Ziffer wiederholt enthält, ist

$$32. \qquad w = \frac{10^{n-1} - 1 - 9\,\Sigma_1^n 9^{n-1|-1}}{10^n - 1}.$$

So ist die Wahrscheinlichkeit, aus einer Urne, in welcher sich die Zahlen von 1 bis 10000 einschliefslich befinden, eine Zahl mit lauter ungleichen Ziffern zu ziehen, 0,5274; die, eine Zahl mit wiederholten Ziffern zu ziehen, ist 0,4726. Bei den Zahlen von 1 bis 100000 sind diese Wahrscheinlichkeiten 0,3249 und 0,6751.

In einer Urne sind lauter $n$stellige Zahlen enthalten. Einmal wird gezogen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in der gezogenen Zahl gerade m gleiche Ziffern vorkommen werden?

Die Zahl der günstigen Fälle finden sich, wenn alle $n$stelligen Zahlen in solche eingetheilt werden, in welchen nur die Zeichen 1, 2, 3, ... 9, und in solche, in welchen dieselben mit 0 in Verbindung vorkommen. Die Zahl der Fälle, in welchen irgend ein Zeichen gerade $m$mal wiederholt, die übrigen also nicht wiederholt erscheinen, ergiebt sich aus (10.), wenn man $p = n$, $x_1 = m$, $t_1 = 1$, $x_2 = 1$, $t_2 = n - m$, $m = 9$ setzt. Sie ist

$$A_1 = \frac{n^{n|-1}}{1^{m|1} \cdot 1^{n-m|1}} \cdot 9^{n-m+1|-1}.$$

Wird das Zeichen 0 eingeführt, so ist zu bemerken, dafs es nie die erste Stelle einnehmen kann. Es kann daher nur auf den $n-1$ letzten Stellen als $n$faches erscheinen. Diese Anzahl ist

$$A_2 = \frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{m|1} \cdot 1^{n-m-1|1}} \cdot 9 \cdot 8^{n-m-1|-1}.$$

Hieran schliefst sich die Menge der Zahlen, in welchen das Zeichen, welches die erste Stelle einnimmt, $n-1$mal mit sich selbst, zugleich mit 0 und ferner mit den übrigen 8 Zeichen zur Ergänzung bis auf $n-1$ Dimensionen in Verbindung treten kann. Sie ist

$$A_3 = \frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{m-1|1} \cdot 1^{n-m-1|1}} \cdot 9 \cdot 8^{n-m-1|-1}.$$

Hiezu kommt endlich die Menge der Zahlen, in welchen das Zeichen, welches die erste Stelle einnimmt, nicht unter den folgenden vorkommt, sondern ein anders der übrigen Zeichen als $m$faches und das Zeichen 0 als Einzelnes. Sie ist

$$A_4 = \frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{m|1} \cdot 1^{n-m-2|1}} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7^{n-m-2|-1}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$33.\quad w = \frac{1}{9\cdot 10^{n-1}}\left[\frac{n^{n|-1}}{1^{m|1}\cdot 1^{n-m|1}}\cdot 9^{n-m+1|-1} + \frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{m|1}\cdot 1^{n-m-1|1}}\cdot 9^{n-m|-1}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{m-1|1}\cdot 1^{n-m-1|1}}\cdot 9^{n-m-1|-1} + \frac{(n-1)^{n-1|-1}}{1^{m|1}\cdot 1^{n-m-2|1}}\cdot 9^{n-m|-1}\right].$$

Sind in einer Urne die Zahlen von 1 bis 1000000 einschliefslich enthalten, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu ziehen, welche eine und dieselbe Ziffer gerade dreimal enthält, 0,097533. Sie wird gefunden, wenn man in (33.) n der Reihe nach $= 3, 4, 5, 6$ setzt und das Resultat durch 10^6 dividirt. Man kann 1 gegen 1 wetten, dafs unter 11 Zahlen *eine* gezogen werden wird, in welcher eine Ziffer gerade dreimal vorkommt. Hieraus läfst sich leicht die Wahrscheinlichkeit finden, eine Zahl zu ziehen, in welcher eine Ziffer höchstens oder wenigstens $m$mal vorkommt u. s. w.

§. 26.

In einer Urne befinden sich m verschiedene Kugeln. Es wird $p$mal gezogen und die gezogene Kugel wird nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade k bestimmte Kugeln in einer bestimmten Ordnung hintereinander wenigstens einmal erscheinen werden?

Es sind k Ziehungen nöthig, damit das Verlangte in Erfüllung gehe; denn die oben bezeichnete Kugelgruppe ist als ein zusammengehöriges Ganze zu betrachten. Diese Gruppe kann nun in k Ziehungen erscheinen, welche von der ersten, oder der zweiten, oder der dritten Ziehung etc. an gezählt werden. Dies giebt $p-k+1$ Fälle. Jeder einzelne Fall kann mit m^{p-k} Gruppen in Verbindung treten, welche vorangehen, oder folgen, oder gleichzeitig vorangehen und folgen. Die Zahl der daraus sich ergebenden Fälle ist

$$A_1 = (p-k+1)m^{p-k}.$$

Ist auf diese Weise die $(k+1)$te, oder eine spätere Ziehung geschehen, so sind k und mehr Ziehungen vorausgegangen, und damit kann möglicherweise eine Gruppe von k Kugeln erschienen sein, welche die angezeigte Eigenschaft hat, und eine zweite oder dritte etc. kann folgen. Von der $(k+1)$ten Ziehung an ist die angegebene Zählungsart unrichtig. Es müssen diejenigen Fälle wieder ausgestofsen werden, in welchen die fragliche Kugelgruppe zweimal erscheinen kann. Das wiederholte Eintreffen einer Kugelgruppe nimmt $2k$ Ziehungen in Anspruch. Dann bleiben noch $p-2k$ Ziehungen übrig, in welchen die beiden einander gleichen Kugelgruppen alle möglichen Stellen unter sich einnehmen

können. Die dadurch bedingte Zerstreuungs-Anzahl ist nach (§. 41. No. 121. m. Comb. L.) $= \frac{(p-2k+2)^{2|-1}}{1^{2|1}}$: denn zwei gleiche Elemente werden in $p-2k+2$ Fächern alle möglichen Stellungen einnehmen. Jeder einzelne Fall kann so oft vorkommen, als in den übrigen $m-2k$ Ziehungen Kugelgruppen auftreten können. Die auszustofsende Gruppen-Anzahl ist

$$A_2 = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} m^{p-2k}.$$

Diese Schlufsweise bleibt richtig, bis die $(2k+1)$te Ziehung geschehen ist. Von da an müssen dieselben Schlüsse auf das dreimalige Vorkommen der fraglichen Kugelgruppen angewendet, die daraus hervorgehende Zahl mufs auf eine ähnliche Weise bestimmt und von A_2 selbst mufs wieder ausgestofsen werden. Diese Anzahl ist

$$A_3 = \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}} m^{p-3k}.$$

Wird diese Schlufsart fortgesetzt, so ergiebt sich für die Zahl der günstigen Fälle, die wir durch A_k bezeichnen, folgende Gleichung:

$$1. \quad A_k = \frac{p-k+1}{1} m^{p-k} - \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} m^{p-2k} + \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}} m^{p-3k} - \ldots.$$

Wird durch m^p dividirt, so findet sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$2. \quad w = \frac{p-k+1}{m^k} - \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1} m^{2k}} + \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1} m^{3k}} - \frac{(p-4k+1)^{4|1}}{1^{4|1} m^{4k}} + \ldots.$$

Bleiben die Bedingungen wie oben, und soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dafs sämmtliche Kugeln in einer bestimmten Ordnung hinter einander in p Ziehungen wenigstens einmal erscheinen werden, so ergiebt sich aus (2.), wenn man $k = m$ setzt:

$$3. \quad w = \frac{p-m+1}{m^m} - \frac{(p-2m+1)^{2|1}}{1^{2|1} m^{2m}} + \frac{(p-3m+1)^{3|1}}{1^{3|1} m^{3m}} - \ldots.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs k bestimmte Kugeln in einer bestimmten Ordnung hinter einander wenigstens $r$mal erscheinen werden?

Das erwartete Ereignifs kann eintreten, wenn rk Ziehungen gemacht sind. Diesen rk Ziehungen können $p-rk$ nachfolgen. Da nun das Ereignifs $r$mal wiederholt eintreffen soll, so kann dies so oft geschehen, als r Elemente in $p-rk+r$ Fächer zerstreut werden können. Die Zahl der dem Erwarteten günstigen Fälle ist demnach:

$$A_1 = \frac{(p-rk+r)^{r|-1}}{1^{r|1}} m^{p-rk} = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}} m^{p-rk}.$$

Diese Zahl ist so lange richtig, bis die erste der dem Erwarteten günstigen Kugelgruppen um k Stellen zurückgerückt ist, oder bis k Ziehungen hinzugekommen sind. In diesem Fall kann das Ereignifs schon einmal vorausgegangen sein. Es tritt sofort eine weitere günstige Kugelgruppe vor. Die Zahl, welche durch dieses Vortreten bedingt wird, mufs bestimmt und abgezogen werden. Während nemlich die fraglichen Gruppen von der $(k+1)$ten Ziehung an eintreten und alle möglichen Stellungen einnehmen, kann die $(r+1)$te Kugelgruppe vortreten und mit ihnen alle möglichen Stellungen einnehmen. Es entstehen hiedurch die Zerstreuungen von $r+1$ Elementen in $p-rk-k+r+1$ Fächer. Damit verbinden sich alle möglichen Kugelgruppen zur $(p-rk-k)$ten Classe. Die auszuscheidende Gruppen-Anzahl ist

$$A_2 = \frac{(p-(r+1)k+r+1)^{r+1|-1}}{1^{r+1|1}} m^{p-(r+1)k}.$$

Werden diese Schlüsse weiter fortgesetzt, so ergiebt sich die von A_2 weiter auszuscheidende Gruppen-Anzahl. Sie ist

$$A_3 = \frac{(p-(r+2)k+r+2)^{r+2|-1}}{1^{r+2|-1}} m^{p-(r+2)k}$$

u. s. w. Die dem Ereignifs günstige Gruppen-Anzahl (A_k^r) ist

$$4. \quad A_k^r = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}} m^{p-rk} - \frac{(p-(r+1)k+1)^{r+1|1}}{1^{r+1|1}} m^{p-(r+1)k} + \frac{(p-(r+2)k+1)^{r+2|1}}{1^{r+2|1}} m^{p-(r+2)k} - \ldots.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$5. \quad w = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1} m^{rk}} - \frac{(p-(r+1)k+1)^{r+1|1}}{1^{r+1|1} m^{(r+1)k}} + \frac{(p-(r+2)k+1)^{r+2|1}}{1^{r+2|1} m^{(r+2)k}} - \ldots.$$

Man sieht leicht, dafs die Gleichungen (4. und 5.) die spätern Glieder der Gleichungen (1. und 2.) in sich begreifen. Sie beginnen mit dem $r$ten Gliede von (1. und 2.).

Durch die Gleichungen (4. und 5.) läfst sich auch folgende Frage beantworten. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs unter den obigen Bedingungen k bestimmte Kugeln in einer bestimmten Ordnung in p Ziehungen wenigstens r und höchstens $s$mal, also r, $r+1$, $r+2$, $\ldots$ $s$mal erscheinen werden?

Die Zahl der günstigen Gruppen ergiebt sich, wenn, $s+1$ statt r in (4.) gesetzt, die erhaltene Gruppen-Anzahl von (4.) abgezogen und durch m^p dividirt wird. Bezeichnet man die Zahl der Gruppen, in welchen k be-

stimmte Kugeln in einer bestimmten Ordnung wenigstens *r*mal und höchstens *s*mal erscheinen, durch $A_k^{r,s}$, so läfst sich die Zahl der Gruppen wie folgt ausdrücken:

$$6. \quad A_k^{r,s} = A_k^r - A_k^{s+1}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$7. \quad w = \frac{A_k^r - A^{s+1}}{m^p} = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}m^{rk}} - \frac{(p-(r+1)k+1)^{r+1|1}}{1^{r+1|1}m^{(r+1)k}} + \frac{(p-(r+2)k+1)^{r+2|1}}{1^{r+2|1}m^{(r+2)k}} - \ldots.$$

$$- \frac{(p-(s+1)k+1)^{s+1|1}}{1^{s+1|1}m^{(s+1)k}} + \frac{(p-(s+2)k+1)^{s+2|1}}{1^{s+2|1}m^{(s+2)k}} - \frac{(p-(s+3)k+1)^{s+3|1}}{1^{s+3|1}m^{(s+3)k}} + \ldots.$$

Die Gleichungen (1. 4. und 6.) lösen Aufgaben aus der Combinationslehre auf. Die Gleichung (1.) giebt die Anzahl der Gruppen, in welchen *k* bestimmte Elemente in einer bestimmten Ordnung wenigstens einmal vorkommen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus *m* Elementen zur *p*ten Classe gebildet werden; die Gleichung (4.) giebt diejenigen, in welchen diese Elemente wenigstens *r*mal vorkommen; die Gleichung (6.) diejenigen, in welchen sie wenigstens *r* und höchstens *s*mal vorkommen.

Laplace hat die Gleichung (3.) (einen besonderen Fall von (2.)) in dem VIIten Bande der „Mémoires de Mathémat. et Phys. présentés à l'Académie roy. des Sciences 1773 (Probl. XII.)" mittels Integration endlicher Differentialgleichungen gegeben. *J. Trembley* hat sie im 10ten Hefte des *Hindenburg*schen Archivs der reinen und angewandten Mathem. (1799) mittels der Methode der wiederkehrenden Reihen entwickelt. So viel Aufwand des höhern Calculs scheint nicht nöthig, um einen so einfachen Fall aus der Combinationslehre zu ermitteln. Die Gleichungen dieses Paragraphs sind hier hauptsächlich deshalb mitgetheilt, um eine Entwicklung zu geben, die uns bei den nachfolgenden schwierigern Fällen Dienste leisten wird.

§. 27.

In einer Urne befinden sich *n* Kugeln, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... *n* bezeichnet. *m* Kugeln, deren Zeichen in der Reihe der Zahlen folgen, werden besonders beachtet. Man zieht *p* Kugeln einzeln heraus und legt jedesmal die gezogene Kugel in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von den *m* gesonderten Kugeln *k* Kugeln (wenigstens) hinter einander erscheinen werden, welche die Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen haben?

Die Zahl der günstigen Fälle kommt mit folgender Gruppen-Anzahl überein.

Es werden die Versetzungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $p$ten Classe gebildet und darunter m Elemente, deren Stellenzahlen nach der Reihe der Zahlen folgen, besonders beachtet. Wie grofs ist die Anzahl der Gruppen, in welchen wenigstens k Elemente in der natürlichen Reihe der Stellenzahlen erscheinen?

Diejenigen Gruppen, welche der Frage genügen, sind, wenn die Elemente, welche die ersten m Stellenzahlen haben, beachtet werden, folgende:

$$1.\quad \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_k \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{k+1} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-k+1} & a_{m-k+2} & \cdots & & a_m \end{array} = G$$

Ihre Zahl ist $m-k+1$, wie sich leicht zeigt. Das Vorkommen sämmtlicher auflösenden Gruppen soll durch G_1 bezeichnet werden *).

Der vorliegenden Frage wird genügt, wenn eine der in (1.) angegebenen Gruppen in k Ziehungen gerade von der ersten, oder gerade von der zweiten u. s. w., oder gerade von der $(p-k+1)$ten Ziehung an erscheint, ohne dafs selbst eine der auflösenden Gruppen in den frühern Ziehungen erschienen wäre. Diese Bedingung kann der Natur der Sache nach von der $(k+1)$ten Ziehung an eintreten. Von hier an mufs sie in den Calcul aufgenommen werden. Zählt man nun die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $p$ten Classe nach einer Richtung hin (etwa von der Linken zur Rechten), so können mit Rücksicht auf (1.) folgende Fälle eintreten:

a. Eine der dort genannten Gruppen erscheint von der *ersten* Stelle an. Die Zahl dieser Gruppen ist $m-k+1$. Jeder einzelnen Gruppe kann jede beliebige Anordnung von n Elementen in den $p-k$ folgenden Stellen angereiht werden. Die Zahl der nachfolgenden Gruppen ist n^p. Die Zahl der hiedurch bedingten günstigen Fälle ist

$$A_1 = (m-k+1)n^{n-k}.$$

*) Die nämlichen Schlüsse gelten, wenn m andere Elemente, deren Stellenzahlen die genannte Ordnung haben, herausgehoben werden; sie gelten sogar noch dann, wenn m Elemente ausgewählt werden, deren Stellenzahlen einander in ganz beliebiger Ordnung folgen.

b. Eine der unter (1.) angegebenen Gruppen erscheint gerade von der *zweiten* Stelle an. Dies erfordert die Bedingung, dafs keiner auflösenden Gruppe ein Element an der ersten Stelle vorhergehen darf, dessen Stellenzahl um die Einheit niedriger ist, als die des Anfangs-Elements. Geschähe dies, so wäre dadurch eine Gruppe gezählt, die unter den in (*a*) gezählten mitbegriffen ist. Die hiedurch bedingte Gruppen-Anzahl ist in folgendem Ausdruck enthalten:

$$\begin{array}{c|c|c|

welches die um eine Einheit niedrigere Stellenzahl hat. Geschähe dies, so würde eine Gruppe, die schon unter (6.) gezählt ist, noch einmal gezählt. An der ersten Stelle kann jedes Element ohne Unterschied erscheinen. Behält man die in (6.) angenommene Bezeichnung bei, so ergeben sich folgende Gruppen:

$$\boldsymbol{P}(a_1, a_n)^1 \boldsymbol{\Sigma P} = \boldsymbol{P}(a_1, a_n)^1 [\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^1 \boldsymbol{G}_1 - \boldsymbol{S}_1].$$

Ihre Anzahl ist

$$n[n(m-k+1)-(m-k)].$$

Jede beliebige Zusammenstellung aus n Elementen kann diesen Gruppen an den $p-k-2$ spätern Stellen folgen. Die Zahl der dadurch bedingten günstigen Fälle ist

$$A_3 = (m-k+1)n^{p-k} - (m-k)n^{p-k-1}.$$

d. Erscheint eine der unter (1.) genannten Gruppen gerade von der *vierten* Stelle an, so giebt die Anwendung der bisher gemachten Bemerkungen folgende Gruppen-Anzahl:

$$\begin{aligned} A_3 &= \boldsymbol{P}'[a_1, a_n]^2 [\boldsymbol{P}'[a_1, a_n]^1 \boldsymbol{G}_1 - \boldsymbol{S}_1] \boldsymbol{P}'[a_1, a_n]^{p-k-3} \\ &= (m-k+1)n^{p-k} - (m-k)n^{p-k-1}. \end{aligned}$$

Die auflösenden Gruppen können bis auf die $(p-k+1)$te Stelle fortrücken.

Wird diese Betrachtungsweise fortgesetzt, so ergiebt sich für die Anzahl der günstigen Fälle, von der $(p-k+1)$ten Stelle an:

$$\begin{aligned} A_{p-k+1} &= \boldsymbol{P}'[a_1, a_n]^{p-k-1} [\boldsymbol{P}'[a_1, a_n]^1 \boldsymbol{G}_1 - \boldsymbol{S}_1] \\ &= (m-k+1)n^{p-k} - (m-k)n^{p-k-1}. \end{aligned}$$

Die Summirung der unter $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{p-k+1}$ gefundenen Anzahlen giebt folgenden Ausdruck:

$$2. \qquad B = (p-k+1)(m-k+1)n^{p-k} - (p-k)(m-k)n^{p-k-1}.$$

Die Schlufsweise ist, wie schon oben bemerkt, so lange richtig, bis das Anfangs-Element einer der auflösenden Gruppen die $(k+1)$te Stelle, oder eine spätere erreicht. In diesem Falle können an den vorhergehenden Stellen Gruppen erscheinen, die unter den in (2.) aufgeführten mitbegriffen sind. Ihre Anzahl mufs gesucht und ausgeschieden werden. Bei der Zählung dieser Gruppen kommt die in (*a*, *b*, *c*, *d* u. s. w.) aufgestellte Behandlungsart selbst wieder zur Anwendung und erleichtert die Rechnung. Es ergiebt sich für die Aufsuchung der fraglichen Gruppen folgendes Schema:

$$
\begin{aligned}
3.\quad & \boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{k-1}(\Sigma \boldsymbol{P})\,\boldsymbol{P}'(a, a_n)^{p-2k} \\
& + \boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{k}(\Sigma \boldsymbol{P})\,\boldsymbol{P}(a, a_n)^{p-2k-1} \ldots . \boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{p-k-1}(\Sigma \boldsymbol{P}) \\
& = [\boldsymbol{P}(a_1, a_n)^{k}\ \boldsymbol{G}_1 - \boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{k-1}\boldsymbol{S}_1]\,\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{p-2k} \\
& + [\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{k+1}\boldsymbol{G}_1 - \boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{k}\ \boldsymbol{S}_1]\,\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{p-2k-1} \\
& + [\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{k+2}\boldsymbol{G}_1 - \boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{k+1}\boldsymbol{S}_1]\,\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{p-2k-2} \\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& + [\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{p-k}\,\boldsymbol{G} - \boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{p-k-1}\boldsymbol{S}_1]\,\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{0}.
\end{aligned}
$$

Die Ausdrücke $\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{k}$, $\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{k+1}$, ... $\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{p-k}$ rechts des Gleichheitszeichens in (3.) unterliegen der bisher aufgestellten Behandlungsart. Folgende Fälle sind daher zu untersuchen.

e. Die Zahl der Gruppen, welche wegen des ersten Ausdrucks $\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{k}\boldsymbol{G}$ (in der ersten verticalen Reihe) ausgeschieden werden müssen, ergiebt sich aus (2.), wenn man $p = k$ setzt. Auf jede dieser Gruppen können n Elemente in jeder beliebigen Ordnung an $p - 2k$ spätern Stellen folgen. Die Anzahl der hiedurch bedingten Gruppen ist

$$\boldsymbol{B}_1 = 1 \cdot (m - k + 1)(m - k + 1) \cdot n^{p-2k}.$$

f. Die Zahl der Gruppen, welche wegen $\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{k+1}$ (im zweiten Ausdrucke der ersten Verticalreihe) ausgeschieden werden müssen, ergiebt sich, wenn die in (*a* und *b*) gemachten Bemerkungen gleichzeitig angewendet werden, oder, was dasselbe ist, wenn in (2.) $k+1$ statt p gesetzt wird. Verbindet man den hiedurch entstehenden Ausdruck mit $\boldsymbol{G}_1$ und mit der Zahl der Gruppen, welche an den $p - 2k - 1$ spätern Stellen folgen können, so ist die auszuscheidende Gruppen-Anzahl

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_2 &= [2(m - k + 1)n - 1 \cdot (m - k)](m - k + 1)n^{p-2k-1} \\
&= 2(m - k + 1)(m - k + 1)n^{p-2k} - 1(m - k + 1)(m - k)n^{p-2k-1}.
\end{aligned}
$$

g. Behandelt man $\boldsymbol{P}'(a_1, a_n)^{k+2}$ (im dritten Ausdrucke der ersten Verticalreihe) auf gleiche Weise, so erhält man folgende Zahl auszuscheidender Gruppen:

$$\boldsymbol{B}_3 = 3(m - k + 1)(m - k + 1)n^{p-2k} - 2(m - k + 1)(m - k)n^{p-2k-1}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so giebt der letzte Ausdruck in der ersten Verticalreihe für die Zahl der auszuscheidenden Gruppen:

$$\boldsymbol{B}_{p-2k+1} = (p - 2k + 1)(m - k + 1)(m - k + 1)n^{p-2k} - (p - 2k)(m - k + 1)(m - k)n^{p-2k-1}.$$

Die Ausdrücke $B_1, B_2, B_3, \ldots B_{p-2k+1}$ lassen sich summiren. Ihre Summirung giebt folgenden Ausdruck:

$$B_s = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)^2 n^{p-2k} - \frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1}.$$

Die Bemerkungen in (e, f, g u. s. w.) lassen sich für die Ausdrücke in der zweiten Verticalreihe in (3.) vom zweiten Gliede an wiederholen. Es ist daher k, $k+1$, $k+2$, $\ldots . p-k-1$ statt p in (2.) zu setzen und jeder dadurch erhaltene Ausdruck wegen S_1 mit $m-k$ und ferner mit der ergänzenden Potenz zu multipliciren. Die daraus sich ergebende Reihe ist um ein Glied kürzer, als die eben gefundene. Es ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} B_{s-1} = -[\ & 1\cdot(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1} \\ & +2(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1} - 1(m-k)(m-k)n^{p-2k-2} \\ & +3(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1} - 2(m-k)(m-k)n^{p-2k-2} \\ & +4(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1} - 3(m-k)(m-k)n^{p-2k-2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +(p-2k)(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1} - (p-2k-1)(m-k)(m-k)n^{p-2k-2}] \\ = -\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1)(m-k)n^{p-2k-1} & + \frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)(m-k)n^{p-2k-2}. \end{aligned}$$

In der zweiten verticalen Reihe von (3.) deutet S_1 auf Gruppen von der $(k+1)$ten Dimension. Durch den Vortritt von den Versetzungen zur $(k-1)$ten Classe können Gruppen entstehen, die sich bis zur $(2k)$ten Dimension erheben, die sich dadurch als ein Ganzes characterisiren und die besondere Ausscheidungen erfordern. Dadurch wird eine weitere Reihe von Ausscheidungen nöthig, welche durch folgende Zusammenstellung angedeutet werden soll:

4. $$\begin{aligned} & P'(a_1, a_n)^{k-1} S_1 \cdot P'(a_1, a_n)^{p-2k} \\ & +P'(a_1, a_n)^1 \cdot P'(a_1, a_n)^{k-1} S_1 \cdot P'(a_1, a_n)^{p-2k-1} \\ & +P'(a_1, a_n)^2 \cdot P'(a_1, a_n)^{k-1} S_1 \cdot P'(a_1, a_n)^{p-2k-2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +P'(a_1, a_n)^{p-2k} \cdot P'(a_1, a_n)^{k-1} S_1 \cdot P'(a_1, a_n)^0. \end{aligned}$$

h. Die Anzahl der Gruppen, deren Ausscheidung der in allen Gliedern der vorliegenden Darstellung vorkommende Ausdruck

$$P'(a_1, a_n)^{k-1} S_1$$

verlangt, ergiebt sich, wenn diejenigen Gruppen in $P'(a_1, a_2, \ldots . a_n)^{k-1}$ aufgezählt werden, welche $k-1$ Elemente von den in Betracht kommenden m Elementen enthalten, deren Stellenzahlen in der Reihenfolge der gewöhnlichen

Zahlen erscheinen und welche die Eigenschaft haben, mit der Stellenzahl des Anfangs-Elementes der nachfolgenden in S_1 enthaltenen Gruppen eine Gruppe von k Elementen nach der Ordnung der gewöhnlichen Zahlen zu bilden. Die Gruppen, auf welche diese Entwicklung führt, sind folgende:

$$\begin{array}{l}
a_1 a_2 a_3 \cdots a_{k-1} \,|\, a_k \,|\, a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_{2k} \\
a_2 a_3 a_4 \cdots a_k \,|\, a_{k+1} \,|\, a_{k+2} a_{k+3} \cdots a_{2k+1} \\
a_3 a_4 a_5 \cdots a_{k+1} \,|\, a_{k+2} \,|\, a_{k+3} a_{k+4} \cdots a_{2k+2} \\
\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
a_{m-2k+1} \cdots a_{m-k+1} \,|\, a_{m-k} \,|\, a_{m-k+1} \cdots a_m .
\end{array}$$

Ihre Zahl, die durch G_2 bezeichnet werden soll, ist $m-2k+1$. In Rücksicht auf die Zahl der nachfolgenden Gruppen ergiebt sich folgende Anzahl auszuscheidender Gruppen:

$$C_1 = (m-2k+1)n^{p-2k}.$$

i. Der zweite Ausdruck in (4.) erfordert wegen $P'(a_1, a_n)^{k-1} S_1$ die nemliche Behandlung, wie in (*h*). Dabei ist, wie in (*b*) bemerkt, die unerläfsliche Bedingung, dafs keiner Gruppe ein Element, dessen Stellenzahl um eine Einheit kleiner ist als die des Anfangs-Elements der Gruppe, in der ersten Stelle vorkommen darf, weil dieser Fall schon in (*h*) begriffen ist. Es mufs daher eine ähnliche Unterscheidung wie in (*b*) gemacht werden. Dabei ist jedoch zu bemerken, dafs nur $m-2k$ Elemente in Betracht kommen. Es findet sich folgender Ausdruck:

$$\left|\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{array}\right| \left|\begin{array}{r} a_1 a_2 \cdots a_{2k} + a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_n \end{array}\right| \left|\begin{array}{r} a_2 a_3 \cdots a_{2k+1} + a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_n \end{array}\right| \left|\begin{array}{r} a_3 a_4 \cdots a_{2k+2} \cdots a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-2k-1} \\ a_{m-2k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{array}\right| a_{m-2k+1} \cdots a_m = \Sigma Q.$$

Auch dieser Ausdruck kann vereinfacht werden, wenn man alle Elemente ohne Unterschied vor jede Gruppe treten läfst, und diejenigen abzieht, in welchen das Element mit der nächst niedrigeren Stellenzahl dem Anfangs-Elemente vorgeht. Hiedurch geht der obige Ausdruck in folgenden über:

$$\begin{array}{rl}
\Sigma Q = P'(a_1, a_2, \cdots a_n)^1 G_2 & - a_1 \,|\, a_2 a_3 \cdots a_{2k+1}, \\
& - a_2 \,|\, a_3 a_4 \cdots a_{2k+2}, \\
& - a_3 \,|\, a_4 a_5 \cdots a_{2k+3}, \\
& \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
& - a_{m-2k} \,|\, a_{m-2k+1} \cdots a_m .
\end{array}$$

Bezeichnet man die abzuziehenden Gruppen, welche der $(2k+1)$ten Dimension angehören, durch S_2, und bemerkt, dafs ihre Zahl $m-2k$ ist, so ergiebt sich

$$\Sigma Q = P'[a_1, a_2, \cdots a_n]^1 G_2 - S_2 = n(m-2k+1) - (m-2k).$$

In Rücksicht auf die begleitenden Gruppen an den $p-2k-1$ nachfolgenden Stellen ist

$$C_2 = (m-2k+1)n^{p-2k} - (m-2k)n^{p-2k-1}.$$

Die Art, wie nun die folgenden Ausdrücke in (4.) behandelt werden müssen, ist in (*i*) angegeben und bleibt dieselbe. Man erhält für die Zahl der Gruppen, welche wegen des dritten Ausdrucks auszuscheiden sind:

$$C_3 = (m-2k+1)n^{p-2k} - (m-2k)n^{p-2k-1}.$$

Wird dies fortgesetzt, so ergiebt sich für den letzten Fall:

$$C_{p-2k+1} = n^{p-2k}[G_2 - S_2] = (m-2k+1)n^{p-2k} - (m-2k)n^{p-2k-1}.$$

Die Summirung der Werthe von C_1, C_2, C_3, ... C_{p-2k+1} giebt folgenden Ausdruck:

$$-B_{s+1} = -(p-2k+1)(m-2k+1)n^{p-2k} + (p-2k)(m-2k)n^{p-2k-1}.$$

Die Vereinigung von $B_s - B_{s-1} - B_{s+1}$ aber giebt für die Gesammtzahl aller auszuscheidenden Gruppen:

$$5.\quad C = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)^2 n^{p-2k} - 2\cdot\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-k)n^{p-2k-1}$$
$$+\frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)^2 n^{p-2k-2} - [(p-2k+1)(m-2k+1)n^{p-2k}$$
$$-(p-2k)(m-2k)n^{p-2k-1}].$$

Ihrer Entstehung zufolge läfst sich die vorstehende Formel auf folgende Weise ausdrücken:

$$6.\quad C = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} G_1 G_1 n^{p-2k} - \frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}\begin{vmatrix} G_1 & S_1 \\ S_1 & G_1 \end{vmatrix} n^{p-2k-1}$$
$$+\frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}} S_1 S_1 n^{p-2k-2} - [(p-2k+1)G_2 n^{p-2k} - (p-2k)S_2 n^{p-2k-1}].$$

Die der Gleichung (5.) zu Grunde liegende Formel ist so lange richtig, als eine der auflösenden Gruppen von der $(2k+1)$ten, oder von einer spätern Stelle an erscheint. In diesem Falle können an den $2k$, $2k+1$, $2k+2$, ... $p-2k$ vorhergehenden Stellen Gruppen erscheinen, welche der oben aufgestellten Bedingung genügen. Sie sind anzugeben und auszuscheiden. Bei Ermittlung dieser Gruppen kann die Gleichung (5.) selbst wieder benutzt werden. Dies

giebt folgendes Schema:

$$
\begin{aligned}
7.\quad & [P'(a_1, a_n)^{2k} G_1 - P'(a_1, a_n)^{2k-1} S_1] P'(a_1, a_n)^{p-3k} \\
& [P'(a_1, a_n)^{2k+1} G_1 - P'(a_1, a_n)^{2k} S_1] P'(a_1, a_n)^{p-3k-1} \\
& [P'(a_1, a_n)^{2k+2} G_1 - P'(a_1, a_n)^{2k+1} S_1] P'(a_1, a_n)^{p-3k-2}. \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& [P'(a_1, a_n)^{p-2k} G_1 - P'(a_1, a_n)^{p-2k-1} S_1] P'(a_1, a_n)^{0}.
\end{aligned}
$$

Alle Ausdrücke der ersten verticalen Reihe sind nach (5.) zu behandeln, indem man allmälig $2k$, $2k+1$, $2k+2$, ... $p-2k$ statt p setzt, die angezeigten Gruppen-Anzahlen angiebt und die Resultate summirt. Die Ausführung der angedeuteten Rechnung giebt

$$
\begin{aligned}
D_s = {} & \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}} (m-k+1)^3 n^{p-3k} - 2 \cdot \frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}} (m-k+1)^2 (m-k) n^{p-3k-1} \\
& + \frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}} (m-k+1)(m-k)^2 n^{p-3k-2} - \Big[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} (m-k+1)(m-2k+1) n^{p-2k} \\
& - \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}} (m-k+1)(m-2k) n^{p-2k-1} \Big].
\end{aligned}
$$

Alle Ausdrücke der zweiten verticalen Reihe, vom zweiten an, sind ganz auf dieselbe Weise zu behandeln. Dadurch entsteht eine Reihe, die um ein Glied kürzer ist; denn es sind die Werthe $2k$, $2k+1$, $2k+2$, ... $p-2k-1$ statt p einzuführen, die Gruppen-Anzahlen anzugeben und zu summiren. Dieses giebt

$$
\begin{aligned}
-D_{s-1} = {} & - \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{3|1}} (m-k+1)^2 (m-k) n^{p-3k-1} \\
& + 2 \cdot \frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}} (m-k+1)(m-k)^2 n^{p-3k-2} - \frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}} (m-k)^3 n^{p-3k-3} \\
& + \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}} (m-k)(m-2k+1) n^{p-3k-1} - \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}} (m-k)(m-2k) n^{p-3k-2}.
\end{aligned}
$$

Aufser dieser Behandlungsart giebt es noch für sämmtliche Glieder der zweiten verticalen Reihe eine zweite. Durch den Vortritt von $P(a_1, a_n)^{k-1}$ vor S_1 entstehen Gruppen, die, in Verbindung mit den in S_1 begriffenen Gruppen, zur Dimension $2k$ sich erheben und dadurch Gruppen von der Form G_2 bilden, deren Natur in (h und i) erörtert wurde. Dies giebt den Ausdruck

$$
\begin{aligned}
8.\quad & -[P'(a_1, a_n)^{k} G_2 - P'(a_1, a_n)^{k-1} S_2] P'(a_1, a_n)^{p-3k} \\
& -[P'(a_1, a_n)^{k+1} G_1 - P'(a_1, a_n)^{k} S_2] P'(a_1, a_n)^{p-3k-1} \\
& -[P'(a_1, a_n)^{k+2} G_2 - P'(a_1, a_n)^{k+1} S_2] P'(a_1, a_n)^{p-3k-2} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& -[P'(a_1, a_n)^{p-2k} G_2 - P'(a_1, a_n)^{p-2k-1} S_2] P'(a_1, a_n)^{0}.
\end{aligned}
$$

Die Schlüsse (*e*, *f* u. s. w.) sind, wie leicht zu sehen, auf sämmtliche Glieder der ersten Reihe, so wie auf die der zweiten Reihe, vom zweiten Gliede an, anwendbar; die Resultate sind mit den begleitenden Gruppen-Anzahlen zu verbinden und dann zu summiren. Dann ist in (2.) der Reihe nach $p = k, k+1, k+2, \ldots (p-2k)$, darauf $= k, k+1, k+2, \ldots (p-2k-1)$ zu setzen und die für die erste Reihe sich ergebenden Ausdrücke sind mit $m-2k+1$, die für die zweite sich ergebenden mit $m-2k$ und mit den ergänzenden Gruppen-Anzahlen zu verbinden. Die erste verticale Reihe in (8.) führt zu folgendem Ausdrucke:

$$-D_{s+1} = -\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)(m-2k+1)n^{p-3k} + \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)(m-2k+1)n^{p-3k-1},$$

die zweite zu folgendem:

$$D_{s+2} = \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-2k)n^{p-3k-1} - \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)(m-2k)n^{p-3k-2}.$$

Die zweite verticale Reihe in (8.) gestattet noch eine zweite Behandlungs-Art. Durch den Vortritt von den in $P'(a_1, a_n)^{k-1}$ angezeigten Gruppen vor S_2 entstehen Gruppen, welche durch Anreihung des Schlufs- und Anfangs-Elements sich zur Dimension $3k$ erheben. Sie characterisiren sich als Ganzes von der nachstehenden Form und Anzahl:

$$\begin{array}{l}
a_1\, a_2 \cdots a_{k-1} \mid a_k \mid a_{k+1} \cdots a_{3k} \\
a_2\, a_3 \cdots a_k \mid a_{k+1} \mid a_{k+2} \cdots a_{3k+1} \\
a_3\, a_4 \cdots a_{k+1} \mid a_{k+2} \mid a_{k+3} \cdots a_{3k+2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m-3k+1} \cdots a_{m-3k-1} \mid a_{m-3k} \mid a_{m-3k+1} \cdots a_m.
\end{array}$$

Sie sollen durch G_3 bezeichnet werden. Ihre Anzahl ist $m-3k+1$. Die Berechnung ihrer Anzahl erfordert die Behandlungs-Art, welche in (*b* und *i*) vorkam. Dadurch entstehen Gruppen von den Dimensionen $3k$ und $3k+1$, die durch G_3 und S_3 bezeichnet werden sollen. Sie sind in folgendem Schema enthalten:

9.
$$\begin{array}{l}
G_3 P(a, a_2, \cdots a_n)^{p-3k} \\
[P'(a_1, a_n)^1 G_3 - S_3] P'(a_1, a_n)^{p-3k-1} \\
[P'(a_1, a_n)^2 G_3 - P'(a_1, a_n)^1 S_3] P'(a_1, a_n)^{p-3k-2} \\
[P'(a_1, a_n)^3 G_3 - P'(a_1, a_n)^2 S_3] P'(a_1, a_n)^{p-3k-3} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[P'(a_1, a_n)^{p-3} G_3 - P'(a_1, a_n)^{p-3k-1} S_3] P'(a_1, a_n)^0.
\end{array}$$

Die erste verticale Reihe hat $p-3k+1$ Glieder. Jedes giebt, mit Rücksicht auf die dasselbe begleitende Gruppen-Anzahl, $(m-3k+1)n^{p-3k}$. Ihre Summe ist daher

$$D_{s+3} = (p-3k+1)(m-3k+1)^{p-3k}.$$

Die zweite verticale Reihe hat nur $p-3k$ Glieder. Jedes Glied hat Gruppen von der $(3k+1)$ten Dimension. Form und Anzahl dieser Gruppen ist

$$\begin{aligned} S_3 = a_1 \,|\, a_2\, a_3 \,\cdots\, a_{3k+1} &= m-3k. \\ a_2 \,|\, a_3\, a_4 \,\cdots\, a_{3k+2} & \\ a_3 \,|\, a_4\, a_5 \,\cdots\, a_{3k+3} & \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\ a_{m-3k} \,|\, a_{m-3k+1} \,\cdots\, a_m & \end{aligned}$$

Werden die begleitenden Gruppen-Anzahlen berücksichtigt, so giebt jedes Glied $(m-3k)n^{p-3k-1}$. Hieraus ergiebt sich die Summe

$$-D_{s+4} = -(p-3k)(m-3k)n^{p-3k-1}.$$

Werden nun die Werthe D_s, D_{s-1}, D_{s+1}, D_{s+2}, D_{s+3}, D_{s+4} zusammengezählt, so findet sich, nach gehöriger Anordnung, folgende von (5.) auszuscheidende Anzahl von Gruppen:

$$\begin{aligned} 10.\quad D = {} & \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)^3 n^{p-3k} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)(m-k)n^{p-3k-1} \\ & + 3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)(m+k)^2 n^{p-3k-2} - \frac{(p-3k-2)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)^3 n^{p-3k-3} \\ & - 2\Big[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-2k+1)n^{p-3k} - \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}\begin{vmatrix}(m-k+1)(m-2k)\\(m-k)(m-2k+1)\end{vmatrix} n^{p-3k-1} \\ & \qquad + \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)(m-2k)n^{p-3k-2}\Big] \\ & + (p-3k+1)(m-3k+1)n^{p-3k} - (p-3k)(m-3k)n^{p-3k-1}. \end{aligned}$$

In Rücksicht auf die Entstehung dieses Ausdrucks ergiebt sich folgendes Schema:

$$\begin{aligned} 11.\quad D = {} & \Big[\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}G_1G_1G_1 n^3 - \frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}\begin{vmatrix}G_1G_1S_1\\G_1S_1G_1\\S_1G_1G_1\end{vmatrix} n^2 + \frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}}\begin{vmatrix}G_1S_1S_1\\S_1G_1S_1\\S_1S_1G_1\end{vmatrix} n \\ & \qquad - \frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}}S_1S_1S_1\Big] n^{p-3k-3} \\ & - \Big[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\begin{vmatrix}G_1G_2\\G_2G_1\end{vmatrix} n^2 - \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}\begin{vmatrix}G_1S_2\\S_2G_1\\\hline S_1G_2\\G_2S_1\end{vmatrix} n + \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}\begin{vmatrix}S_1S_2\\S_2S_1\end{vmatrix}\Big] n^{p-3k-2} \\ & + \Big[\frac{(p-3k+1)^{1|1}}{1^{1|1}}G_3 n - \frac{(p-3k)^{1|1}}{1^{1|1}}S_3\Big] n^{p-3k-1}. \end{aligned}$$

Die bisher befolgte Schlufsweise ist so lange richtig, bis eine der auflösenden Gruppen in die $(3k+1)$te oder in eine spätere Stelle gerückt ist. Von da an sind neuerdings Ausscheidungen nöthig. Die Zahl der auszuscheidenden Gruppen ergiebt sich, wenn man zuerst die Formel (10.), dann die Formel (5.) und endlich die Formel (2.) wiederholt anwendet. Im ersten Falle treten die Gebilde G_1 und S_1, im zweiten G_2 und S_2, im dritten G_3 und S_3 auf. Aufserdem treten endlich Gebilde von der Form G_4 und S_4 auf. Dabei ist zu merken, dafs $G_4 = n-4k+1$ und $S_4 = n-4k$ gesetzt werden mufs. Die Bedeutung von G_1, G_2, G_3; S_1, S_2, S_3 ist aus dem Frühern bekannt. Das Schema, welches sich aus diesen Bemerkungen für die Anzahl der auszuscheidenden Gruppen ergiebt, ist:

12. $$E =$$

$$\left[\frac{(p-4k+1)^{4|1}}{1^{4|1}} G_1G_1G_1G_1 n^4 - \frac{(p-4k)^{4|1}}{1^{4|1}} \begin{vmatrix} G_1G_1G_1S_1 \\ G_1G_1S_1G_1 \\ G_1S_1G_1G_1 \\ S_1G_1G_1G_1 \end{vmatrix} n^3 + \frac{(p-4k-1)^{4|1}}{1^{4|1}} \begin{vmatrix} G_1G_1S_1S_1 \\ G_1S_1G_1S_1 \\ S_1G_1G_1S_1 \\ G_1S_1S_1G_1 \\ S_1G_1S_1G_1 \\ S_1S_1G_1G_1 \end{vmatrix} n^2 \right.$$
$$\left. - \frac{(p-4k-2)^{4|1}}{1^{4|1}} \begin{vmatrix} G_1S_1S_1S_1 \\ S_1G_1S_1S_1 \\ S_1S_1G_1S_1 \\ S_1S_1S_1G_1 \end{vmatrix} n + \frac{(p-4k-3)^{4|1}}{1^{4|1}} S_1S_1S_1S_1 \right] n^{p-4k-4}$$

$$- \left[\frac{(p-4k+1)^{3|1}}{1^{3|1}} \begin{vmatrix} G_1G_1G_2 \\ G_1G_2G_1 \\ G_2G_1G_1 \end{vmatrix} n^3 - \frac{(p-4k)^{3|1}}{1^{3|1}} \begin{vmatrix} G_1G_1S_2 \\ G_1S_2G_1 \\ S_2G_1G_1 \\ \hline G_1S_1G_2 \\ S_1G_1G_2 \\ G_1G_2S_1 \\ \hline S_1G_1G_2 \\ G_1S_1G_2 \\ G_1G_2S_1 \end{vmatrix} n^2 + \frac{(p-4k-1)^{3|1}}{1^{3|1}} \begin{vmatrix} G_1S_1S_2 \\ S_1G_1S_2 \\ S_1S_2G_1 \\ \hline S_1G_1S_2 \\ S_1S_2G_1 \\ S_2S_1G_1 \\ \hline S_1S_1G_2 \\ S_1G_2S_1 \\ G_2S_1S_1 \end{vmatrix} n - \frac{(p-4k-2)^{3|1}}{1^{3|1}} \begin{vmatrix} S_1S_1S_2 \\ S_1S_2S_1 \\ S_2S_1S_1 \end{vmatrix} \right] n^{p-4k-3}$$

$$+ \left[\frac{(p-4k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} \begin{vmatrix} G_1G \\ G_3G_1 \\ \hline G_2G_2 \end{vmatrix} n^2 - \frac{(p-4k)^{2|1}}{1^{2|1}} \begin{vmatrix} G_1S_3 \\ S_3G_1 \\ \hline S_1G_3 \\ G_3S_1 \\ \hline G_2S_2 \\ S_2G_2 \end{vmatrix} n + \frac{(p-4k-1)^{2|1}}{1^{2|1}} \begin{vmatrix} S_1S_3 \\ S_3S_1 \\ \hline S_2S_2 \end{vmatrix} \right] n^{p-4k-2}$$

$$- [(p-4k+1)G_4 n - (p-4k)S_4] n^{p-4k-1}.$$

Das allgemeine Gesetz für die Entwicklung von $B, C, D, E, \ldots$ läfst sich aus (12. 11. 6. und 2.) erkennen und auf folgende Art darstellen. Die Symbole $G_1, G_2, G_3, \ldots$ deuten auf Gruppen von den Dimensionen k, $2k$, $3k$, $4k$, ...; $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ deuten auf Gruppen von den Dimensionen $k+1$, $2k+1$, $3k+1$, $4k+1$, ... Jene deuten ferner auf die Zahlen $m-k+1$, $m-2k+1$, $m-3k+1$, ..., diese auf $m-k$, $m-2k$, $m-3k$, ... Betrachten wir nun die Gebilde von E, so zeigt sich, dafs in ihnen die Stellenzahlen von G_1, G_2, G_3, G_4; S_1, S_2, S_3, S_4 immer die Summe 4 geben; und zwar in der ersten Horizontalreihe zur vierten, in der zweiten zur dritten, in der dritten zur zweiten, in der letzten zur ersten Classe. Betrachten wir die Glieder von E in verticaler Richtung, so sehen wir in denen der ersten verticalen Reihe nur die Gröfsen G_1, G_2, G_3, G_4; in denen der zweiten Reihe eine von den Gröfsen S_1, S_2, S_3, S_4; in denen der dritten Reihe zwei; in denen der vierten Reihe drei; in denen der fünften Reihe vier. Dabei durchlaufen die Gröfsen S_1, S_2, S_3, S_4 alle möglichen Stellen, Zerstreuungen in Fächer bildend. Für jede einzelne Stellung, welche die Gröfsen S_1, S_2, S_3, S_4 unter den Gröfsen G_1, G_2, G_3, G_4 einnehmen, ergeben sich noch insbesondere die Versetzungen sämmtlicher Gröfsen, die sie nach den Stellenzahlen eingehen können. Das Gesetz des Zeichenwechsels in jeder horizontalen Reihe, so wie in den horizontalen Reihen unter sich, zeigt sich deutlich; eben so das der begleitenden Facultäten und Potenzen. Dies läfst sich leicht verallgemeinern. Bezeichnen wir, was nach dem Bildungsgesetze der Zerstreuungen in Fächer und der gleichzeitigen Versetzungen an den Gröfsen G_1, G_2, G_3, G_4; S_1, S_2, S_3, S_4 vorgenommen werden soll, in diesem besondern Falle durch D, so ergiebt sich folgende allgemeine Form für das $r$te Glied:

13. $$R =$$

$$\left[\frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}} D G_1^r n^r - \frac{(p-rk)^{r|1}}{1^{r|1}} D(G_1^{r-1} S_1) n^{r-1} + \ldots .\right.$$

$$\left. \ldots . (-1)^{r-1} \frac{(p-(k+1)r+2)^{r|1}}{1^{r|1}} D(G_1 S_1^{r-1}) n (-1)^r \frac{(p-(k+1)r+1)^{r|1}}{1^{r|1}} D S_1^r \right] n^{p-(k+1)r}$$

$$- \left[\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} D(G_1^{r-2} G_2) n^{r-1} - \frac{(p-rk)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} D(G_1^{r-2} S_2) n^{r-2} + \ldots .\right.$$

$$\left. \ldots . (-1)^{r-1} \frac{(p-(k+1)r+2)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} D(S_1^{r-2} S_2) \right] n^{p-(k+1)r+1}$$

$$+\left[\frac{(p-rk+1)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}\begin{vmatrix} D(G_1^{r-3}G_3) \\ D(G_1^{r-4}G_2G_2)\end{vmatrix} n^{r-2} - \frac{(p-rk)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}\begin{vmatrix} D(G_1^{r-3}S_3) \\ D(G_1^{r-4}G_2S_2)\end{vmatrix} n^{r-3} + \ldots .\right.$$

$$\left. \ldots . (-1)^{r-2}\frac{(p-(k+1)r+3)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}\begin{vmatrix} D(S_1^{r-3}S_3) \\ D(S^{r-4}S_2S_2)\end{vmatrix}\right] n^{p-(k+1)r+2}$$

. . . . . .

$$(-1)^{r-2}\left[\frac{(p-rk+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\begin{vmatrix} D(G_1G_{r-1}) \\ D(G_2G_{r-2}) \\ \ldots\ldots \\ D(G_{\frac{1}{2}r}G_{\frac{1}{2}r})\end{vmatrix} n^2 - \frac{(p-rk)^{2|1}}{1^{2|1}}\begin{vmatrix} D(G_1S_{r-1}) \\ D(G_2S_{r-2}) \\ \ldots\ldots \\ D(G_{\frac{1}{2}r}S_{\frac{1}{2}r})\end{vmatrix} n + \frac{(p-rk-1)^{2|1}}{1^{2|1}}\begin{vmatrix} D(S_1S_{r-1}) \\ D(S_2S_{r-2}) \\ \ldots\ldots \\ D(S_{\frac{1}{2}r}S_{\frac{1}{2}r})\end{vmatrix}\right] n^{p-rk-2}$$

$$(-1)^{r-1}\left[\frac{(p-rk+1)^{1|1}}{1^{1|1}}DG_r n - \frac{(p-rk)^{1|1}}{1^{1|1}}DS_r\right] n^{p-rk-1}.$$

Die Schlufsglieder der zweitletzten Horizontalreihe gelten, wenn r eine gerade Zahl ist. Ist r eine ungerade Zahl, so haben sie folgende Form:

$$D(G_{\frac{1}{2}(r-1)}G_{\frac{1}{2}(r+1)}), \quad D(G_{\frac{1}{2}(r-1)}S_{\frac{1}{2}(r+1)}), \quad D(S_{\frac{1}{2}(r-1)}S_{\frac{1}{2}(r+1)}).$$

Hieraus ergiebt sich für die Gruppen-Anzahl, welche dem Ereignifs günstig ist:

$$14. \quad A = B - C + D - E + F - \ldots .$$

Man sieht, dafs sich die Rechnung, wenn auch in grofsen Kreisen, doch nach bestimmten Gesetzen bewegt und beliebig fortgesetzt werden kann. Die entwickelte Darstellung für die dem Ereignifs günstige Gruppen-Anzahl ist:

$$15. \quad A =$$

$$(p-k+1)(m-k+1)n^{p-k} - (p-k)(m-k)n^{p-k-1}$$

$$-\left[\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)^2n^2 - 2\cdot\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-k)n + \frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)^2\right]n^{p-2k-2}$$

$$+(p-2k+1)(m-2k+1)n^{p-2k} - (p-2k)(m-2k)n^{p-2k-1}$$

$$+\left[\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)^3n^3 - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)^2(m-k)n^2\right.$$

$$\left. +3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k+1)(m-k)^2n - \frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-k)^3\right]n^{p-3k-3}$$

$$-2\left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-2k+1)n^2 - \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}\begin{vmatrix}(m-k+1)(m-2k) \\ (m-k)(m-2k+1)\end{vmatrix}n\right.$$

$$\left. +\frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)(m-2k)\right]n^{p-3k-2}$$

$$+[(p-3k+1)(m-3k+1)n - (p-3k)(m-3k)]n^{p-3k-1}$$

. . . . . .

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn A durch die Zahl aller möglichen Gruppen dividirt wird. Sie ist

16. $$w = \frac{(p-k+1)(m-k+1)}{n^k} - \frac{(p-k)(m-k)}{n^{k+1}}$$
$$- \left[\frac{(p-2k+1)^{2|1}(m-k+1)^2}{1\cdot 2\cdot n^{2k}} - \frac{(p-2k)^{2|1}(m-k+1)(m-k)}{n^{2k+1}} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}(m-k)^2}{1\cdot 2\cdot n^{2k+2}}\right]$$
$$+ \frac{(p-2k+1)(m-2k+1)}{n^{2k}} - \frac{(p-2k)(m-2k)}{n^{2k+1}}$$
$$+ \left[\frac{(p-3k+1)^{3|1}(m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^{3k}} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}(m-k+1)(m-k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^{3k+1}} + 3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}(m-k+1)(m-k)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^{3k+2}}\right.$$
$$\left. - \frac{(p-3k-2)^{2|1}(m-k)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^{3k+3}}\right]$$
$$- \left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}(m-k+1)(m-2k+1)}{n^{3k}} - \frac{(p-3k)^{2|1}}{n^{3k+1}}\begin{vmatrix}(m-k+1)(m-2k)\\(m-k)(m-2k+1)\end{vmatrix} + \frac{(p-3k-1)^{2|1}(m-k)(m-2k)}{n^{3k+2}}\right]$$
$$+ \frac{(p-3k+1)(m-3k+1)}{n^{3k}} - \frac{(p-3k)(m-3k)}{n^{3k+1}}$$
. . . . . .

Aus den bis jetzt erhaltenen Resultaten lassen sich nun leicht weitere Folgerungen ziehen.

In einer Urne befinden sich m Kugeln, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnet. Man zieht p Kugeln einzeln heraus und legt jedesmal die gezogene Kugel in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs k Kugeln (wenigstens) hintereinander erscheinen werden, welche die Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen haben?

Die Zahl der günstigen Fälle ergiebt sich leicht, wenn man in (15.) m statt n setzt; denn es müssen hier alle Kugeln mitwirken, um der Aufgabe zu entsprechen. Wird daher in (16.) m statt n gesetzt, so findet sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

17. $$w = \frac{(p-k+1)(m-k+1)}{m^k} - \frac{(p-k)(m-k)}{m^{k+1}}$$
$$- \left[\frac{(p-2k+1)^{2|1}(m-k+1)^2}{1^{2|1}\cdot m^{2k}} - \frac{(p-2k)^{2|1}(m-k+1)(m-k)}{m^{2k+1}} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}(m-k)^2}{1\cdot 2\cdot m^{2k+2}}\right]$$
$$+ \frac{(p-2k+1)(m-2k+1)}{m^{2k}} - \frac{(p-2k)(m-2k)}{m^{2k+1}}$$
. . . . . .

Die Bedingungen sind dieselben wie zu Anfang dieses Paragraphs. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von den m gesonderten Kugeln k Kugeln, wenigstens r und höchstens s (also r, $r+1$, $r+2$, ... s) mal hintereinander in der Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen erscheinen werden?

Behalten wir die im vorigen Paragraph gewählte Bezeichnung bei, so ergiebt sich für die Anzahl der dem Unternehmen günstigen Fälle:

$$18. \quad A_k^{r,s} = A_k^r - A_k^{s+1},$$

wenn A_k^r die Zahl der Glieder vom $r$ten und A_k^{s+1} die Zahl der Glieder vom $(s+1)$ten an in dem Ausdruck (14.) oder (15.) ist. Bezeichnen wir die Reihe (14.) auf folgende Weise:

$$A = A_k^1 - A_k^2 + A_k^3 - A_k^4 \ldots,$$

so ist

$$A_k^r = A_k^r - A_k^{r+1} + A_k^{r+2} - A_k^{r+3} \ldots\ldots \pm A_k^s \mp A_k^{s+1} \pm A_k^{s+2} \mp \ldots,$$
$$A_k^{s+1} = A_k^{s+1} - A_k^{s+2} + A_k^{s+3} - A_k^{s+3} + \ldots,$$

und es ergeben sich daher für (18.) folgende zwei Formen:

$$19. \quad A_k^{r,s} = A_k^r - A_k^{r+1} + A_k^{r+2} - A_k^{r+3} + \ldots. - A_k^s,$$
$$20. \quad A_k^{r,s} = A_k^r - A_k^{r+1} + A_k^{r+2} - A_k^{r+3} \ldots\ldots + A_k^s - 2[A_k^{s+1} - A_k^{s+2} + \ldots.].$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich

$$21. \quad w = \frac{A_k^{r,s}}{n^p} = \frac{A_k^r - A_k^{s+1}}{n^p}.$$

Sollen alle Kugeln, die in der Urne enthalten sind, mitwirken, so ist aus (17.) die fragliche Wahrscheinlichkeit:

$$22. \quad w = \frac{A_k^{r,s}}{m^p} = \frac{A_k^r - A_k^{s+1}}{m^p}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs k Kugeln von der genannten Eigenschaft gerade einmal, nicht mehr und nicht weniger, erscheinen werden, ist aus (15.):

$$23. \quad w = \frac{A - 2B + 2C - 2E + \ldots.}{n^p}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs sie höchstens $s$mal, also s, $s-1$, $s-2$, ... 3, 2, 1 mal, oder gar nicht erscheinen werden, ist

$$24. \quad w = 1 - \frac{A_k^{s+1} + A_k^{s+2} - A_k^{s+3} + \ldots.}{n^p}.$$

Die in diesem Paragraph aufgestellten Gleichungen sind allgemeiner als die des vorigen Paragraphs. Es lassen sich aus ihnen die des vorigen Para-

graphs leicht ableiten. Sollen alle Kugeln in einer bestimmten Ordnung erscheinen, so geht k in m über und es ist aus (17.) die Wahrscheinlichkeit:

$$25. \quad w = \frac{(p-m+1)}{m^m} - \frac{(p-2m+1)^{2|1}}{1^{2|1}\cdot m^{2m}} - \frac{(p-3m+1)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot m^{3m}} - \ldots.$$

Diese Gleichung stimmt mit (3.) im vorigen Paragraph. Eben so ergiebt sich die Gleichung (2.) des vorigen Paragraphs aus (17.), wenn $m-k+1=1$, $m-k=0$, $m-2k+1=0$ u. s. w. gesetzt wird; wie es sein mufs. Die Gleichung (17.) geht dann über in

$$26. \quad w = \frac{(p-k+1)}{m^k} - \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}\cdot m^{2k}} + \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot m^{3k}} - \ldots.$$

In einer Urne sind r Arten von Kugeln. Von jeder Art sind n Kugeln mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnet. Man zieht p Kugeln einzeln heraus, legt jedesmal die gezogene Kugel nach der Ziehung zurück und betrachtet m Kugeln jeder Art als gesondert von den übrigen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens k Kugeln von den m gesonderten Kugeln hintereinander erscheinen werden, die mit der Reihenfolge der Zahlen bezeichnet sind?

Diese Frage ist eine Erweiterung der bisherigen. Die Zahl der dem Erfolge günstigen Fälle ergiebt sich, wenn die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen aus r Elementenreihen, von denen jede n Elemente hat, zur $p$ten Classe gebildet werden, und wenn darin die Zahl derjenigen, in welchen wenigstens k Elemente in der gewöhnlichen Reihenfolge der Zahlen hintereinander erscheinen, bestimmt wird; wobei zu bemerken ist, dafs nur m Elemente jeder Reihe berücksichtigt werden sollen. Hebt man eine von den auflösenden Gruppen hervor, so zeigt sich leicht, dafs ein Element von einer bestimmten Stellenzahl $r$mal ersetzt werden kann, wenn r Elementenreihen, aus welchen die Gruppen gebildet werden sollen, in Betracht kommen. Daher wird jede Gruppe so vielmal mehr erscheinen, als die Potenz von r angiebt, welche mit der Classenzahl der Versetzungen übereinstimmt. Dies gilt von jeder andern Gruppe, welche bei den Versetzungen entstehen kann. Nehmen wir an, die Gruppen werden zur $s$ten Classe gebildet, so ist die Vervielfältigungszahl für jede Gruppe

$$r^s;$$

wie sich Dies des nähern aus m. Comb. Lehre §. 41. No. 145 zeigt. Erwägt man nun, dafs sämmtliche Gruppen in (14.) der $p$ten Classe angehören, so ergiebt sich die dem Unternehmen günstige Gruppen-Anzahl, wenn die eben

angeführte Gleichung mit r^p multiplicirt wird. Es ist demnach

$$27.\quad A = r^p[B - C + D - E + F - \ldots.]$$
$$= (p-k+1)(m-k+1)r^k(rn)^{p-k} - (p-k)(m-k)r^{k+1}(rn)^{p-k-1}$$
$$-\Big[\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)^2 r^{2k}(rn)^2 - 2\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k+1)(m-k)r^{2k+1}rn$$
$$+\frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-k)^2 r^{2k+2}\Big](rn)^{p-2k-2}$$
$$+(p-2k+1)(m-2k+1)r^{2k}(rn)^{p-2k} - (p-2k)(m-2k)r^{2k+1}(rn)^{p-2k-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$28.\quad w = \frac{(p-k+1)(m-k+1)}{n^k} - \frac{(p-k)(m-k)}{n^{k+1}}$$
$$-\Big[\frac{(p-k+1)^{2|1}(m-k+1)^2}{1\cdot 2\cdot n^{2k}} - 2\frac{(p-2k)^{2|1}(m-k+1)(m-k)}{1^{2|1}\cdot n^{2k+1}} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}(m-k)^2}{1\cdot 2\cdot n^{2k+2}}\Big]$$
$$+\frac{(p-2k+1)(m-2k+1)}{n^{2k}} - \frac{(p-2k)(m-2k)}{n^{2k+1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man sieht, dafs die Gleichungen (16. und 28.) übereinstimmen. Dasselbe gilt von den übrigen Gleichungen, welche nach Analogie von (17. bis 26.) aus der eben aufgestellten Aufgabe abgeleitet werden können.

§. 28.

In einer Urne befinden sich n Kugeln, mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots. n$ bezeichnet. Von diesen Kugeln werden m, deren Zeichen der Reihe der gewöhnlichen Zahlen folgen, besonders beachtet. Man zieht p Kugeln einzeln heraus und legt die gezogene Kugel nicht in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von den m gesonderten Kugeln k Kugeln (wenigstens) hintereinander erscheinen werden, welche die Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen haben?

Die Zahl der günstigen Fälle stimmt mit folgender Gruppen-Anzahl überein. Die Versetzungen ohne Wiederholungen werden aus n Elementen zur $p$ten Classe gebildet und davon m Elemente, deren Stellenzahlen der Reihe der gewöhnlichen Zahlen folgen, besonders herausgehoben. Wie grofs ist die Zahl der Gruppen, in welchen wenigstens k Elemente der Reihe der gewöhnlichen Zahlen folgen?

Die der Frage genügenden Gruppen sind

$$1. \quad G_1 = \begin{matrix} a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_k \\ a_2\ a_3\ a_4\ \cdots\ a_{k+1} \\ a_3\ a_4\ a_5\ \cdots\ a_{k+2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m-k+1}\, a_{m-k+2}\ \cdots\ a_m \end{matrix}$$

Ihre Anzahl ist $m-k+1$. Die Frage kann auf ähnliche Weise beantwortet werden, wie die im vorigen Paragraph. Alle Gruppen, welche bei der Bildung der Versetzungen entstehen, werden nach einer Richtung hin untersucht und die auflösenden gezählt. Jede der Gruppen (1.) kann entweder gerade von der ersten, oder zweiten, oder dritten u. s. w. erscheinen und k Stellen einnehmen. Die Stellung der nachfolgenden Elemente ist gleichgültig; die der vorhergehenden nicht. Diese letzten müssen besonders von der $(k+1)$ten an berücksichtigt werden. Folgende Fälle sind zu untersuchen; wobei wir uns der Analogie wegen auf das im vorigen Paragraph Gesagte beziehen.

a. Eine der unter (1.) angegebenen Gruppen erscheint von der *ersten* Stelle an. Ihr kann jede beliebige Zusammenstellung der übrigen $n-k$ Elemente zur $(p-k)$ten Classe folgen. Die dadurch bedingte Gruppen-Anzahl ist

$$B_1 = (m-k+1)(n-k)^{p-k|-1}.$$

b. Eine der auflösenden Gruppen erscheint von der *zweiten* Stelle an. Ihr kann jedes Element von den übrigen, mit Ausnahme desjenigen vorgehen, welches die nächst niedrigere Stellenzahl des Anfangs-Elements hat. Nimmt man auch hier die vorhergehenden Elemente vollständig an und zieht die Gruppen, welche zuviel vorkommen, ab, so ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$\begin{matrix} P(a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots a_n)^1\, a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_k \\ +P(a_1, a_{k+2}, a_{k+3}, \cdots a_n)^1\, a_2\, a_3\, a_4 \cdots a_{k+1} - a_1 \,|\, a_2\, a_3 \cdots a_{k+1} \\ +P(a_1, a_2, a_{k+3}, \cdots a_n)^1\, a_3\, a_4\, a_5 \cdots a_{k+2} - a_2 \,|\, a_3\, a_4 \cdots a_{k+2} \\ \cdots\cdots\cdots\

c. Eine der auflösenden Gruppen erscheint von der *dritten* Stelle an. Ihr können zwei von den übrigen Elementen vorhergehen; mit der in (*b*) angegebenen Beschränkung. Werden auch hier die vortretenden Elemente vollständig angenommen, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&P(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n)^2\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k\\
&P(a_1, a_{k+2}, \ldots a_n)^2\, a_2 a_3 a_4 \ldots a_{k+1} - P(a_{k+2}, \ldots a_n)^1\, a_1 \,|\, a_2 a_3 \ldots a_{k+1}\\
&P(a_1, a_2, a_{k+3}, \ldots a_n)^2\, a_3 a_4 a_5 \ldots a_{k+2} - P(a_1, a_{k+3}, \ldots a_n)^1\, a_2 \,|\, a_3 a_4 \ldots a_{k+2}\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k-1}, a_m, \ldots a_n)^2\, a_{m-k} a_{m-k+1} \ldots a_{m-1}\\
&\qquad - P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k-2}, a_m, \ldots a_n)^1\, a_{m-k-1} \,|\, a_{m-k} \ldots a_{m-1}\\
&P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k}, a_{m+1}, \ldots a_n)^2\, a_{m-k+1} \ldots a_m\\
&\qquad - P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k-1}, a_{m+1}, \ldots a_n)^1\, a_{m-k} \,|\, a_{m-k+1} \ldots a_m .
\end{aligned}$$

Die Gruppen-Anzahl, welche sich in Rücksicht auf die nachfolgenden Elemente ergiebt, ist

$$\begin{aligned}
B_3 &= [(n-k)^{2|-1}(m-k+1) - (n-k-1)(m-k)]\,(n-k-2)^{p-k-2|-1}\\
&= (m-k+1)(n-k)^{p-k|-1} - (m-k)(n-k-1)^{p-k-1|-1}.
\end{aligned}$$

Für jeden spätern Fall findet sich die bisher erhaltene Gruppen-Anzahl. Es ist daher

$$B_{p-k+1} = (m-k+1)(n-k)^{p-k|-1} - (m-k)(n-k-1)^{p-k-1|-1}.$$

Durch Summirung der Werthe von B_1, B_2, B_3, ... B_{p-k+1} erhält man

$$2.\quad B = (p-k+1)(m-k+1)(n-k)^{p-k|-1} - (p-k)(m-k)(n-k-1)^{p-k-1|-1}.$$

Diese Schlüsse sind so lange richtig, bis das Anfangs-Element einer auflösenden Gruppe in die $(k+1)$te oder eine spätere Stelle gerückt ist. Ist dies geschehen, so können auf den vorhergehenden Stellen schon Gruppen von der angegebenen Eigenschaft erschienen sein, wodurch Ausscheidungen wie im vorigen Paragraph bedingt werden. Folgende Fälle können vorkommen.

d. Die nöthigen Ausscheidungen sind durch folgende Ausdrücke bedingt:

$$\begin{aligned}
&P(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n)^k\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k\\
&P(a_1, a_{k+2}, \ldots a_n)^k\, a_2 a_3 a_4 \ldots a_{k+1}\\
&P(a_1, a_2, a_{k+3}, \ldots a_n)^k\, a_3 a_4 a_5 \ldots a_{k+2}\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k}, a_{m+1}, \ldots a_n)^k\, a_{m-k+1} a_{m-k+2} \ldots a_m .
\end{aligned}$$

Die Gleichung (2.) dient, die nöthigen Ausscheidungen leichter zu bewerkstelligen. Die Zahl der auszuscheidenden Gruppen, welche der erste Aus-

druck bedingt, ergiebt sich, wenn man erwägt, dafs hier $m-k$ Elemente Gruppen mit k aufeinander folgenden Stellenzahlen bilden können. Man erhält ihre Zahl aus (2.), wenn k statt p und $m-k$ statt m gesetzt wird. Dabei ist die Zahl der nachfolgenden Gruppen nicht in Rechnung gebracht. Hieraus folgt

$$1\cdot(m-2k+1).$$

Die Zahl der auszuscheidenden Gruppen, welche der zweite Ausdruck giebt, findet sich, wenn k statt p und $m-k-1$ statt m gesetzt wird, da nur die Elemente a_{k+2}, a_{k+3}, ... a_m mitwirken können. Hieraus folgt

$$1\cdot(m-2k).$$

Die wegen des dritten Ausdrucks auszuscheidende Anzahl ergiebt sich, wenn $w-k-2$ statt m und k statt p gesetzt wird und ist

$$1\cdot(m-2k-1).$$

Fährt man auf diese Weise fort, so ergiebt sich für die Anzahl der auszuscheidenden Gruppen folgende Reihe:

$$[1(m-2k+1)+1\cdot(m-2k)+1(m-2k-1)+\cdots+1\cdot3+1\cdot2+1\cdot1]=\frac{(m-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}.$$

Ganz die nämliche Reihe, nur in umgekehrter Ordnung, erhält man für die Zahl der auszuscheidenden Gruppen, deren Elemente die Stellenzahlen von 1 bis $m-k$ haben, und es ist

$$[1\cdot1+1\cdot2+1\cdot3+\cdots1(m-2k)+1(m-2k+1)]=\frac{(m-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}.$$

Die Vereinigung beider Reihen giebt in Rücksicht auf die Anzahlen der Gruppen welche an den spätern $p-2k$ Stellen nachfolgen:

$$C_1=(m-2k+1)^{2|1}(n-2k)^{p-2k|-1}.$$

e. Nun entstehen zufolge (*b, c,* ....) auch Gruppen, welche die $(k+1)$te Dimension haben (S_1). Durch den Vortritt von $k-1$ auf einander folgender Elemente bilden sie Gruppen von der $(2k)$ten Dimension und erhalten dann folgende Form, weil dieser Ausdruck erst von dem $k$ten Ausdrucke an beginnt:

$$\begin{array}{l}
a_1\,a_2\,a_3\,\ldots.\,a_{k-1}\,|\,a_k\,|\,a_{k+1}\,a_{k+2}\,\ldots.\,a_{2k} \quad = G_2\\
a_2\,a_3\,a_4\,\ldots.\,a_k\,|\,a_{k+1}\,|\,a_{k+2}\,a_{k+3}\,\ldots.\,a_{2k+1}\\
a_3\,a_4\,a_5\,\ldots.\,a_{k+1}\,|\,a_{k+2}\,|\,a_{k+3}\,a_{k+4}\,\ldots.\,a_{2k+2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m-2k+1}\,\ldots.\,a_{m-k+1}\,|\,a_{m-k}\,|\,a_{m-k+1}\,\ldots.\,a_m.
\end{array}$$

Ihre Anzahl ist $m-2k+1$. Sie sind selbst wieder auszuscheiden. In Rück-

sicht auf die nachfolgenden Gruppen, an den $p-2k$ spätern Stellen, wird hieraus

$$D_1 = (m-2k+1)(n-2k)^{p-2k|-1}.$$

f. Die unter (1.) angegebenen Gruppen rücken auf die $(k+2)$te Stelle. Dies giebt folgenden Ausdruck

$$\begin{array}{l}
P(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n)^{k+1} a_1 a_2 a_3 \ldots a_k \\
P(a_1, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots a_n)^{k+1} a_2 a_3 a_4 \ldots a_{k+1} - P(a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots a_n)^k a_1 | a_2 a_3 \ldots a_{k+1} \\
P(a_1, a_2, a_{k+3}, \ldots a_n)^{k+1} a_3 a_4 a_5 \ldots a_{k+2} - P(a_1, a_{k+3}, a_{k+4}, \ldots a_n)^k a_2 | a_3 a_4 \ldots a_{k+2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k}, a_{m+1}, \ldots a_n)^{k+1} a_{m-k+1}, \ldots a_m \\
\qquad - P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k-1}, a_{m+1}, a_n) a_{m-k} | a_{m-k+1} \ldots a_m.
\end{array}$$

Die Anzahlen der Gruppen, welche wegen der Ausdrücke in der ersten verticalen Reihe ausgeschieden werden müssen, ergeben sich aus (2.), wenn $k+1$ statt k und der Reihe nach $m-k$, $m-k-1$, $m-k-2$, ... statt m gesetzt wird. Sie sind in folgender Doppelreihe begriffen:

$$[2(m-2k+1)+2(m-2k) \quad + \cdots \quad 2\cdot 3+2\cdot 2+2\cdot 1](n-2k)$$
$$= 2\frac{(m-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(n-2k),$$
$$-[1(m-2k) \quad +1(m-2k-1) \quad \cdots +1\cdot 3+1\cdot 2+1\cdot 1](n-2k)^0$$
$$= -1\frac{(m-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}.$$

Diese Doppelreihe entsteht wegen der Elemente, welche die Stellenzahlen von $k+1$ bis m haben. Ganz dieselbe Doppelreihe, nur in umgekehrter Ordnung, entsteht durch Behandlung der Ausdrücke, deren Elemente die Stellenzahlen von 1 bis $m-k$ haben. Hieraus ergiebt sich, in Rücksicht auf die ergänzende Gruppen-Anzahl, durch Summirung beider Reihen:

$$C_2 = 2(m-2k+1)^{2|1}(n-2k)^{p-2k|-1} - 1(m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}.$$

Die Anzahl der Gruppen, welche wegen der Ausdrücke in der zweiten Scheitelreihe auszuscheiden sind, ergiebt sich, wenn p statt k und der Reihe nach $m-k-1$, $m-k-2$, ... statt m gesetzt wird. Auch hier entsteht eine Doppelreihe, wie in (d), die jedoch um ein Glied kürzer ist. Mit Rücksicht auf die Gruppen an den ergänzenden Stellen erhält man

$$E_1 - (m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}.$$

Endlich müssen noch diejenigen Gruppen ausgeschieden werden, welche durch Zerlegung des vorstehenden Factors in die $(k-1)$te Classe Gruppen bringen,

die der Form G_2 und S_2 zugehören. Ihre Anzahl findet sich dem Frühern zufolge leicht und ist

$$D_2 = (m-2k+1)(n-2k)^{p-2k|-1} - (m-2k)(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}.$$

g. Rücken die auflösenden Gruppen in die $(k+3)$te Stelle, so ergiebt sich Folgendes:

$$\begin{aligned}
&P(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n)^{k+2}\, a_1 a_2 \ldots a_k \\
&P(a_1, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots a_n)^{k+2}\, a_2 a_3 \ldots a_{k+1} - P(a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots a_n)^{k+1}\, a_1 | a_2 a_3 \ldots a_{k+1} \\
&P(a_1, a_2, a_{k+3}, \ldots a_n)^{k+2}\, a_3 a_4 \ldots a_{k+2} - P(a_1, a_{k+3}, \ldots a_n)^{k+1}\, a_2 | a_3 a_4 \ldots a_{k+2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k}, a_{m+1}, a_n)^{k+2}\, a_{m-k+1} \ldots a_m \\
&\qquad - P(a_1, a_2, \ldots a_{m-k-1} \ldots a_n)^{k+1}\, a_{m-k} | a_{m-k+1} \ldots a_m.
\end{aligned}$$

Die Gruppen, welche wegen der Ausdrücke in der ersten verticalen Reihe ausgeschieden werden müssen, ergeben sich aus (2.), wenn $p = k+2$ gesetzt und dann wie früher verfahren wird. Es entstehen zwei Doppelreihen, deren Verbindung zu folgendem Ausdruck führt:

$$C_3 = 3(m-2k+1)^{2|1}(n-2k)^{p-2k|-1} - 2(m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}.$$

Durch gleiche Behandlung führen die Glieder der zweiten Scheitelreihe zu folgendem Ausdrucke:

$$E_2 = -2(m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1} + 1(m-2k-1)^{2|1}(n-2k-2)^{p-2k-2|-1}.$$

Aufserdem müssen noch die Glieder der zweiten Reihe weiter behandelt werden, welche auf Gruppen von der Form G_2 und S_2 führen. Es entsteht daraus folgender Ausdruck:

$$D_3 = (m-2k+1)(n-2k)^{p-2k|-1} - (m-2k)(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}.$$

Die spätern Fälle erfordern die gleiche Behandlung. Die Schlufsglieder dieser Reihen sind

$$C_{p-2k+1} =$$
$$\frac{(p-2k+1)^{1|1}}{1^{1|1}}(m-2k+1)^{2|1}(n-2k)^{p-2k} - \frac{(p-2k)^{1|1}}{1^{1|1}}(m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1},$$

$$-E_{p-2k} =$$
$$-\frac{(p-2k)^{1|1}}{1^{1|1}}(m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1} + \frac{(p-2k-1)^{1|1}}{1^{1|1}}(m-2k-1)^{2|1}(n-2k-2)^{p-2k-2|-1},$$

$$-D_{p-2k+1} =$$
$$-(m-2k+1)(n-2k)^{p-2k|-1} + (m-2k)(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}.$$

Durch Summirung der Werthe von $C_1, C_2, \ldots C_{p-2k+1}$; $E_1, E_2, \ldots E_{p-2k}$; $D_1, D_2, \ldots D_{p-2k+1}$ erhält man folgende Zahl aus (2.) auszuscheidender Gruppen:

$$3. \quad C =$$

$$\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1)^{2|1}(n-2k)^{p-2k|-1} - 2\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k)^{2|1}(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}$$
$$+ \frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k-1)^{2|1}(n-2k-2)^{p-2k-2|-1}$$
$$-[(p-2k+1)(m-2k+1)(n-2k)^{p-2k|-1} - (p-2k)(m-2k)(n-2k-1)^{p-2k-1|-1}].$$

Es läfst sich nun aus (3.) ein Schema entwerfen, nach welchem die Untersuchung weiter fortzuführen ist. Es entsteht das nämliche Schema, wie im vorigen Paragraph No. 6., jedoch mit dem Unterschiede, dafs die Symbole G_1, G_2; S_1, S_2 die gleichen Elemente in sich aufnehmen und dafs hier Facultäten statt der Potenzen vorkommen. Leitet man hieraus ein Schema für die von (3.) auszuscheidende Gruppen-Anzahl ab, so entsteht ein Schema, welches mit dem in (11.) des vorigen Paragraph harmonirt. Dies giebt folgenden Ausdruck:

$$4. \quad D =$$

$$\Big[\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+1)^{3|1}(n-3k)^{3|-1} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k)^{3|1}(n-3k-1)^{2|-1}$$
$$+ 3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k-1)^{3|1}(n-3k-2) - \frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k-2)^{3|1}\Big](n-3k-3)^{p-3k-3|-1}$$
$$-2\Big[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-3k+1)^{2|1}(n-3k)^{p-3k|-1} - 2\cdot\frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-3k)^{2|1}(n-3k-1)^{p-3k-1|-1}$$
$$+ \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-3k-1)^{2|1}(n-3k-2)^{p-3k-2|-1}\Big]$$
$$+(p-3k+1)(m-3k+1)(n-3k)^{p-3k|-1} - (p-3k)(m-3k)(n-3k-1)^{p-3k-1|-1}.$$

Mit Hülfe des Schema (12.) im vorigen Paragraph ergiebt sich leicht das Fortgangsgesetz. Die Form des $r$ten Gliedes ist:

5. $$R = \Big[\frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}}(m-rk+1)^{r|1}(n-rk)^{r|-1} - \frac{r^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot\frac{(p-rk)^{r|1}}{1^{r|1}}(m-rk)^{r|1}(n-rk-1)^{r-1|-1} + \ldots.$$
$$\ldots.(-1)^r\frac{(p-(k+1)r+1)^{r|1}}{1^{r|1}}(m-(k+1)r+1)^{r|1}\Big](n-(k+1)r)^{p-(k+1)r|-1}$$
$$-\frac{r-1}{1}\Big[\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-rk+1)^{r-1|1}(n-rk)^{r-1|-1} - \frac{(r-1)^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot\frac{(p-rk)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-rk)^{r-1|1}(n-rk-1)^{r-2|-1} + \ldots.$$
$$\ldots.(-)^{r-1}\frac{(p-(k+1)r+2)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-(k+1)r+2)^{r-1|1}\Big](n-(k+1)r+1)^{p-(k+1)r+1|-1}$$
$$+\frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[\frac{(p-rk+1)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}(m-rk+1)^{r-2|1}(n-rk)^{r-2|-1} - \frac{(r-2)^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot\frac{(p-rk)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}(m-rk)^{r-2|1}(n-rk-1)^{r-3|-1} + \ldots.$$
$$\ldots.(-1)^{r-2}\frac{(p-(k+1)r+3)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}(m-(k+1)r+3)^{r-2|1}\Big](n-(k+1)r+2)^{p-(k+1)r+2|-1}$$

. . . . . .

$$(-1)^{r-2}\frac{(r-1)^{r-2|-1}}{1^{r-2|1}}\Big[\frac{(p-rk+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-rk+1)^{2|1}(n-rk)^{2|-1} - 2\cdot\frac{(p-rk)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-rk)^{2|1}(n-rk-1)$$
$$+\frac{(p-rk-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-rk-1)^{2|1}\Big](n-rk-2)^{p-rk-2|-1}$$
$$(-1)^{r-1}\frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}}\Big[\frac{(p-rk+1)^{1|1}}{1}(m-kr+1)^{1|1}(n-rk) - \frac{(p-rk)^{1|1}}{1^{1|1}}(m-rk)^{1|1}\Big](n-rk-1)^{p-rk-1|-1}.$$

Die dem Erfolge günstige Gruppen-Anzahl ist demnach

6. $$A = B - C + D - E + \ldots.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

7. $$w = \frac{(p-k+1)(m-k+1)}{n^{k|-1}} - \frac{(p-k)(m-k)}{n^{k+1|-1}}$$
$$-\Big[\frac{(p-2k+1)^{2|1}(m-2k+1)^{2|1}}{1\cdot 2\cdot n^{2k|-1}} - \frac{2(p-2k)^{2|1}(m-2k)^{2|1}}{1\cdot 2\cdot n^{2k+1|-1}} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}(m-2k-1)^{2|1}}{1\cdot 2\cdot n^{2k+2|-1}}\Big]$$
$$+\frac{(p-2k+1)(m-2k+1)}{n^{2k|-1}} - \frac{(p-2k)(m-2k)}{n^{2k+1|-1}}$$
$$+\frac{(p-3k+1)^{3|1}(m-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot n^{3k|-1}} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}(m-3k)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot n^{3k+1|-1}} + 3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}(m-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot n^{3k+2|-1}}$$
$$-\frac{(p-3k-2)^{3|1}(m-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot n^{3k+3|-1}}$$

. . . . . .

Diese Ausdrücke verkürzen sich bedeutend, wenn $m = n$ ist, und dies führt zu folgender Frage.

In einer Urne sind m, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnete Kugeln enthalten. Man nimmt p Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogenen Kugeln in die Urne zurückzulegen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs

wenigstens k Kugeln erscheinen werden, die mit der Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen bezeichnet sind?

Setzt man in $B, C, D, E, \ldots$ m statt n, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$B = (p-k+1)(m-k+1)(m-k)^{p-k|-1} - (p-k)(m-k)(m-k-1)^{p-k-1|-1},$$

$$C = \left[\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1)^{2|1} - 2\cdot\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1) + \frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}\right](m-2k)^{p-2k|-1}$$
$$-[(p-2k+1)(m-2k+1)-(p-2k)](m-2k)^{p-2k|-1},$$

$$D = \left[\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+1)^{3|1} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+1)^{2|1} + 3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+1) - \frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}}\right](m-3k)^{p-3k|-1}$$
$$-2\left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1)^{2|1} - 2\cdot\frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1) + \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}\right](m-3k)^{p-3k|-1}$$
$$+[(p-3k+1)(m-3k+1)-(p-3k)](m-3k)^{p-3k|-1}$$

u. s. w. Zählt man nun in $C, D, E, \ldots$ die schiefliegenden Glieder, welche den gleichen Facultäten von $m-3k+1$ zugehören, zusammen, so erhält man sehr kurze Ausdrücke. Die Formeln C und D gehen in folgende

8. $$C = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+2)^{p-2k+2|-1} - 2\cdot\frac{(p-2k+1)(p-2k+1)}{1\cdot 2}(m-2k+1)^{p-2k+1|-1} + \frac{(p-2k)(p-2k+1)}{1\cdot 2}(m-2k)^{p-2k|-1},$$

9. $$D = \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+3)^{p-3k+3|-1} - 3\cdot\frac{(p-3k+2)(p-3k+1)(p-3k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3k+3)^{p-3k+2|-1} + 3\cdot\frac{(p-3k+1)(p-3k+1)(p-3k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3k+1)^{p-3k+1|-1} - \frac{(p-3k)(p-3k+1)(p-3k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3k)^{p-3k|-1}$$

u. s. f. über. Das allgemeine Gesetz dieser Bildungsart ist aus folgender Darstellung ersichtlich:

10. $$R = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}}(m-(k-1)r)^{p-(k-1)r|-1} - \frac{r}{1}\cdot\frac{(p-(k-1)r-2)}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-(k-1)r-1)^{p-(k-1)r-1|-1}$$
$$+\frac{r^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(p-(k-1)r-3)}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-(k-1)r-2)^{p-(k-1)r-2|-1}$$
$$-\frac{r^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{(p-(k-1)r-4)}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-(k-1)r-3)^{p-(k-1)r-3|-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots

$$R = \Big[\frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}}(m-rk+1)^{r|1}(n-rk)^{r|-1} - \frac{r^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot\frac{(p-rk)^{r|1}}{1^{r|1}}(m-rk)^{r|1}(n-rk-1)^{r-1|-1} + \ldots.$$
$$\ldots.(-1)^r\frac{(p-(k+1)r+1)^{r|1}}{1^{r|1}}(m-(k+1)r+1)^{r|1}\Big](n-(k+1)r)^{p-(k+1)r|-1}$$

$$-\frac{r-1}{1}\Big[\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-rk+1)^{r-1|1}(n-rk)^{r-1|-1} - \frac{(r-1)^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot\frac{(p-rk)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-rk)^{r-1|1}(n-rk-1)^{r-2|-1} + \ldots.$$
$$\ldots.(-)^{r-1}\frac{(p-(k+1)r+2)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-(k+1)r+2)^{r-1|1}\Big](n-(k+1)r+1)^{p-(k+1)r+1|-1}$$

$$\frac{(r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\Big[\frac{(p-rk+1)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}(m-rk+1)^{r-2|1}(n-rk)^{r-2|-1} - \frac{(r-2)^{1|-1}}{1^{1|1}}\cdot\frac{(p-rk)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}(m-rk)^{r-2|1}(n-rk-1)^{r-3|-1} + \ldots.$$
$$\ldots.(-1)^{r-2}\frac{(p-(k+1)r+3)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}(m-(k+1)r+3)^{r-2|1}\Big](n-(k+1)r+2)^{p-(k+1)r+2|-1}$$

. . . . . .

$$-1)^{r-2}\frac{(r-1)^{r-2|-1}}{1^{r-2|1}}\Big[\frac{(p-rk+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-rk+1)^{2|1}(n-rk)^{2|-1} - 2\cdot\frac{(p-rk)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-rk)^{2|1}(n-rk-1)$$
$$+\frac{(p-rk-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-rk-1)^{2|1}\Big](n-rk-2)^{p-rk-2|-1}$$

$$-1)^{r-1}\frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}}\Big[\frac{(p-rk+1)^{1|1}}{1}(m-kr+1)^{1|1}(n-rk) - \frac{(p-rk)^{1|1}}{1^{1|1}}(m-rk)^{1|1}\Big](n-rk-1)^{p-rk-1|-1}.$$

Die dem Erfolge günstige Gruppen-Anzahl ist demnach

$$6. \quad A = B - C + D - E + \ldots.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$7. \quad w = \frac{(p-k+1)(m-k+1)}{n^{k|-1}} - \frac{(p-k)(m-k)}{n^{k+1|-1}}$$
$$-\Big[\frac{(p-2k+1)^{2|1}(m-2k+1)^{2|1}}{1\cdot 2\cdot n^{2k|-1}} - \frac{2(p-2k)^{2|1}(m-2k)^{2|1}}{1\cdot 2\cdot n^{2k+1|-1}} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}(m-2k-1)^{2|1}}{1\cdot 2\cdot n^{2k+2|-1}}\Big]$$
$$+\frac{(p-2k+1)(m-2k+1)}{n^{2k|-1}} - \frac{(p-2k)(m-2k)}{n^{2k+1|-1}}$$
$$+\frac{(p-3k+1)^{3|1}(m-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot n^{3k|-1}} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}(m-3k)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot n^{3k+1|-1}} + 3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}(m-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot n^{3k+2|-1}}$$
$$-\frac{(p-3k-2)^{3|1}(m-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot n^{3k+3|-1}}$$

. . . . . .

Diese Ausdrücke verkürzen sich bedeutend, wenn $m = n$ ist, und dies führt zu folgender Frage.

In einer Urne sind m, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnete Kugeln enthalten. Man nimmt p Kugeln einzeln heraus, ohne die gezogenen Kugeln in die Urne zurückzulegen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs

wenigstens k Kugeln erscheinen werden, die mit der Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen bezeichnet sind?

Setzt man in $B, C, D, E, \ldots$ m statt n, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$B = (p-k+1)(m-k+1)(m-k)^{p-k|-1} - (p-k)(m-k)(m-k-1)^{p-k-1|-1},$$

$$C = \left[\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1)^{2|1} - 2\cdot\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1) + \frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}\right](m-2k)^{p-2k|-1}$$
$$-[(p-2k+1)(m-2k+1)-(p-2k)](m-2k)^{p-2k|-1},$$

$$D = \left[\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+1)^{3|1} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+1)^{2|1} + 3\cdot\frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+1) - \frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}}\right](m-3k)^{p-3k|-1}$$
$$-2\left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1)^{2|1} - 2\cdot\frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1) + \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}\right](m-3k)^{p-3k|-1}$$
$$+[(p-3k+1)(m-3k+1)-(p-3k)](m-3k)^{p-3k|-1}$$

u. s. w. Zählt man nun in $C, D, E, \ldots$ die schiefliegenden Glieder, welche den gleichen Facultäten von $m-3k+1$ zugehören, zusammen, so erhält man sehr kurze Ausdrücke. Die Formeln C und D gehen in folgende

8. $$C = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+2)^{p-2k+2|-1} - 2\cdot\frac{(p-2k+1)(p-2k+1)}{1\cdot 2}(m-2k+1)^{p-2k+1|-1} + \frac{(p-2k)(p-2k+1)}{1\cdot 2}(m-2k)^{p-2k|-1},$$

9. $$D = \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+3)^{p-3k+3|-1} - 3\cdot\frac{(p-3k+2)(p-3k+1)(p-3k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3k+3)^{p-3k+2|-1} + 3\cdot\frac{(p-3k+1)(p-3k+1)(p-3k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3k+1)^{p-3k+1|-1} - \frac{(p-3k)(p-3k+1)(p-3k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}(m-3k)^{p-3k|-1}$$

u. s. f. über. Das allgemeine Gesetz dieser Bildungsart ist aus folgender Darstellung ersichtlich:

10. $$R = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}}(m-(k-1)r)^{p-(k-1)r|-1} - \frac{r}{1}\cdot\frac{(p-(k-1)r-2)}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{r^{r-1|1}}(m-(k-1)r-1)^{p-(k-1)r-1|-1} + \frac{r^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{(p-(k-1)r-3)}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-(k-1)r-2)^{p-(k-1)r-2|-1} - \frac{r^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{(p-(k-1)r-4)}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-(k-1)r-3)^{p-(k-1)r-3|-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-1)^{r-1}\frac{r^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}}\cdot\frac{p-rk+1}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-rk+1)^{p-rk+1|-1}$$
$$(-1)^{r}\frac{r^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{(p-rk)}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}(m-rk)^{p-rk|-1}.$$

Die Zahl der dem Erfolge günstigen Fälle ist für die vorliegende Aufgabe

11. $$A = (p-k+1)(m-k+1)^{p-k+1|-1} - (p-k)(m-k)^{p-k|-1}$$
$$- \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{2^{2|1}}(m-2k+2)^{p-2k+2|-1} + 2\cdot\frac{(p-2k+1)(p-2k+1)}{1\cdot 2}(m-2k+1)^{p-2k+1|-1}$$
$$- \frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k)^{p-2k|-1}$$
$$+ \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+3)^{p-3k+3|-1} - 3\cdot\frac{(p-3k+2)(p-3k+1)^{2|1}}{1^{3|1}}(m-3k+2)^{p-3k+2|-1} + \ldots.$$
. . . . . .

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

12. $$w = \frac{p-k+1}{m^{k-1|-1}} - \frac{p-k}{m^{k|-1}}$$
$$- \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}\cdot m^{2k-2|-1}} + 2\cdot\frac{(p-2k+1)(p-2k+1)}{1\cdot 2\cdot m^{2k-1|-1}} - \frac{(p-2k)^{2|1}}{1\cdot 2\cdot m^{2k|-1}}$$
$$+ \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}\cdot m^{3k-3|-1}} - 3\cdot\frac{(p-3k+2)(p-3k+1)^{2|1}}{1^{3|1}\cdot m^{3k-2|-1}} + 3\cdot\frac{(p-3k+1)(p-3k+1)^{2|1}}{1^{3|1}\cdot m^{3k-1|-1}} - \frac{(p-3k^{3|1}}{1^{3|1}\cdot m^{3k|-1}}$$
. . . . . .

Die Wahrscheinlichkeit, dafs alle Kugeln in einer bestimmten Ordnung erscheinen werden, ist aus (12.), wenn man $p = k = m$ setzt:

13. $$w = \frac{1}{m^{m-1|-1}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen p Kugeln in der Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen erscheinen werden, ist aus (12.), wenn p statt k gesetzt wird,

14. $$w = \frac{1}{m^{p-1|-1}}.$$

Zieht man (7. und 12.) von der Einheit ab, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs höchstens $k-1$ Kugeln hintereinander in der Reihenfolge der Zahlen erscheinen werden. Behalten wir die frühere Bezeichnungsart bei, so bedeutet

15. $$A_k^{r,s} = A_k^r - A_k^{s+1}$$

die Anzahl der Gruppen, in welchen k Elemente hintereinander in der Reihenfolge der Zahlen wenigstens r und höchstens $s$mal, also r, $r+1$, $r+2$, ... $s$mal, erscheinen werden, wenn die Versetzungen ohne Wiederholungen zur $p$ten Classe unter den zu (6. und 11.) angegebenen Bedingungen gebildet werden.

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind:

$$16.\quad w = \frac{A_k^r - A_k^{s+1}}{n^{p|-1}},$$

$$17.\quad w = \frac{A_k^r - A_k^{s+1}}{m^{p|-1}}.$$

In einer Urne befinden sich r Arten von Kugeln. Von jeder Art sind n Kugeln mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnet. Man stellt sich die m ersten Kugeln von jeder Art gesondert vor, nimmt p Kugeln einzeln heraus, ohne jedesmal die gezogene Kugel in die Urne zurückzulegen. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens k Kugeln hintereinander erscheinen werden, die mit der Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen bezeichnet sind?

Die Zahl der günstigen Kugelgruppen stimmt mit der Zahl der Gruppen überein, wenn aus den oben angegebenen Elementenreihen die Versetzungen ohne Wiederholungen zur $p$ten Classe gebildet und diejenigen ausgewählt werden, in welchen wenigstens k Elemente die Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen durch ihre Stellenzahlen zeigen.

Nach dem Vorgange der Schlüsse im vorigen Paragraph zu (27.) läfst sich die dem Unternehmen günstige Gruppen-Anzahl leicht finden, wenn man bemerkt, dafs jedes Element in einer der auflösenden Gruppen $r$mal ersetzt werden kann. Die ergänzende Gruppen-Anzahl wird dann aus den gehörigen Elementen gebildet werden müssen. Geschieht dies, so erhält man folgende Ausdrücke für die Werthe von $B, C, D, E, \ldots$.

$$18.\quad B = (p-k+1)(m-k+1)r^k(rn-k)^{p-k|-1} - (p-k)(m-k)r^{k+1}(rn-k-1)^{p-k-1|-1},$$

$$C = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k+1)^{2|1}r^{2k}(rn-2k)^{p-2k|-1} - 2\cdot\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k)^{2|1}r^{2k+1}(rn-2k-1)^{p-2k-1|-1}$$
$$+\frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-2k-1)^{2|1}r^{2k+2}(rn-2k-2)^{p-2k-2|-1}$$
$$-(p-2k+1)(m-2k+1)r^{2k}(rn-2k)^{p-2k|-1} + (p-2k)(m-2k)^{1|1}(rn-2k-1)^{p-2k-1|-1},$$

$$D = \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k+1)^{3|1}r^{3k}(rn-3k)^{p-3k|-1} - 3\cdot\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-3k)^{3|1}r^{3k+1}(rn-3k-1)^{p-3k-1|-1} + \ldots.$$
$$-2\left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-3k+1)^{2|1}r^{3k}(rn-3k)^{p-3k|-1} - 2\cdot\frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}}(m-3k)^{2|1}r^{3k+1}(rn-3k-1)^{p-3k-1|-1} + \ldots.\right]$$
$$+(p-3k+1)(m-3k+1)r^{3k}(rn-3k)^{p-3k|-1} - (p-3k)(m-3k)r^{3k|-1}(rn-3k-1)^{p-3k-1|-1}$$

u. s. w. Die gesuchte Gruppen-Anzahl ist

$$19.\quad A = B - C + D - E + F \ldots.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist

$$20.\quad w = \frac{(p-k+1)(m-k+1)r^k}{(rn)^{k|-1}} - \frac{(p-k)(m-k)r^{k+1}}{(rn)^{k+1}}$$
$$-\Big[\frac{(p-2k+1)^{2|1}(m-2k+1)^{2|1}r^{2k}}{1\cdot 2\cdot (rn)^{2k|-1}} - 2\cdot\frac{(p-2k)^{2|1}(m-2k)^{2|1}r^{2k+1}}{1\cdot 2\cdot (rn)^{2k+1|-1}}$$
$$+\frac{(p-2k-1)^{2|1}(m-2k-1)^{2|1}r^{2k+2}}{1\cdot 2\cdot (rn)^{2k+2}}\Big]$$
$$+\frac{(p-2k+1)(m-2k+1)r^{2k}}{(rn)^{2k|-1}} - \frac{(p-2k)(m-2k)r^{2k+1}}{(rn)^{2k+1|-1}}$$
. . . . . .

Die Wahrscheinlichkeit in dem speciellen Falle $n = m$ ergiebt sich leicht. Die übrigen Gleichungen, dafs k Kugeln von der angegebenen Beschaffenheit wenigstens r und höchstens $s$mal erscheinen werden, ergeben sich eben so leicht und es ist auch hier

$$21.\quad A_k^{r,s} = A_k^r - A_k^{s+1},$$

$$22.\quad w = \frac{A_k^r - A_k^{s+1}}{(rn)^\rho}$$

u. s. w.

Das in diesem Paragraph behandelte Problem ist im 2ten Bande der „Annal. d. Gergonne P. 324" als aufzulösende Aufgabe unter folgender ganz speciellen Form aufgestellt: „Une loterie étant composée des n numéros 1, 2, 3, 4, ... n, dont il en sort t à chaque tirage: quelle probabilité y a-t-il, que, parmi les t numéros d'un tirage, il ne se trouvera pas deux nombres consécutifs de la suite naturelle." Im dritten Bande der genannten Annalen ist es von *Tédenat, Encontre* und *L'huilier* behandelt. In einer allgemeineren Form ist es in demselben Bande aufgestellt und dann in dieser von *Le Grand* und *Rochat* Pg. 213 — 222 und wiederholt von *L'huilier* Pg. 222 — 231 untersucht. Die dortigen Untersuchungen bleiben aber bei den speciellen Fällen und haben deswegen zu keinem allgemeinen Gesetze, wie es hier aufgestellt ist, geführt. Macht man das Problem allgemein, wie hier, so zeigt sich bald der Unterschied, welcher sich ergiebt, wenn die gezogene Kugel nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt wird, und wenn nicht. Im ersten Fall ist die Zahl der Kugeln bei jeder Ziehung vollständig, im zweiten nicht, und es entstehen zwei zusammengehörige Probleme, von welchen das eine in diesem, das andere im vorhergehenden Paragraph gelöset wurde, das eine auf Versetzungen ohne Wiederholungen, das andere auf Versetzungen mit Wiederholungen sich beziehend. Dieser Unterschied ist, wie man sieht, in den oben angeführten Untersuchungen übergangen.

(Die Fortsetzung folgt.)

23.

Über eine Eigenschaft der Leitstrahlen der Kegelschnitte.

(Von Herrn Prof. *J. Steiner* zu Berlin.)

Es seien S, S_1 die Scheitel der Haupt-Axe und F, F_1 die Brennpuncte eines Kegelschnitts; es seien ferner P, P_1 zwei solche Puncte in der Axe, welche zu den Scheiteln S, S_1 harmonisch sind, und zwar liege S zwischen P und P_1; ferner liege P aufserhalb des Kegelschnitts, so dafs aus ihm zwei Tangenten PT, PT_1 an diesen gehen, deren Berührungssehne TT_1 die Axe im Puncte P_1 trifft. Aus einem der Puncte P oder P_1 ziehe man eine beliebige Secante PAB (oder P_1AB) durch den Kegelschnitt, und nach den Schnittpuncten A, B ziehe man aus dem dem Scheitel S zunächst liegenden Brennpuncte F die Leitstrahlen $FA = \alpha$, $FB = \beta$, so wie endlich nach dem Berührungspuncte T den Leitstrahl $FT = \tau$: so giebt es jedesmal zwei bestimmte constante Gröfsen r und k von der Beschaffenheit, dafs immer

$$1. \quad (\alpha - r)(\beta - r) = (\tau - r)^2 = k^2,$$

wie auch die Secante AB ihre Richtung und dadurch die Strahlen α und β ihre Gröfse ändern mögen, und gleichviel ob die Secante durch P oder P_1 gehen mag. Verändert man aber die Lage der festen Pole P und P_1, so ändern sich auch die Constanten r und k.

Dem andern Brennpuncte F_1 entspricht gleichzeitig die nämliche Constante k, dagegen eine andere Constante r_1, und wenn man die Leitstrahlen $F_1A = \alpha_1$, $F_1B = \beta_1$, $F_1T = \tau_1$ zieht, so hat man, wie für F:

$$(\alpha_1 - r_1)(\beta_1 - r_1) = (\tau_1 - r_1)^2 = k^2.$$

Ändern die conjugirten Pole P und P_1 ihre Lage, so bleibt entweder die Summe oder der Unterschied der gleichzeitigen Gröfsen r und r_1 constant; nämlich diese Summe oder dieser Unterschied ist stets der Haupt-Axe $2a$ des Kegelschnitts gleich, also

$$2. \quad r_1 \pm r = 2a.$$

Bezeichnet man die Excentricität des Kegelschnitts durch c, setzt die Tangente $PT = t$ und den Winkel, welchen sie mit dem Leitstrahle $FT = \tau$ bildet, also den Winkel $PTF = \varphi$, so hat man

$$3. \quad k^2 = (a-r)^2 - c^2,$$
$$4. \quad k = \tau - r = \tfrac{1}{2} t \cdot \cos\varphi.$$

Unter Umständen können von den Gröfsen r, r_1, α, β, ... einzelne ihr Vorzeichen ändern. Ich will dies, nebst einigen andern Besonderheiten, bei den verschiedenen Kegelschnitten etwas näher andeuten.

I. Bei der Ellipse kann die Gröfse r *positiv, negativ* oder *Null* sein, je nachdem die Pole P und P_1 liegen. Im letzten Fall, wo $r = 0$, wird die Gröfse k der halben kleinen Axe b der Ellipse gleich, so dafs für diesen Fall (1.)

$$5. \quad \alpha\beta = \tau^2 = b^2.$$

Dies giebt den besonderen Satz:

„Beschreibt man mit der halben kleinen Axe b um den Brennpunct F der Ellipse einen Kreis, der die Ellipse allemal in zwei reellen Puncten T und T_1 scheidet, zieht die Sehne TT_1, die der Haupt-Axe in P_1 begegnet und legt in T (oder T_1) an die Ellipse die Tangente TP, welche die Haupt-Axe in P trifft, zieht ferner aus einem der Puncte P oder P_1, gleichviel aus welchem, eine willkürliche Secante AB durch die Ellipse und nach ihren Schnittpuncten A und B aus dem Brennpuncte F die Strahlen α und β, so ist das Rechteck unter diesen Strahlen constant, und zwar gleich dem Quadrat über der halben kleinen Axe."

Rücken nun, von dem genannten Zustande ausgehend, die Pole P und P_1 dem Scheitel S näher, so ist r positiv: entfernen sie sich dagegen von demselben, so wird r negativ und dann verwandeln sich die obigen Ausdrücke in folgende:

$$1. \quad (\alpha + r)(\beta + r) = (\tau + r)^2 = k^2,$$
$$2. \quad r_1 - r = 2a,$$
$$3. \quad k^2 = (a+r)^2 - c^2,$$
$$4. \quad k = \tau + r = \tfrac{1}{2} t \cdot \cos\varphi.$$

Es sei M der Mittelpunct der Ellipse und es werde $MP = p$ und $MP_1 = p_1$ gesetzt, so finden ferner noch folgende Relationen statt:

$$6.\quad k = \frac{c}{2a}\cdot\frac{p^2-a^2}{p} = \frac{c}{2a}\cdot\frac{a^2-p_1^2}{p_1} = \frac{c}{2a}(p-p_1),$$

$$7.\quad r = a\mp\frac{c}{2a}\cdot\frac{p^2+a^2}{p} = a\mp\frac{c}{2a}\cdot\frac{p_1^2+a^2}{p_1} = a\mp\frac{c}{2a}(p+p_1),$$

$$8.\quad p = \frac{a}{c}(k\pm\sqrt{(k^2+c^2)}) = \frac{a}{c}[a-r\pm\sqrt{((a-r)^2-c^2)}],$$

wo die untern Zeichen in (7.) und (8.) den Werthen für r_1 und p_1 entsprechen.

II. Bei der Hyperbel sind die Gröfsen r und r_1 immer positiv und für alle Lagen der Pole P und P_1 ist immer

$$2.\quad r_1 - r = 2a.$$

In Rücksicht der Strahlen α, β kommt es dagegen darauf an, ob die Schnittpuncte A und B der Secante AB im nämlichen Zweige der Hyperbel liegen, oder nicht. Liegen sie im nämlichen Zweige (der also S zum Scheitel hat und den Brennpunct F umschliefst), so hat man wie oben

$$(\alpha-r)(\beta-r) = (\tau-r)^2 = k^2 \quad\text{und}\quad (\alpha_1-r_1)(\beta_1-r_1) = (\tau_1-r_1)^2 = k^2.$$

Dreht nun aber die Secante AB sich so um den festen Pol P oder P_1, bis B sich ins Unendliche entfernt und von da in den andern Zweig hinübergeht, so ändert der Strahl β sein Zeichen, und damit wird nun gleichzeitig $r>\alpha$, während zuvor $\alpha>r$ war, so dafs alsdann die Formel in folgende übergeht:

$$(r-\alpha)(r+\beta) = (\tau-r)^2 = k^2, \quad\text{und}\quad (r_1-\alpha_1)(r_1+\beta_1) = (\tau_1-r_1)^2 = k^2.$$

Die Gröfsen r und r_1 lassen sich hier auf eigenthümliche Art construiren. Aus einem der Pole P oder P_1, etwa aus P, ziehe man, einer Asymptote parallel, die Gerade PR, welche die Hyperbel in R trifft, und ziehe sodann die Leitstrahlen FR, F_1R, so sind diese die verlangten Gröfsen r und r_1.

III. Bei der Parabel sind die Pole P und P_1 jedesmal gleich weit vom Scheitel S entfernt. Für alle Lagen dieser Pole bleibt die Gröfse r constant, und zwar ist sie stets der Entfernung des Brennpuncts vom Scheitel gleich, also ist $r = FS = e$. Die Gröfse k ist jedesmal dem Abstande des Pols P oder P_1 vom Scheitel S gleich, also $k = SP = SP_1 = d$. Daher hat man:

$$(\alpha-e)(\beta-e) = d^2,$$

d. h.: *„Beschreibt man um den Brennpunct F der Parabel mit dem Abstande e desselben vom Scheitel S einen Kreis, zieht sodann aus dem Brennpuncte nach irgend zwei Puncten A und B in der Parabel die Leitstrahlen FA und FB, welche vom Kreise in A_1 und B_1 geschnitten werden, und zieht endlich die Sehne AB, welche die Parabel-Axe in*

irgend einem Puncte Q (d. i. P oder P_1) trifft, so ist allemal das Rechteck unter denjenigen Abschnitten der Strahlen, welche zwischen dem Kreise und der Parabel liegen, gleich dem Quadrat über dem Abschnitte der Axe, welcher zwischen ihrem Scheitel und dem Puncte Q enthalten ist, also $AA_1 \cdot BB_1 = SQ^2$."

Daraus schliefst man weiter den folgenden Satz:

„***Schneiden eine beliebige Sehne AB und die Tangenten in ihren Endpuncten A und B die Parabel-Axe beziehlich in Q, A_0, B_0, und trifft das aus dem gegenseitigen Schnittpuncte der Tangenten auf die Axe gefällte Perpendikel dieselbe in R, so ist allemal***

$$SA_0 \cdot SB_0 = SQ^2 = SR^2.$$

Berlin, im April 1845.

24.

Intorno agl'intimi movimenti osservati nei muri dell'Osservatorio di Modena.

(Memoria del Sgr. Dottor *Antonio Bernardi.*)

§. 1. I grandi progressi fatti dall'astronomia teorico-pratica in questi ultimi tempi concedono alle osservazioni ed ai metodi di riduzione quella giustezza, oltre alla quale poco rimane a desiderare. Se non che il modulo cui l'astronomo riferisce le sue misure è di troppo limitate dimensioni relativamente alle cose da misurarsi, e perciò si richiede in esso modulo somma esattezza di costruzione, invariabilità di posizione nelle intime parti e nelle adjacenti. Ma l'industria, e la mano dell'uomo non possono in grado assoluto conseguire tutto ciò, e conviene per altra via riconoscere e valutare nelle principali macchine astronomiche quelle variazioni che ponno influire sulla giustezza delle osservazioni. Se molto, e con molto profitto, si è studiato rapporto alla costruzione, alla posizione assoluta e relativa delle intime parti costituenti le diverse macchine astronomiche: poco però si è fatto riguardo alla stabilità dei solidi che ne costituiscono i sostegni; Lo scopo di questo scritto è appunto di far conoscere l'importanza di volgere l'attenzione anche a questa parte.

§. 2. I piccoli movimenti cagionati dalla forza espansiva del calorico nei fabbricati, specialmente di considerevole altezza, furono già avvertiti dal benemerito de Cesaris sulla Specola di Milano I), dal Moscati sulla torre di Sant'Alessandro in detta città II), ed in fine l'elasticità dei muri venne definitivamente comprovata dall'astronomo di Napoli ***Carlo Broschi,*** il quale dopo aver parlato del collocamento d'un circolo ripetitore di quella specola si esprime nel modo seguente rispetto al collocamento di un secondo circolo.

„L'altro circolo è collocato nella torretta occidentale, ed il sue basamento „sorge isolato, a differenza dell'altro, a guisa di grande pilastro dal mezzo della „collina, dove ha i suoi fondamenti, ed è totalmente staccato dal resto dell'edifizio. „L'altezza di questo pilastrone, di quasi tredici metri, fa sì che per la sua ***elasti-*** „***cità*** oscilli facilmente, scuotendolo alquanto presso la sua sommità, e che per „uno sforzo non molto notabile anche s'inclini. Avendo avuta curiosità di conoscere „l'inclinazione prodotta in questo pilastrone da una data forza, ho applicata alla sua

I) Est di Mil. 1813. pag. 105 app. II) Mem. della Soc. Ital.

„sommità una tensione orizontale nella direzione del meridiano di chilogrammi 40 „ed ho trovato per mezzo di un buon livello, che con tale forza l'inclinazione era „di 8″ e con chilogramme 20 era di 4″, ciò dà una giusta idea della sua elasticità, „e quindi della necessità di non appoggiarsi al pilastrone quando si osserva, onde „non alterare la posizione del livello, e con esso quella di tutto lo strumento III)."

§. 3. La stabilità delle macchine astronomiche può dunque essere turbata da que' piccoli movimenti cagionati specialmente dall'immensa forza del sole sulla elasticità dei muri che costituiscono gli osservatorj: e il conoscere la legge e la quantità di cotali movimenti importerebbe moltissimo per la giustezza delle osservazioni degli astri. Sarebbe forse opera vana tentare la soluzione diretta di questo problema, tante e così svariate sono le cause che lo involgono, ma non per questo dobbiamo intralasciare di cercare lume in proposito da osservazioni esatte, ed instituite in favorevoli circostanze. Per la qualcosa io riferirò il risultato di molte osservazioni appositamente instituite, durante la mia destinazione in qualità d'Aggiunto all'Osservatorio di Modena, col mezzo di tre squisiti livelli a bolla d'aria, inservienti alla rettificazione delle macchine di questa Specola. Prima però di entrare in dettagli relativi alle osservazioni, è necessario ch'io faccia conoscere la stabilità assoluta e relativa dei muri costituenti l'osservatorio, onde meglio apprezzare le deduzioni che verranno appresso.

§. 4. L'osservatorio astronomico di questa capitale è situato sulla torre orientale del palazzo Ducale. La facciata principale di questo edifizio guarda il punto sud-sud-ouest dell'orizzonte sensibile, e in corrispondenza i fianchi perpendicolari, la parte posteriore parallela alla direzione della facciata. Per ragione di brevità d'ora innanzi indicherò coi semplici punti cardinali dell'orizzonte le faccie rispettive della torre, sulla quale sono collocate le macchine inservienti alle osservazioni degli astri.

Ciò posto si deve notare che il lato ouest di cotesta torre, o propriamente dell'osservatorio, è appoggiato per quasi la totale sua altezza e forma un tutto continuato col fianco del palazzo: che il lato est è contiguo, ed anzi costituisce parte del lato minore del teatro di corte, che lo investe per circa i due terzi dell'altezza, mentre il lato maggiore di esso teatro forma linea retta colla facciata del palazzo e col lato sud dell'osservatorio. Segue di qui che i lati est ed ouest dell'osservatorio sono invariabilmente legati, e a così dire incastrati fra due grandi ammassi di fabbrica, capaci di assicurarne in questo senso la stabilità richiesta in tali edifizj. Per adattare inoltre cotesta parte del

III) Coment. astr. della Spec. di Napoli Vol. I. par. 1ª pag. 16.

palazzo, ad uso di specola, fu gettato un solidissimo arco poggiante sui piedetti lati della torre, il quale arco contribuisce non poco alla stabilità dell'osservatorio nell'indicata direzione, e perciò in questo senso non si potranno manifestare que piccioli movimenti menzionati da principio. Per lo contrario i due lati sud e nord del medesimo osservatorio sono liberi ed isolati nella totale loro altezza, e in questo senso la stabilità dell'edifizio è affidata semplicemente alla grossezza dei muri esterni ed alla tenacità dei materiali che li compongono. Infine il tetto di esso osservatorio a cagione dei due tagli meridiani, necessarj alle osservazioni degli astri culminanti, è diviso in tre parti l'una dall'altra in certa guisa staccate con pregiudizio ciò pure della stabilità.

§. 5. Ad un altezza di circa trentotto metri dal pian terreno sono collocate sulla torre le due principali macchine astronomiche. Tre livelli a bolla d'aria di eccellente costruzione servono a stabilire e riconoscere l'esatta posizione delle predette due macchine: uno serve allo strumento de' passaggi, e questo livello noterò col numero I: gli altri due sono destinati al circolo meridiano, dei quali l'uno, che indicherò col numero II, sta fisso costantemente sull'alidada colla direzione della sua bolla dal sud al nord: l'altro, che noterò col numero III, nell'ordinaria sua posizione è appeso entro una incassatura di legno posta verticalmente entro il massiccio che si erge nel centro della specola sulla sommità del grand' arco menzionato di sopra; le pareti di legno e la superficie di muro da esse conterminate sono spalmate di una vernice a colore caliginoso, onde togliere i riflessi ed i riverberi di luce pregiudicevoli allo stato normale della bolla. Il livello I è appeso, senza precauzione alcuna, mediante due staffe di ferro infisse nel muro esterno del lato est della specola, ed in molta prossimità al tetto che scola da questa parte. Il tubo del livello III è nella direzione est-ouest, o sia parallelo al lato sud dell'osservatorio: i tubi dei livelli I e II hanno direzione pressocchè parallela fra loro e perpendicolare alla precedente.

L'osservazione di più anni sulla bolla di questi tre livelli, nell'ordinaria loro sospensione, mi ha fatto scorgere delle singolarità che meritano di essere studiate, e le cose dette fin qui relative alla stabilità dell'osservatorio e alla particolare sospensione dei livelli, ci conduranno alla spiegazione dei fenomeni osservati.

§. 6. Un movimento quasi continuo, specialmente in certi tempi dell'anno, diretti ora dal nord al sud, ora dal sud al nord si osserva nella bolla dei livelli segnati I e II, mentre il livello III trovasi d'ordinario in una perfetta quiete. Cotale movimento essendo di sua natura complicato e complesso, io lo distinguerò come segue, e come realmente si manifesta: 1°. Periodica oscillazione della bolla:

2°. Trepidazione agli estremi di essa bolla durante il moto periodico: 3°. Agitazione convulsiva e forte della bolla che irregolarmente comparisce riguardo all'epoca ed alla violenza. L'oscillazione periodica si mostra in tutti tre i livelli, colla sola differenza, che nel livello I è molto sensibile, un pò meno nel livello II, appena si manifesta nel livello III. La trepidazione agli estremi della bolla è massima nel livello I, medicore nel livello II, nulla affatto nel livello III. L'agitazione convulsiva si manifesta in tutti, e solo più sensibile nei due primi.

§. 7. Il movimento periodico della bolla varia, a seconda delle diverse stagioni dell'anno, e procede nel modo seguente.

Nelle basse temperature d'inverno è piccolissimo e quasi insensibile, specialmente nelle giornate nuvolose: massimo nelle medie temperature, e relativamente più grande in primavera che in autunno: medio nelle temperature estive. Inoltre cotesto movimento della bolla segue costantemente il corso del sole: nel mattino la bolla trovasi verso il nord del tubo, nel dopo pranzo verso il sud, e di qui retrocede a misura che il sole si volge verso il nord. Gli estremi della bolla dall'una e dall'altra parte sono variabili relativamente allo spazio che percorrono entro il tubo, o sia non hanno un limite determinato nè di spazio, nè di tempo. In ogni modo però ho potuto assicurarmi che la bolla, giunge il mattino verso le nove ore, e mezza al suo massimo dalla parte di nord: verso le quattro di sera dalla parte di sud. Questa specie di regolarità si manifesta sensibilimente nelle giornate di lunga durata, vale a dire dall'aprile al settembre.

La quantità assoluta del movimento della bolla varia, non solo da stagione a stagione, come si è avvertito, ma varia pur anche da un giorno all'altro. Riscontrasi maggiore nelle giornate serene e calde, e relativamente minore nelle nuvolose e meno calde: e in proporzione tanto più grande quant'è maggiore la differenza di temperatura fra il giorno e la notte, e fra gli oggetti esposti al sole a quelli in ombra. Nelle giornate nuvolose di estate, comunque calde, il movimento della bolla è più lento, percorre minore spazio entro il tubo di quando i giorni sono sereni, e le ore del retrocedere dall'una parte e dall'altra sono diverse dal nuvolo al sereno.

§. 8. Il movimento periodico della bolla nei livelli I e II è sempre, o quasi sempre, accompagnato da una trepidazione o tremolio visibile agli estremi di essa bolla, mentre in quella del livello III non si osserva mai un consimile fenomeno. Cotesta trepidazione è in perfetto accordo col movimento periodico della bolla, in guisa tale che quando questo è massimo anche la trepidazione

è più forte, meno sensibile quando quello è minimo, e così in proporzione. Questa circostanza merita particolare attenzione, poichè a mio credere porge la spiegazione di esso tremolio, come si vedrà più innanzi.

L'agitazione convulsiva nella bolla si mostra dal più al meno in tutti tre i livelli in circostanza di vento impetuoso, e specialmente quando spira da sud a nord o in contraria direzione.

§. 9. L'escursione totale della bolla entro il tubo importerebbe, nel suo massimo, una inclinazione nell'asse del tubo di circa venti secondi in arco: cotale inclinazione è di gran lunga superiore a quella dovuta alla differenza di temperatura ai due estremi del livello; poichè il Professor ***Belli*** ha dimostrato, che un grado di differenza termometrica agli estremi del tubo cagiona una inclinazione nell'asse di soli quattordici secondi, e nell'ordinaria sospensione del livello I cotale differenza non puo essere che piccolissima, e forse appena sensibile, al termometro differenziale. Ond'è che la cagione principale del movimento in discorso si deve ripetere dalla forza dei raggi solari e del calorico, che inegualmente si diffonde e ingrossa i muri costituenti l'osservatorio. Ben è vero però che in tale supposizione la massima escursione della bolla dovrebbe mostrarsi nei grandi calori di estate, mentre le osservazioni, come si è già detto, la fanno conoscere nelle medie temperature, specialmente di primavera: ma a questo riguardo conviene riflettere che nei grandi calori estivi la bolla si accorcia in modo straordinario, e quindi il livello è molto meno sensibile di quando la bolla presenta una considerevole lunghezza entro il tubo. Nell'inverno la bolla abbraccia le novanta, e fino le cento, parti della scala segnata sul tubo: nel massimo caldo ne abbraccia quindici o tutto al più venti. Oltre a ciò si deve notare che ne' grandi calori estivi la differenza di temperatura fra il giorno e la notte e fra le diverse ore del giorno non è cosi sensibile come in primavera, prima che il calor del sole compenitri, e in certa guisa si equilibri nell'interno degli ambienti e de' diversi corpi sulla terrestre superficie. Alle due indicate cause si potrebbe aggiugnere anche una terza riferibile alla curvatura interna del tubo costituente il livello I. Misurando le parti della scala segnata sul tubo in diverse epoche dell'anno, si trova un valore diverso e propriamente massimo in estate, medio in primavera ed autunno, minimo nell'inverno. Da ciò si deduce che la curvatura nel mezzo del tubo è maggiore che altrove, quindi il livello meno sensibile all'epoca della minore lunghezza della bolla. Il valore di ogni parte della scala ridotto in arco è il seguente: in estate 5″,074; in primavera e autunno 0″,895; in inverno 0″,688.

§. 10. Due cause adunque, escludendo la terza, concorrono a produrre il totale movimento periodico nella bolla dei livelli di questa specola, e sono la differenza di temperatura agli estremi del tubo e l'ingrossamento o rigonfiamento dei muri nella parte direttamente battuta dal sole. Con isquisite sperienze non sarebbe forse difficile determinare partitamente l'ammontare di ciascheduna delle predette cause, ma di ciò non mi sono occupato minimamente. L'oggetto principale delle mie ricerche quello si era di rinvenire la cagione del tremolio agli estremi della bolla durante la sua periodica escursione, e credo di non essermi ingannanto attribuendolo appunto all'ingrossamento suaccennato dei muri. Imperocchè l'azione del calorico non si estende uniformamente a tutto il fabbricato, quand'anche le parti che lo compongono fossero apparentemente collocate in parità di circostanze, mentre la diversa conduttibilità pel calorico, le diverse modificazioni di superficie, nei materiali componenti i muri, la diversa sovraposizioni tenacità, e simili altre cagioni, si appongono ad una regolare ed uniforme diffusione del calore nel complesso del solido. Quindi è che gl'intimi movimenti della fabbrica debbono essere sommamente svariati, ma tuttavia sensibili al livello, e produrre nella bolla quella trepidazione, riconoscibile nella sola direzione di sud a nord, per la circostanza dei fabbricati contigui all'osservatorio, como si fece notare fin da principio.

L'agitazione convulsiva e forte nasce dall'impeto del vento contro la comprovata elasticità dei muri, ed anche a questo riguardo chiaro apparisce come esser debba maggiore nella direzione anzidetta.

§. 11. Il Direttore della Specola di Modena, Sigr. Professore ***Giuseppe Bianchi,*** in una lettera al Cavaliere Cerlini, astronomo di Milano, poscia negli atti del Reale osservatorio di Modena, e infine in una apposita memoria, inserita nel tomo ventunesimo della Società Italiana, ha parlato a lungo dei movimenti in discorso, ed ha cercato di darne una spiegazione, deducendola da moltiplice causa di natura diversa dalle esposte di sopra. Ma cotale spiegazione non parendomi troppo conforme alle immediate mie osservazioni, ho creduto opportuno di richiamare in proposito il resultato delle mie ricerche, onde mettere gli astronomi in avvertenza su tale argomento. Avrei io pure potuto riportare le tabelle delle osservazioni appositamente instituite, non che le avvertenze praticate, onde possibilmente eliminare la cause estranee, ma in uno scritto di questa natura ho creduto conveniente notare soltanto i risultati e le deduzioni che, a mio parere, si potevano giustamente stabilire.

Modena, giugno 1843.

25.

Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium.

(Auctore *F. Joachimsthal*, doct. phil.)

Si quaedam linea curvaturae plana est, omnia plana superficiem in lineae curvaturae punctis tangentia cum plano hujus curvae eundem angulum formant.

Sit aequatio superficiei

$$1. \quad z = f(x, y);$$

atque sectio plana in plano ipsarum x et y sita

$$2. \quad 0 = f(x, y),$$

sit linea curvaturae. Designentur $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ litteris p et q; est aequatio differentialis linearum curvaturae

$$3. \quad \frac{dx+p\,dz}{dp} = \frac{dy+q\,dz}{dq},$$

cui aequatio curvae (2.) satisfacere debet. Ex aequatione (2.) derivatur

$$4. \quad p\,dx+q\,dy = 0;$$

sive $dz = 0$, unde (3.) mutatur in

$$5. \quad \frac{dx}{dp} = \frac{dy}{dq},$$

quae, aequatione (4.) in auxilium vocata, transit

$$p\,dp+q\,dq = 0,$$

unde sequitur, ut sit

$$6. \quad p^2+q^2 = a,$$

ubi a quantitatem constantem denotat. Quum cosinus anguli inter planum tangens et planum (xy) sit $= \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}$, videmus, si curva contactus linea plana curvaturae est, inclinationem planorum, quae superficiei circumscribuntur, cum plano curvae contactus immutatam manere.

Si coordinatae superficie tanquam duarum variabilium λ et μ functiones ejusmodi datae sunt, ut aequationes $\lambda = \text{Const.}$, $\mu = \text{Const.}$ curvas curvaturae exhibeant, inter coëfficientes differentiales ipsarum x, y, z respectu λ et μ sumtos duae exstant relationes. Quarum una curvas inter se rectangulares

esse, altera lineas normales superficiei in duobus punctis infinite propinquis et in his curvis sitis concurrere exprimit. Sit brevitatis gratia:

$$7.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \mu}-\dfrac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \mu}=A, \\ \dfrac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \mu}-\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \mu}=B, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \mu}-\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \mu}=C. \end{cases}$$

Cum tangentes ad curvas $\lambda = \text{Const.}$, $\mu = \text{Const.}$ aequationibus dentur

$$\xi - x : \eta - y : \zeta - z = \frac{\partial x}{\partial \mu} : \frac{\partial y}{\partial \mu} : \frac{\partial z}{\partial \mu},$$

$$\xi - x : \eta - y : \zeta - z = \frac{\partial x}{\partial \lambda} : \frac{\partial y}{\partial \lambda} : \frac{\partial z}{\partial \lambda},$$

et curvae curvaturae inter se rectangulares sint, habemus relationem

$$8.\quad \frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu}+\frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu}+\frac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu}=0.$$

Est aequatio lineae rectae ad superficiem normalis

$$9.\quad \frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}$$

atque in punto priori (x, y, z) infinite proprinquo et in curva $\mu = \text{Const.}$ sito

$$10.\quad \frac{\xi - x - \frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda}{A+\frac{\partial A}{\partial \lambda}d\lambda} = \frac{\eta - y - \frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda}{B+\frac{\partial B}{\partial \lambda}d\lambda} = \frac{\zeta - z - \frac{\partial z}{\partial \lambda}d\lambda}{C+\frac{\partial C}{\partial \lambda}d\lambda}.$$

Si lineae (9.) et (10.) punctum commune habent, ut pro curvis curvaturae fieri debet, aequationes nancissimur

$$fA = g\left(A+\frac{\partial A}{\partial \lambda}d\lambda\right)+\frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda,$$

$$fB = g\left(B+\frac{\partial B}{\partial \lambda}d\lambda\right)+\frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda,$$

$$fC = g\left(C+\frac{\partial C}{\partial \lambda}d\lambda\right)+\frac{\partial z}{\partial \lambda}d\lambda,$$

ubi f et g factores determinati sunt. Quibus eliminatis hanc relationem obtinemus

$$11.\quad 0 = \frac{\partial A}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}C-\frac{\partial z}{\partial \lambda}B\right)+\frac{\partial B}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}A-\frac{\partial x}{\partial \lambda}C\right) + \frac{\partial C}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}A-\frac{\partial y}{\partial \lambda}B\right);$$

Est autem

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} C - \frac{\partial z}{\partial \lambda} B$$
$$= \frac{\partial x}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu}\right) - \frac{\partial x}{\partial \mu}\left(\frac{\partial x^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial y^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial z^2}{\partial \lambda^2}\right),$$

vel, aequationis (8.) ratione habita,

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} C - \frac{\partial z}{\partial \lambda} B = -\frac{\partial x}{\partial \mu} E,$$
$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} A - \frac{\partial x}{\partial \lambda} C = -\frac{\partial y}{\partial \mu} E,$$
$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} B - \frac{\partial y}{\partial \lambda} A = -\frac{\partial z}{\partial \mu} E,$$

ubi brevitatis causa E loco $\frac{\partial x^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial y^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial z^2}{\partial \lambda^2}$ scriptum est. Quibus relationibus (11.) mutatur in

$$12. \quad 0 = \frac{\partial A}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial B}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial C}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu}.$$

Habemus aequationem identicam

$$A\frac{\partial x}{\partial \mu} + B\frac{\partial y}{\partial \mu} + C\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0;$$

cujus differentiatione obtinemus hanc:

$$\frac{\partial A}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial B}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial C}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu} + A\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} + B\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu} + C\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \mu} = 0,$$

unde (10.) transit in

$$13. \quad A\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} + B\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu} + C\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \mu} = 0.$$

Eeandem formulam invenires si curva $\lambda =$ Const. disquireretur. Nacti sumus igitur hanc propositionem:

Si coordinatae rectangulares superficiei cujusdam ita velut duarum variabilium λ et μ functiones exhibentur, ut lineae aequationibus $\lambda =$ Const. et $\mu =$ Const. definitae curvae curvaturae fiant; functiones x, y, z conditionibus satisfaciunt:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu} - \frac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \mu}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)$$
$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \mu}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu}\right) = 0.$$

esse, altera lineas normales superficiei in duobus punctis infinite propinquis et in his curvis sitis concurrere exprimit. Sit brevitatis gratia:

$$7.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \mu} - \dfrac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \mu} = A, \\ \dfrac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \mu} - \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \mu} = B, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \mu} - \dfrac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \mu} = C. \end{cases}$$

Cum tangentes ad curvas $\lambda = \text{Const.}$, $\mu = \text{Const.}$ aequationibus dentur

$$\xi - x : \eta - y : \zeta - z = \frac{\partial x}{\partial \mu} : \frac{\partial y}{\partial \mu} : \frac{\partial z}{\partial \mu},$$

$$\xi - x : \eta - y : \zeta - z = \frac{\partial x}{\partial \lambda} : \frac{\partial y}{\partial \lambda} : \frac{\partial z}{\partial \lambda},$$

et curvae curvaturae inter se rectangulares sint, habemus relationem

$$8.\quad \frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0.$$

Est aequatio lineae rectae ad superficiem normalis

$$9.\quad \frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}$$

atque in punto priori (x, y, z) infinite proprinquo et in curva $\mu = \text{Const.}$ sito

$$10.\quad \frac{\xi - x - \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}{A + \dfrac{\partial A}{\partial \lambda} d\lambda} = \frac{\eta - y - \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{B + \dfrac{\partial B}{\partial \lambda} d\lambda} = \frac{\zeta - z - \dfrac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda}{C + \dfrac{\partial C}{\partial \lambda} d\lambda}.$$

Si lineae (9.) et (10.) punctum commune habent, ut pro curvis curvaturae fieri debet, aequationes nancissimur

$$fA = g\left(A + \frac{\partial A}{\partial \lambda} d\lambda\right) + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda,$$

$$fB = g\left(B + \frac{\partial B}{\partial \lambda} d\lambda\right) + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda,$$

$$fC = g\left(C + \frac{\partial C}{\partial \lambda} d\lambda\right) + \frac{\partial z}{\partial \lambda} d\lambda,$$

ubi f et g factores determinati sunt. Quibus eliminatis hanc relationem obtinemus

$$11.\quad 0 = \frac{\partial A}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} C - \frac{\partial z}{\partial \lambda} B\right) + \frac{\partial B}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} A - \frac{\partial x}{\partial \lambda} C\right) + \frac{\partial C}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} A - \frac{\partial y}{\partial \lambda} B\right);$$

Est autem

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} C - \frac{\partial z}{\partial \lambda} B$$

$$= \frac{\partial x}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu}\right) - \frac{\partial x}{\partial \mu}\left(\frac{\partial x^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial y^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial z^2}{\partial \lambda^2}\right),$$

vel, aequationis (8.) ratione habita,

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} C - \frac{\partial z}{\partial \lambda} B = -\frac{\partial x}{\partial \mu} E,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} A - \frac{\partial x}{\partial \lambda} C = -\frac{\partial y}{\partial \mu} E,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} B - \frac{\partial y}{\partial \lambda} A = -\frac{\partial z}{\partial \mu} E,$$

ubi brevitatis causa E loco $\frac{\partial x^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial y^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial z^2}{\partial \lambda^2}$ scriptum est. Quibus relationibus (11.) mutatur in

$$12. \quad 0 = \frac{\partial A}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial B}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial C}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu}.$$

Habemus aequationem identicam

$$A\frac{\partial x}{\partial \mu} + B\frac{\partial y}{\partial \mu} + C\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0;$$

cujus differentiatione obtinemus hanc:

$$\frac{\partial A}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial B}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial C}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu} + A\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} + B\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu} + C\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \mu} = 0,$$

unde (10.) transit in

$$13. \quad A\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu} + B\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial \mu} + C\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \mu} = 0.$$

Eeandem formulam invenires si curva $\lambda =$ Const. disquireretur. Nacti sumus igitur hanc propositionem:

Si coordinatae rectangulares superficiei cujusdam ita velut duarum variabilium λ et μ functiones exhibentur, ut lineae aequationibus $\lambda =$ Const. et $\mu =$ Const. definitae curvae curvaturae fiant; functiones x, y, z conditionibus satisfaciunt:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial \mu}\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu} - \frac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \mu}\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial \lambda \partial \mu}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \mu}\right) = 0.$$

Quae relationes in quaestionibus de superficiebus, curvis curvaturae datis, perutiles sunt; exempli gratia in hoc problemate solvendo:

Determinentur superficies, quarum lineae curvaturae unius systematis in planis per axem fixum (ipsarum z) transeuntibus sitae sint. Quae superficies, ut invenimus, hoc aequationum systemate exhibentur:

$$x = \frac{\mu \sin L \sin \lambda}{1 + \cos L \cos M},$$

$$y = \frac{\mu \sin L \cos \lambda}{1 + \cos L \cos M},$$

$$z = \frac{\mu \cos L \sin M}{1 + \cos L \cos M} + \int_a^{\mu} \operatorname{cotang} M \, d\mu,$$

ubi L et M ipsarum λ et μ functiones arbitrarias denotant. Si L constanti $\frac{1}{2}\pi$ aequalis sumitur, aequationes praecedentes in has transeunt:

$$x = \mu \sin \lambda,$$

$$y = \mu \cos \lambda,$$

$$z = \int_a^{\mu} \operatorname{cotang} M \, d\mu,$$

quae superficiem rotatione ortam definiunt. Problema simile celeb. ***Monge*** in opere clarissimo (Applic. de l'Analyse etc. pg. 139) tractavit, scilicet hoc: inveniantur superficies, quarum lineae curvaturae unius systematis in planis parallelis sitae sint. Quod nostris relationibus 7. *a.* sine ullo negotio perficitur.

Berolini, m. Aug. 1845.

Druckfehler.

Im sechs und zwanzigsten Bande.

Seite 185 Z. 9 u. 10 v. o. statt „unendlichen Körpers, oder" lies „Ellipsoïdes, oder vielmehr"
— 191 Formel 10. nach $\sqrt{(1-\varrho^2)^{n-m-4}}$ l. — etc.)
— — Z. 9 v. u. st. sei, l. ist, sei
— — — 8 v. u. lasse man „sei" weg.
— 197 — 2 v. o. st. $f(Q_1, \varphi_1)$ l. $f(\theta_1, \varphi_1)$
— 199 Formel 19*. st. tang l. log
— 200 Z. 5 u. 4 v. u. st. aufsteigt oder absteigt, l. absteigt oder aufsteigt,
— 201 Formel 23. st. $\frac{\partial^{n-m}(x^2-1)^n}{\partial x^{n-m}}$ l. $\frac{\partial^{n-m} q_n}{\partial x^{n-m}}$
— — Z. 15 v. o. st. sein l. angenommen werden

Im sieben und zwanzigsten Bande.

Seite 80 Z. 17 st. dem Product l. dem doppelten Product
— — — 20 st. der Hälfte l. dem Einfachen
— 90 — 25 st. $\frac{-\gamma x+\delta y}{\varepsilon}$ l. $\frac{-\gamma x+\alpha y}{\varepsilon}$
— — — 29 st. $\begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\beta, & \alpha \end{pmatrix}$ l. $\begin{pmatrix} \delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha \end{pmatrix}$
— 91 — 1 st. foldende l. folgende
— 272 — 27 st. $\sqrt[3]{(pp_1)} : \sqrt[3]{(pp_2)}$ l. $\sqrt[3]{(pp_1)} \times \sqrt[3]{(pp_2)}$
— 283 — 9 st. der Werthe l. der ganzen Werthe
— 291 — 10 st. von ψ l. von Ψ
— 304 — 27 st. $\left[\frac{k}{p_1}\right] r^k = T$ l. $\Sigma\left[\frac{k}{p_1}\right] r^k = T$
— 308 — 1 st. $\left[\frac{-1}{l'}\right]$ l. $\left[\frac{-l}{l'}\right]$
— — — 15 st. bestimmte l. unbestimmte
— 329 — 7 st. $(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}\left(\frac{q}{p}\right)$ l. $(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}\left(\frac{p}{q}\right)$

Im acht und zwanzigsten Bande.

Seite 1 Z. 3 v. o. st. *Eisenlohe* l. *Eisenlohr*
— 2 — 1 v. u. streiche das $\varkappa$ weg, welches vor der ersten Formel als Factor steht.
— 8 — 11 v. o. st. $1^{2m|-1}$ l. $1^{2m|1}$
— — — 5 v. u. st. $2m+2$ (im Nenner) l. $2m-2$
— — — 4 - - - $2m-1$ - - - - $2m$
— 9 — 4 v. u. st. B_{2m-1} l. B_{2n-1}

Seite 11 Z. 6 v. o. im Nenner des zweiten Gliedes st. $2n+1$ l. $2n-1$
— — — 8 v. o. st. $1^{m-3|1}$ l. $1^{2n-3|1}$
— — — 9 v. o. st. b_{p-1} l. b_{2p-1}
— 14 — 2 v. o. st. $(2n)^{p-1|-1}$ l. $(2n)^{2p-1|-1}$
— — — 12 v. o. st. $1^{2q-2|1}$ l. $3^{2q+2|1}$
— 17 — 2 v. o. st. $R(q,1)$ l. $R(9,1)$
— — — 16 v. o. st. $r(3n-1,1)$ l. $r(2n-1,1)$
— 19 — 3 v. o. st. Σ_p l. Σ_q
— 41 — 26 au lieu de $S^{q+1}-SS_p$ lisez $S^{q+1}-SS_q$
— 42 — 1 au lieu de $S(S^p-S_q)$ l. $S(S^q-S_q)$
— — — 2 au lieu de „à gauche" l. „à droite"
— 46 — 23 au lieu de $(p)<1$ l. $N(p)<1$
— 47 — 13 au lieu de $p-1$ l. $p=1$
— 51 — 1 au lieu de 5^2 l. 5^3
— 53 — 8 au lieu de „les deux nombres" l. „deux nombres"
— 54 — 16 au lieu de $\left[\frac{q_1}{p_1}\right]\cdot S$ l. $\left[\frac{q^2}{p_1}\right]\cdot S$
— — — 28, après le mots: „divisible par q" il faut insérer „(voir la ***Remarque*** à la fin de ce mémoire)."
— 58 — 12 au lieu de $\left[\frac{p_1}{p}\right]$ l. $\left[\frac{p_1}{q}\right]$
— 228 — 1 st. „Schafft man die Bedingungscongruenz durch die Division mit k weg" l. „Schafft man aus der Bedingungscongruenz k durch die Division weg"
— 230 — 2 st. „Alle Glieder" l. „Alle übrigen Glieder"
— 284 — 9 loco „minimoque" lege „nimiumque"
— — — 10 loco „perspicuum" lege „perspicuam"
— — — 19 loco „mojor" lege „major"
— — — 25 loco „integrati" lege „integrata"
— 285 — 6 loco $\frac{3}{2}$ lege $\frac{2}{3}$
— — — 25 loco 5^{k-3} lege 5^{k-2}

Im dreifsigsten Bande.

Page 7 ligne 17. Omettre „en suivant la route tracée par M. ***Boole***." Cela se rapportait à une partie du mémoire qui n'est pas imprimé.
— 8 — 10 et 15, et page 9 ligne 4 d'en bas. Il faut mettre le signe † d'abord dessus la première colonne, puis dessus la seconde colonne etc. des expressions symboliques.
— 23 — 8 d'en bas. Pour „de l'ordre" lisez „de l'ordre p"
— 24 — 7. Insérez „en réduisant cependant à la moitié le coëfficient de ce terme."
— 32 — 11 au lieu de $\overset{3}{U}$ lisez $\overset{3}{U}{}'^0$
— 37 — 6 au lieu de „ou même d'une seule des fonctions" lisez „ou même d'une ou de plusieurs fonctions"

26.

Inhalts-Verzeichnifs I.

der dritten zehn Bände des Journals für die reine und angewandte Mathematik, 21 bis 30, herausgegeben zu Berlin in den Jahren 1841 bis 1845 von *A. L. Crelle;* nach alphabetischer Ordnung der Namen der Verfasser.

Dr. A. T. Bergius, ad acad. Upsaliens. docens Astr.

		Band.	Heft.	Seite.
578.	De orbitis cometarum ex observationibus determinandis commentatio.	25.	III.	189.

Ant. Bernardi, dottore a Modena.

579.	Memoria interno agl'intimi movimenti osservati nei muri dell'Osservatorio di Modena.	30.	IV.	341.

Dr. E. G. Björling, ad acad. Upsal. docens Mathes.

580.	In determinationem coëfficientium C_n^k in pag. 247 seq. Tom. 25. (No. 632.) hujus diarii relatarum.	28.	III.	284.

Balth. Boncompagni à Rome.

581.	Recherches sur les intégrales définies.	25.	I.	74.

C. W. Borchardt, Dr. phil. zu Berlin.

582.	Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hülfe man die secularen Störungen der Planeten bestimmt.	30.	I.	38.

Brix, Fabriken-Commissionsrath zu Berlin.

583.	Über die Bestimmung des Inhalts und des Schwerpuncts einer gewissen Gattung von Körpern, die zwischen zwei parallelen Endflächen enthalten sind.	25.	II.	129.

O. J. Broch, Professor der Mathematik zu Christiania.

584.	Mémoire sur les fonctions de la forme $\int x^{s-yp-1} f(x^p) R(x^p)^{\pm \frac{s}{rp}} \partial x$. (Présenté à l'académie des sciences à Paris le 19 avril 1841, approuvé et désigné à être inséré dans le Recueil des Savants étrangers le 10 mai 1841.)	23.	II.	145.
		23.	III.	201.

Brune, Rechnungsrath zu Berlin.

585.	Eine Eigenschaft des Vierecks.	22.	IV.	379.

		Band.	Heft.	Seite.
	E. Catalan, Répétiteur à l'école polytechnique à Paris.			
586.	Note extraite d'une lettre adressée à l'éditeur de ce journal. . .	27.	II.	192.
	A. Cayley, Privatdocent an der Universität zu Cambridge.			
587.	Note sur deux formules données par Mrs. *Eisenstein* et *Hesse*. .	29.	I.	54.
588.	Mémoire sur les Hyperdéterminants. (Traduction d'un mémoire anglais inséré dans le „Cambridge mathematical journal" avec quelques additions.)	30.	I.	1.
	Th. Clausen zu München.			
589.	Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrirbar ist. . .	21.	IV.	375.
	A. L. Crelle, Herausgeber dieses Journals.			
590.	Einige Bemerkungen über die Mittel zur Schätzung der Convergenz der allgemeinen Entwicklungsreihen mit Differenzen und Differentialen.	22.	III.	249.
591.	Aufgaben.	25.	IV.	395.
		27.	III.	283.
592.	Encyklopädische und elementare Darstellung der Theorie der Zahlen.	27.	I.	6.
		27.	II.	107.
		27.	IV.	330.
		28.	II.	111.
		29.	I.	58.
		29.	II.	103.
593.	Démonstration d'un théorème de Mr. *Slonimsky* sur les nombres, avec une application de ce théorème au calcul des chiffres. . . .	30.	III.	215.
	Z. Dahse in Wien.			
594.	Der Kreis-Umfang für den Durchmesser 1 auf 200 Decimalstellen berechnet.	27.	III.	198.
	Dr. Druckenmüller, Gymnasial-Oberlehrer zu Düsseldorf.			
595.	Über derivirte Linien.	26.	I.	1.
	Dr. O. Eisenlohr in Carlsruhe.			
596.	Entwicklung der Functionsweise der Bernoullischen Zahlen. . .	28.	III.	193.
	G. Eisenstein, Dr. phil. zu Berlin.			
597.	Théorèmes sur les formes cubiques, et solution d'une équation du 4me degré à quatre indéterminées.	27.	I.	75.
598.	Über die Anzahl der quadratischen Formen, welche in der Theorie der complexen Zahlen zu einer reellen Determinante gehören. . .	27.	I.	80.
599.	Allgemeine Auflösung der Gleichungen von den ersten vier Graden.	27.	I.	81.
600.	Untersuchungen über die cubischen Formen mit zwei Variabeln. .	27.	II.	89.
601.	Über eine merkwürdige identische Gleichung.	27.	II.	105.
602.	Bemerkungen zu den elliptischen und Abelschen Transcendenten. .	27.	II.	185.
603.	Transformations remarquables de quelques séries.	27.	III.	193.
604.	Beiträge zur Kreistheilung.	27.	III.	269.
605.	Elementare Ableitung einer merkwürdigen Relation zwischen zwei unendlichen Producten.	27.	IV.	285.
606.	Beweis des Reciprocitätssatzes für die cubischen Reste in der Theorie der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen.	27.	IV.	289.

		Band.	Heft.	Seite.
607.	Über die Anzahl der quadratischen Formen in den verschiedenen complexen Theorieen.	27.	IV.	311.
608.	Einfacher Algorithmus zur Bestimmung des Werths von $\left(\frac{a}{b}\right)$. . .	27.	IV.	317.
609.	Eigenschaften und Beziehungen der Ausdrücke, welche bei der Auflösung der allgemeinen cubischen Gleichungen erscheinen. . . .	27.	IV.	319.
610.	Neuer und elementarer Beweis des Legendreschen Reciprocitäts-Gesetzes.	27.	IV.	322.
611.	Aufgaben und Lehrsätze.	27.	I.	86.
		27.	III.	281.
612.	Nachtrag zum cubischen Reciprocitätssatze für die aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen. Criterium des cubischen Characters der Zahl 3 und ihrer Theiler.	28.	I.	28.
613.	Transformations remarquables de quelques séries.	28.	I.	36.
614.	La loi de reciprocité tirée des formules de Mr. *Gauss* sans avoir déterminé préalablement le signe du radical.	28.	I.	41.
615.	Neuer Beweis und Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes.	28.	I.	44.
616.	Entwicklung von $\alpha^{\alpha^{n^{\alpha}}}$	28.	I.	49.
617.	Lois de reciprocité.	28.	I.	53.
618.	Einfacher Beweis und Verallgemeinerung des Fundamentaltheorems für die biquadratischen Reste.	28.	III.	223.
619.	Geometirscher Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste.	28.	III.	246.
620.	Allgemeine Untersuchungen über die Formen dritten Grades mit drei Variabeln, welche der Kreistheilung ihre Entstehung verdanken. .	28.	IV.	289.
		29.	I.	19.
621.	Aufgaben.	28.	II.	191.
622.	Theorema.	29.	I.	96.
623.	Application de l'algèbre à l'Arithmétique transcendante.	29.	II.	177.
624.	Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.			
	I. Ableitung des biquadratischen Fundamentaltheorems aus der Theorie der Lemniscatenfunction, nebst Bemerkungen zu den Multiplications- und Transformations-Formeln.	30.	III.	185.
	II. Neuer Beweis der Summationsformeln.	30.	III.	211.

Dr. Enke, Professor der Mathematik an der Universität zu Berlin und Director der Sternwarte daselbst.

625.	Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen.	22.	III.	193.
626.	Bemerkungen zu der Abhandlung Nr. 22. Band 26. Heft 4. dieses Journals (hier unten Nr. 719.).	28.	III.	213.

Dr. Fasbender, Conrector zu Iserlohn.

627.	Beweis eines von Herrn Professor *Steiner* aufgestellten Lehrsatzes Band 15. Heft 4. Nr. 26. 1. S. 373. (Nr. 549. im Verzeichnifs des Inhalts von Band 11—20.)	25.	II.	186.
628.	Ein Vieleck mit gegebnen Seiten ist am gröfsten, wenn seine Ecken in einem Kreise liegen.	26.	II.	181.
629.	Über die gleichseitigen Dreiecke, welche um ein gegebenes Dreieck gelegt werden können.	30.	III.	230.

		Band.	Heft.	Seite.
	Dr. Gaufs, Geheimer Hofrath, Professor der Mathematik an der Universität, Director der Sternwarte etc. zu Göttingen.			
630.	Elementare Ableitung eines zuerst von *Legendre* aufgestellten Lehrsatzes der sphärischen Trigonometrie.	22.	I.	96.
	Dr. Grafsmann, Gymnasial-Oberlehrer zu Stettin.			
631.	Theorie der Centralen.	24.	III.	262.
		24.	IV.	372.
		25.	I.	57.
	Dr. Grunert, Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswalde.			
632.	Über die Summirung der Reihen von der Form $A\varphi(0)$, $A_1\varphi(1)x$, $A_2\varphi(2)x^2$, ... $A_n\varphi(n)x^n$, wo A eine beliebige constante Gröfse, A_n eine beliebige und $q(n)$ eine ganze rationale algebraische Function der positiven ganzen Zahl n bezeichnet.	25.	III.	240.
	Dr. C. Gudermann, Professor der Mathematik an der Universität zu Münster.			
633.	Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale. . .	21.	III.	240.
		23.	IV.	301.
		25.	IV.	281.
634.	De curvis aequidistantibus sphaericis disquisitiones generales. . .	25.	II.	119.
635.	Additamentum ad functionis $\Gamma a = \int_0^x e^{-x}.x^{a-1}\partial x$ theoriam. . .	29.	III.	209.
	Dr. Hädenkamp zu Hamm.			
636.	Über Transformation vielfacher Integrale.	22.	II.	184.
637.	Über Abelsche Integrale.	25.	II.	178.
	E. Heine, Dr. phil. zu Berlin.			
638.	Über einige Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen.	26.	III.	185.
639.	Beiträge zur Theorie der Anziehung und der Wärme.	29.	III.	185.
	Dr. F. Heinen, Director der Realschule zu Düsseldorf.			
640.	Über einige Sätze des Herrn Professor *Steiner*.	23.	IV.	289.
	Dr. Hesse, Professor der Mathematik an der Universität zu Königsberg in Preufsen.			
641.	Über die Construction der Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen beliebige neun Puncte gegeben sind.	24.	I.	36.
642.	Über das geradlinige Rechteck auf dem Hyperboloïd.	24.	I.	40.
643.	De integratione aequationis differentialis partialis $$A_1 - A_2\frac{\partial x}{\partial x_2} - A_3\frac{\partial x_1}{\partial x_3} \ldots - A_{n-1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} + A_n\left(x_2\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial x_1}{\partial x_3} \ldots + x_{n-1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} - x_1\right) = 0$$ designantibus $A_1, A_2, \ldots A_n$ functiones quaslibet variabilium $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$ lineares.	25.	II.	171.

		Band.	Heft.	Seite.
644.	Über die lineäre Construction des achten Schnittpuncts dreier Oberflächen zweiter Ordnung, wenn sieben Puncte denselben gegeben sind.	26.	II.	147.
645.	Über die Bildung der Endgleichung, welche durch Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen hervorgeht, und die Bestimmung ihres Grades.	27.	I.	1.
646.	Über die Elimination der Variabeln aus 3 algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit 2 Variabeln.	28.	I.	68.
647.	Über die Wendungen der Curve 3ter Ordnung. (Fortsetzung von Nr. 646.)	28.	II.	97.
	Dr. C. J. D. Hill, Professor der Mathematik an der Universität zu Lund in Schweden.			
648.	Fragmenta theoriae aequationum lineariter differentialium.	25.	I.	1.
649.	De radicibus rationalibus aequationis Riccatianae $\partial y+a+by+cy^2=0$, ubi a, b, c functiones sunt rationales ipsius x.	25.	I.	22.
650.	Disquisitio qualis aequatio differentialis gaudeat integrali algebraico completo? qualisve primarie transcendenti? quaenamque forma integrali competat.	25.	I.	38.
	A. Jacobi, Königlich-Preufsischer Artillerie-Premier-Lieutenant a. D. zu Breslau.			
651.	Über Reihen von Kegelschnitten in einer Ebene, welche sich in denselben vier Puncten schneiden.	23.	III.	243.
	Dr. C. G. J. Jacobi, Professor der Mathematik an der Universität zu Königsberg in Preufsen.			
652.	Elementarer Beweis einer merkwürdigen analytischen Formel; nebst einigen aus ihr folgenden Zahlensätzen.	21.	I.	13.
653.	De formatione et proprietatibus Determinantium.	22.	IV.	285.
654.	De Determinantibus functionalibus.	22.	IV.	319.
655.	De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum.	22.	IV.	360.
656.	Zur combinatorischen Analysis.	22.	IV.	372.
657.	Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibus differentialibus partialibus linearibus primi ordinis.	23.	I.	1.
658.	De integratione aequationis differentialis $(A+A'x+A''y)(x\partial y-y\partial x)-(B+B'x+B''y)\partial y+(C+C'x+C''y)\partial x=0$.	24.	I.	1.
659.	Demonstratio nova theorematis Abeliani.	24.	I.	28.
660.	De motu puncti singularis.	24.	I.	5.
661.	Über die Entwicklung des Ausdrucks $(aa-2aa'(\cos\omega\cos\varphi+\sin\omega\sin\varphi\cos(\delta-\delta')+a'a')^{\frac{1}{2}}$.	26.	I.	81.
662.	Zur Theorie der elliptischen Functionen.	26.	II.	93.
663.	Sur l'élimination des noeuds dans le problème de trois corps. (Extrait des comptes rendus des séances de l'académie des sciences de Paris, séance du lundi 8 Août 1842.)	26.	II.	115.
664.	Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi.	27. 29. 29.	III. III. IV.	199. 213. 333.
665.	Sulla condizione di uguaglianza di due radici dell'equazione cubica, della quale dipendono gli assi principali di una superficie del second'ordine.	30.	I.	46.

		Band.	Heft.	Seite.
666.	Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen.	30.	I.	51.
667.	Neues Theorem der analytischen Mechanik. (Aus den Monatsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1838.)	30.	II.	117.
668.	Über die Additionstheoreme der Abelschen Integrale zweiter und dritter Gattung.	30.	II.	121.
669.	Über die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochene rationale Function.	30.	II.	127.
670.	Über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. (Auszug eines Schreibens an die Berliner Akad. d. W. und abgedruckt aus den Monatsberichten derselben von 1837.)	30.	II.	166.
671.	Note sur les fonctions Abeliennes, lue le 29 mai 1843. (Tiré du Bulletin de la classe phys. math. de l'Acad. Imp. des sciences de St. Petersbourg Tome II. No. 7.)	30.	II.	183.
672.	Über einige die elliptischen Functionen betreffenden Formeln. . .	30.	III.	269.

Dr. Joachimsthal, Gymnasiallehrer zu Berlin.

673.	Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi gradus.	26.	II.	155.
674.	Über die Normalen der Ellipse und des Ellipsoïdes.	26.	II.	172.
675.	Demonstratio theorematum ad superficies curvas spectantium. . .	30.	IV.	347.

Chr. Jürgensen, Professor der Mathematik an der Universität zu Copenhagen.

676.	Remarques générales sur les transcendantes à différentielles algébriques.	23.	II.	126.
677.	Note relative à un mémoire de Mr. *Richelot* sur quelques intégrales définies.	23.	II.	142.

L. Kronecker, Stud. phil. zu Berlin.

678.	Beweis, dafs für jede Primzahl p die Gleichung $1+x+x^2....+x^{p-1}=0$ irreductibel ist.	29.	III.	280.

Dr. E. E. Kummer, Professor der Mathematik an der Universität zu Breslau.

679.	Über die Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationaler Formeln entstehen.	21.	I.	74.
		21.	III.	193.
		21.	IV.	328.
680.	Eine Aufgabe, betreffend die Theorie der cubischen Reste. . . .	23.	III.	285.
681.	Bemerkungen über die cubischen Gleichungen, durch welche die Haupt-Axen der Flächen zweiten Grades bestimmt werden. . .	26.	III.	268.
682.	Über die Divisoren gewisser Formen von Zahlen, welche aus der Theorie der Kreistheilung entstehen.	30.	II.	107.

Dr. Lehmus, Professor der Mathematik zu Berlin.

683.	Den einen Kreis am innigsten osculirenden Kegelschnitt zu finden.	21.	III.	235.
684.	Resultate der Auflösung von drei geometrischen Aufgaben; für Liebhaber des algebraischen Calculs.	27.	I.	84.

		Band.	Heft.	Seite.
	Dr. G. Lejeune-Dirichlet, Professor der Mathematik an der Universität zu Berlin.			
685.	Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la thèorie des nombres. Seconde partie.	21.	I.	1.
		21.	II.	134.
686.	Auszug aus einer in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 5. März 1840 vorgelesenen Abhandlung.	21.	I.	98.
687.	Untersuchungen über die Theorie der complexen Zahlen. (Auszug aus einer der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Mai 1841 vorgelesenen Abhandlung.)	22.	IV.	375.
688.	Recherches sur les formes quadratiques à coëfficients et à indéterminées complexes.	24.	IV.	291.
	Lobatschewsky, recteur de l'université de Cazan.			
689.	Probabilité des résultats moyens d'observations repetées.	24.	II.	164.
	Dr. A. Luchterhandt, Gymnasial-Oberlehrer zu Marienwerder.			
690.	Über die Bedingung, dafs fünf Puncte auf der Oberfläche einer Kugel liegen.	23.	IV.	375.
	L. J. Magnus, Dr. phil. zu Berlin.			
691.	Über die Methode, den Grad einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung zu finden.	26.	IV.	365.
	C. O. Meyer, Candidat der Mathematik zu Königsberg in Preufsen.			
692.	De aequilibrii formis ellipsoïdicis.	24.	I.	44.
	Dr. Ferd. Minding, Professor der Mathematik an der Universität zu Dorpat.			
693.	Über die Bestimmung des Grades einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung.	22.	II.	178.
694.	Propositiones quaedam de integralibus functionum algebraicarum unius variabilis, e principiis Abelianis derivatae.	23.	III.	255.
695.	Erwiderung auf den Artikel 23. im 26. Bande dieses Journals. (Nr. 691. in diesem Verzeichnifs.)	27.	IV.	379.
	Dr. A. F. Möbius, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig.			
696.	Anwendung der Statik auf die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften.	21.	I.	64.
		21.	II.	156.
697.	Geometrische Eigenschaften einer Factorentafel.	22.	III.	276.
698.	Entwicklungen einiger trigonometrischen Formeln durch Hülfe der Lehre von den Doppelschnitts-Verhältnissen.	24.	I.	85.
699.	Die von Herrn *Luchterhand* am Schlusse des 23. Bandes (Nr. 690. dieses Verzeichnisses) mitgetheilte Bedingung, unter welcher fünf Puncte in einer Kugelfläche liegen, aus einem barycentrischen Princip abgeleitet.	26.	I.	26.
700.	Über die Zusammensetzung gerader Linien und eine daraus entspringende neue Begründungsweise des barycentrischen Calculs.	28.	I.	1.

		Band.	Heft.	Seite.
	Dr. G. H. F. Nesselman, Professor an der Universität zu Königsberg in Preufsen.			
701.	Beiträge zur Chronologie.	26.	I.	32.
	Dr. Öttinger, Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg im Br.			
702.	Über die Zerlegung gebrochner algebraischer rationaler Functionen in Partialbrüche.	22.	I.	63.
		22.	II.	148.
703.	Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung.	26.	III.	217.
		26.	IV.	311.
		30.	III.	232.
		30.	IV.	296.
	Dr. Ferd. Piper, Professor der Theologie an der Universität zu Berlin.			
704.	Zur Kirchenrechnung, Formeln und Tafeln.	22.	II.	97.
	J. Plana, prof. des math. et directeur de l'observatoire de Turin.			
705.	Appendice au mémoire sur l'attraction de l'ellipsoïde homogène, tome 20 de ce journal. (Nr. 494. des Inhalts-Verzeichnisses von Band 11 — 20.)	26.	II.	132.
	Dr. Plücker, Professor der Mathematik an der Universität zu Bonn.			
706.	Aphorismen aus der Geometrie des Raums.	24.	I.	60.
		24.	III.	283.
	J. L. Raabe, Professor der Mathematik an der Universität zu Zürich.			
707.	Über die Summation der ohne Ende fortlaufend harmonisch-periodischen Reihen und über die Reduction des Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\frac{\partial x}{x}$	23.	II.	105.
		25.	II.	160.
708.	Angenäherte Bestimmung der Factorenfolge $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots n = \Gamma(1+n) = \int x^n e^{-x}\partial x$, wenn n eine sehr grofse Zahl ist.	25.	II.	146.
		27.	I.	10.
709.	Ableitung der Reihe für $\arc\sin x$, mit Zuziehung der Grenzgleichungen $\lim. \sin x = 0$ und $\lim. \cos x = 0$, wo die Grenzzeichen auf das unbestimmte unendliche Wachsen von x Bezug haben.	25.	II.	169
710.	Reductionen des $p$fachen Integral-Ausdrucks $\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(a_1x_1^{n_1}+a_2x_2^{n_2}\ldots+a_px_p^{n_p})x_1^{r_1-1}x_2^{r_2-1}\ldots x_p^{r_p-1}\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_p$, in welchem $a_1, a_2, \ldots a_p, n_1, n_2, \ldots n_p, r_1, r_2, \ldots r_p$ constante Gröfsen, $x_1, x_2, \ldots x_p$ die Integrations-Variabeln sind und φ eine beliebige Function ist, auf ein einfaches, dieselbe Function φ enthaltendes Integral.	28.	I.	19.
	Dr. Radike, Professor an der Universität zu Bonn.			
711.	Einige Bemerkungen über die Principien der Cauchyschen Residuenrechnung.	25.	III.	216.

		Band.	Heft.	Seite.
	C. Ramus, Professor der Mathematik zu Copenhagen.			
712.	Note sur une propriété des équations différentielles linéaires à deux variables.	23.	IV.	372.
713.	De integralibus differentialium algebraicarum.	24.	I.	69.
714.	Demonstration d'un théorème sur quelques intégrales définies.	24.	III.	257.
715.	Démonstration d'un théorème sur les équations différentielles linéaires à deux variables.	24.	III.	260.
716.	Sur une question de probabilité relative aux corrections des hauteurs barométriques.	24.	I.	80.
	v. Renthe-Fink, Königl. Preufs. Premier-Lieutenant und Adjudant zu Magdeburg.			
717.	Versuch der Auflösung der Aufgabe Nr. 12. im 6ten Bande S. 214 dieses Journals (Nr. 307. im Verzeichnifs des Inhalts von Band 1—10.): aus den drei, die Winkel eines geradlinigen Dreiecks halbirenden Scheitellinien den Inhalt zu finden.	26.	III.	273.
	Dr. Reuschle, Professor am Gymnasium zu Stuttgart.			
718.	Note über die analytischen Beweise elementar-geometrischer Sätze.	24.	II.	171.
719.	Über die Deduction der Methode der kleinsten Quadrate aus Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.	26.	IV.	333.
720.	Zusätze zu dieser Abhandlung.	27.	II.	182.
	Dr. F. J. Richelot, Professor der Mathematik an der Universität zu Königsberg in Preufsen.			
721.	Nota ad theoriam eliminationis pertinens.	21.	III.	226.
722.	De integralibus quibusdam definitis, quorum summa ad quadraturam divisionemque circuli revocatur.	21.	IV.	293.
723.	Über die Integration eines merkwürdigen Systems Differentialgleichungen.	23.	IV.	354.
724.	Einige neue Integralgleichungen des Jacobischen Systems Differentialgleichungen.	25.	II.	97.
725.	Nova theoremata de functionum Abelianarum cujusque ordinis valoribus, quibus pro complementis argumentorum atque indicum dimidiis induuntur.	29.	IV.	281.
	D. G. Rosenhain, Privatdocenten an der Universität zu Breslau.			
726.	Exercitationes analyticae in theorema Abelianum de integralibus functionum algebraicarum.	28. 29.	III. I.	249. 1.
727.	Neue Darstellung der Resultante der Elimination von z aus zwei algebraischen Gleichungen $fz = 0$ und $\varphi z = 0$ vermittels der Werthe, welche die Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ für gegebne Werthe von z annehmen.	30.	II.	157.
	Schaeffer, Dr. phil. zu Berlin.			
728.	De integrali $-\int_0^x \frac{\log(1-\alpha)}{\alpha}\partial\alpha$.	30.	IV.	277.

		Band.	Heft.	Seite.
	F. Schultze, Privatlehrer der Mathematik zu Berlin.			
729.	Allgemeine Berechnung der fünf regulairen Körper.	28.	II.	108.
	Ch. Z. Slonimsky zu St. Petersburg.			
730.	Allgemeine Bemerkungen über Rechenmaschinen, und Prospectus eines neu erfundenen Rechen-Instruments.	28.	II.	184.
731.	Eine allgemeine Formel für die gesammte Jüdische Kalenderberechnung.	28.	II.	179.
	Dr. v. Staudt, Professor der Mathematik an der Universität zu Erlangen.			
732.	Beweis eines Lehrsatzes, die Bernoullischen Zahlen betreffend. . .	21.	IV.	372.
733.	Construction des regulairen Siebenzehnecks.	24.	III.	251.
734.	Über die Inhalte der Polygone und Polyëder.	24.	III.	252.
735.	Beweis des Satzes, dafs jede algebraische rationale ganze Function von einer Veränderlichen in Factoren vom ersten Grade aufgelöset werden kann.	29.	II.	97.
	Dr. J. Steiner, Professor der Mathematik an der Universität zu Berlin.			
736.	Von dem Krümmungs-Schwerpunct ebener Curven. (Auszug einer am 5. April 1838 in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung.	21.	I.	33.
		21.	II.	101.
737.	Über einige stereometrische Sätze. (Auszug aus einer am 14. Febr. 1842 in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung.)	23.	III.	275.
738.	Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général.	24.	II.	93.
		24.	III.	189.
739.	Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und das sphärische Dreieck.	28.	IV.	375.
740.	Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte. (Estratto dal giornale arcadico di Roma tomo 94.)	30.	II.	97.
741.	Über eine Eigenschaft des Krümmungshalbmessers der Kegelschnitte.	30.	III.	271.
742.	Lehrsätze und Aufgaben.	30.	III.	273.
743.	Über die Leitstrahlen der Kegelschnitte.	30.	IV.	337.
	Dr. Stern, Professor der Mathematik an der Universität zu Göttingen.			
744.	Beiträge zur Combinationslehre und deren Anwendung auf die Theorie der Zahlen. Erste Abhandlung.	21.	I.	91.
		21.	II.	177.
745.	Remarques sur les intégrales Eulériennes.	21.	IV.	377.
746.	Über die Auflösung der transcendenten Gleichungen. Eine von der Königlich-Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften gekrönten Preisschrift.	22.	I.	1.
747.	Elementarer Beweis eines Fundamentalsatzes aus der Theorie der Gleichungen.	23.	IV.	370.
748.	Bemerkungen zu der Abhandlung Nr. 14. im 18ten Bande dieses Journals S. 213. (Nr. 454. des Inhalts-Verzeichnisses derBände 11—20.)	25.	III.	280.
749.	Über die Coëfficienten der Secantenreihe.	26.	I.	88.
750.	Notiz über einige Producten-Ausdrücke.	27.	III.	279.

		Band.	Heft.	Seite.
	A. F. Svanberg, Professor zu Stockholm.			
751.	Sur le mouvement des fluides.	24.	II.	153.
	P. Tchebicheff zu Moscau.			
752.	Note sur la convergence de la série de *Taylor*.	28.	III.	279.
	Abbé Barnabé Tortolini, professeur des mathématiques transcendantes à l'université de Rome.			
753.	Sur les transformations et les valeurs de plusieurs intégrales définies qui se rapportent aux surfaces et aux solidités des volumes.	26.	IV.	277.
754.	Mémoire sur quelques applications de la méthode inverses des tangentes.	26.	IV.	288.
	Dr. Umpfenbach, Professor der Mathematik an der Universität zu Giefsen.			
755.	Beweis, dafs ein Vieleck mit gegebenen Seiten am gröfsten ist, wenn seine Ecken in einem Kreise liegen.	25.	II.	184.
756.	Über die Verallgemeinerung des pythagoräischen Lehrsatzes. . .	26.	I.	92.
757.	Durch vier gegebene Puncte eine Parabel zu ziehen.	26.	II.	183.
758.	Von den vielfachen Puncten einer krummen Fläche.	28.	IV.	380.
759.	Ein Lehrsatz von Kegelschnitten.	30.	I.	95.
	J. Zech, Candidat der Theologie zu Tübingen.			
760.	Über das Princip der kleinsten Wirkung.	24.	II.	177.
	Verschiedenes.			
761.	Extrait du procès verbal de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg du 22 Septbr. (6 Oct.) 1841.	23.	II.	196.
762.	Unedirter Brief des berühmten Mathematikers *Joh. Bernoulli* (geb. 1667, gest. 1748) an *L. Euler* in St. Petersburg, datirt aus Basel den 11. Aug. 1831. Dem gegenwärtigen Journal gefälligst mitgetheilt von dem Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi*.	23.	II.	199.
763.	Nachricht von der in Nr. 760. gedachten Sammlung von Briefen an und von *L. Euler*.	23.	III.	287.
764.	Druckfehler-Verzeichnisse und Berichtigungen.	21.	IV.	380.
		22.	IV.	380.
		23.	IV.	379.
		24.	IV.	383.
		27.	II.	192.
		27.	III.	284.
		27.	Inhalt	IV.
		28.	II.	192.

		Band.	Heft.
765.	Fac-simile einer Handschrift von		
	Leonh. Euler.	23.	I.
	Lambert.	23.	II.
	Lagrange.	23.	III.
	Dan. Bernoulli.	23.	IV.
	Laplace.	24.	I.
	Fufs.	24.	II.
	Legendre.	24.	III.
	Huyghens.	24.	IV.
	Poisson.	25.	I.
	Abel.	25.	II.
	Torricelli.	25.	III.
	Ampère.	25.	IV.
	Joh. Bernoulli.	26.	I.
	Nic. Bernoulli.	26.	II.
	D'Alambert.	26.	III.
	Cramer.	26.	IV.
	Kepler.	27.	I.
	Lexell.	27.	II.
	Fourier.	27.	III.
	Carnot.	27.	IV.
	Hevel.	28.	I.
	Descartes.	28.	II.
	Roberval.	28.	III.
	Demois. ***Germain.***	28.	IV.
	Tycho de Brahe.	29.	I.
	Copernicus.	29.	II.
	Christian Freiherrn ***v. Wolff.***	29.	III.
	Kant.	29.	IV.
	Leibnitz.	30.	I.
	Monge.	30.	II.
	Kästner.	30.	III.
	Fermat.	30.	IV.

27.

Inhalts-Verzeichnifs II.

der ersten dreifsig Bände des Journals für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben zu Berlin in den Jahren 1826 bis 1845 von *A. L. Crelle;* nach den Gegenständen.

Wenn man diejenigen Zahlen dieses Verzeichnisses II., die gröfser sind als 577 und welche sich auf die Bände 21 bis 30 des Journals beziehen, in dem hier vorhergehenden Verzeichnifs I., die Zahlen 324 bis 577 in dem Inhalts-Verzeichnifs der Bände 11. bis 20. am Ende des 20ten Bandes, und die Zahlen 1 bis 323 in dem Inhalts-Verzeichnifs der Bände 1. bis 10. am Ende des 10ten Bandes aufschlägt, so findet man die Titel der bezeichneten Abhandlungen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

A. Arithmetik und Algebra.

Björling 580. Cayley 587, 588. Clausen 28, 48, 56, 57. Crelle 66, 68, 69, 70, 341. Dirksen 77. Eisenlohr. 596. Eisenstein 597, 599, 601, 605, 609, 611, 615, 616, 621, 623. Enke 626. Förstemann 81. Gudermann 102, 103, 365. Grunert 632. Hesse 644, 645. C. G. J. Jacobi 130, 394, 396, 399, 402, 403, 410, 652, 661, 665, 666, 669. Jordann 412. Jürgensen 159. Köhlau 160. Kummer 681. Lejeune Dirichlet 175, 435. Libri 180. Löwenstern 450. Luchterhandt 454. Magnus 691. Miller 456. Minding 693, 695. Möbius 470, 697. Ohm 479. Olivier 218, 228. Oettinger 481, 702, 703. Plana 492, 493. Plücker 499. Poncelet 505, 506. Raabe 512. Reuschle 719, 720. Richelot 721. Rosenhain 727. Schellbach 267, 530. Scherk 269. Slonimsky 730. Specht 278, 279. Schulze 539. v. Staudt 732, 735. Steiner 546. Stern 555, 556, 746, 747, 748, 749, 750. Ungenannte 312, 569, 573.

B. Combinatorik.

Beyer 22. Crelle 591, 621. Förstemann 350. Gudermann 104. C. G. J. Jacobi 656. Ramus 516. Scherk 268, 534. Stern 560, 561, 744.

C. Zerlegung der Brüche insbesondere.

Beyer 23. Clausen 58. Crelle 72. Dirksen 75. C. G. J. Jacobi 148. Jürgensen 415. Schellbach 526.

D. Theorie der Zahlen insbesondere.

Abel 20. Brennecke 326. Catalan 586. Clausen 33, 57. Crelle 71, 343, 592, 593. Eisenstein 598, 600, 604, 606, 607, 608, 610, 611, 612, 614, 617, 618, 619, 620, 621, 623. S. Germain 87. Grunert 98, 101. Hill 380, 382. Alex. v. Humboldt 125. C. G. J. Jacobi 128, 139, 144, 149, 154, 387, 393, 395, 409, 652, 653, 670. Kronecker 678. Kummer 425, 680, 682. Lejeune Dirichlet 170, 171, 172, 173, 177, 178, 435, 436, 437, 685, 686, 687, 688. Libri 183, 184, 185. Luch-

terhandt 454. Märker 455. Minding 202. Scherk 272. Schönemann 536, 537, 538. Stein 280. Steiner 545, 546. Stern 294, 297, 301, 556, 558, 560, 561, 744. Ungenannte 314, 316, 318, 575. Zornow 568.

E. Kettenbrüche insbesondere.

Clausen 29, 36. Eisenstein 622. C. G. J. Jacobi 389. Löwenstern 450. Möbius 212. Ramus 518. Stern 295, 296, 299, 554, 558. Ungenannte 574.

F. Theorie der Gleichungen insbesondere.

Abel 2, 16. Bouniakowsky 24. Burg 26. Clausen 36. Collins 338. Crelle 340. F. Deahna 344. Dirksen 347. Enke 625. Fischer 348. Förstemann 352. Gaufs 85. Gräffe 91. Grunert 93. Hill 117, 118, 121, 381. C. G. J. Jacobi 127, 150, 392. Libri 186. Liouville 188. F. Minding 467. Olivier 219, 221, 226. Raabe 513. Richelot 263. Schönemann 538. Schulze 539. Stern 298. F. Strehlke 563. Umpfenbach 566. Ungenannte 312.

G. Analytische Facultäten insbesondere.

Clausen 55. Crelle 70. Gudermann 359. C. G. J. Jacobi 385. Lejeune Dirichlet 432. Liouville 441. A. Müller 474.

H. Interpolation insbesondere.

Clausen 39. Dirksen 76. Olivier 226.

I. Theorie der Functionen insbesondere.

Abel 1, 10, 12, 18. Clausen 35. Crelle 70. Eisenstein 611. Gudermann 365. Heinen 374. Hill 378, 379, 383. C. G. J. Jacobi 130, 153, 155, 388, 391, 393, 396, 405, 654, 655. Jordann 412. Jürgensen 159, 413, 416. Kummer 422. Lamé et Clapeyron 162, 163. Libri 179, 182, 187, 438. Liouville 440, 442. Luchterhandt 453. Magnus 192. Minding 458. Nernst 478. Olivier 224, 227. Raabe 512. Ramus 258. Richelot 520, 521. Schellbach 526, 532. Schönemann 536.

K. Reihen insbesondere.

Abel 3, 5, 11, 20. Bretschneider 328. Burg 25. Clausen 30, 31, 37, 41, 53, 59. Crelle 66, 68, 69, 70, 590. Eisenstein 603, 613, 622. Dirksen 77. Grunert 94. Gudermann 102, 103, 107, 110. Hill 120. C. G. J. Jacobi 388, 402. Jürgensen 159, 413, 414. Köhlau 160. Kummer 421, 422, 423, 424, 426. Lamé et Clapeyron 162, 163. Lejeune Dirichlet 175, 433, 434, 436. Libri 180. Möbius 214. Nernst 216, 478. M. Ohm 479. Olivier 225, 227, 228, 229. Oettinger 481. Poncelet 505. Raabe 507, 510. Schellbach 526, 530, 532. Scherk 269, 270, 533. v. Schmidten 275. Scholtz 276. Stern 300, 560, 562. Tchebicheff 752.

L. Differenzial- und Integral-Rechnung.

Abel 4, 12, 18, 20. Bretschneider 328. Broch 329, 584. Brooke 330. Clausen 36, 44, 56. F. Deahna 345. Grunert 99. Gudermann 358, 364. Haedenkamp 371, 636. Heine 638. Hesse 643. Hill 119, 121, 378, 383, 384, 648, 649, 650, C. G. J. Jacobi 126, 132, 133, 134, 135, 137, 149, 155, 156, 385, 386, 389, 391, 400, 402, 407, 408, 657, 658, 664. Jürgensen 416, 676, 677. Kummer 420, 679. Lacroix 429. Lamé et Clapeyron 162, 163. Lebesque 430. Lejeune Dirichlet 432, 437. Libri 438, 439. Liouville 441, 442, 443, 444. Lobatto 190, 191, 446, 447, 449. Luchterhandt 453. Minding 200, 203, 204, 205, 458, 694. A. Müller 476. Oettinger 481. Ostrogradsky 480. Pagani 488. Plana 491, 495, 496. Poisson 502, 504. Raabe 508, 510, 515, 707, 708, 709, 710. Radike 711. Ramus 258, 517, 712, 713, 714, 715. Richelot 264, 520, 521, 723, 724. Sauer 265. Schaeffer 728. Schellbach 529. Scherk 271. v. Schmidten 274. Tortolini 754.

M. Bestimmte Integrale insbesondere.

Abel 8. B. Boncompagni 581. Gudermann 635. C. G. J. Jacobi 394, 398. Kummer 426, 427, 428. Lejeune Dirichlet 174, 434. Libri 439. Liouville 441. Lobatto 449. Raabe 514, 515. Richelot 722. Schellbach 528. Svanberg 564. Tortolini 753.

N. Elliptische und Abelsche Functionen insbesondere.

Abel 9, 13, 14, 15, 17, 19. Eisenstein 602, 624. Gudermann 363, 366, 367, 369, 633. Gützlaff 370. Haedenkamp 371, 637. C. G. J. Jacobi 138, 140, 141, 142, 143, 145, 146, 147, 151, 152, 393, 401, 410, 659, 662, 668, 671, 672. Lejeune Dirichlet 432. Luchterhandt 453. Raabe 509. Richelot 262, 725. Rosenhain 726. Sanio 522. Sohnke 542, 543. Stern 745.

2. Geometrie.

A. Elementar-Geometrie.

August 324. Bauer 325. Brix 583. Brune 331, 332, 333, 585. Clausen 60, 589. Crelle 342. Dahse 594. Eisenstein 604, 619, 620. Fassbender 627, 628, 629. Förstemann 81, 551. Gerling 353. Gerwien 89, 90. Grüson 92. Grunert 95, 97. Gudermann 106, 110. Hessel 116. C. G. J. Jacobi 145, 665, 670. Koppe 417, 418. Lehmus 168. Möbius 206, 207, 208, 696, 697, 698, 700. Olivier 220, 222, 223. Raabe 254. Ramus 519. Remy 259, 260. v. Renthe 261, 717. Scheerer 266. Schulz v. Strasznicki 540. F. Schultze 729. Specht 278, 279. v. Staudt 733, 734. Steiner 285, 288. Strehlke 302. Umpfenbach 755, 756. Unger 304. Ungenannte 311, 313, 315, 320, 570.

B. Goniometrie und Trigonometrie.

Clausen 28, 36. Crelle 69. Dirksen 77. Gaufs 630. Lehmus 684. Möbius 698. Olivier 218, 227. Schellbach 267. Scherk 269. Scholtz 276. Specht 278, 279.

C. Sphärik und sphärische Trigonometrie.

Bretschneider 327. Clausen 43. Crelle 339. Feldt 80. Gerwien 90, 354. Gudermann 105, 109, 110, 357, 359, 360, 361, 368, 634. Jordann 411. Löwenstern 451. Raabe 252. Remy 259. Richelot 262. Schmeifser 273. Steiner 286.

D. Synthetische Geometrie.

Aubert 22. Bauer 325. Clausen 50, 336. Dippe 346. Druckenmüller 595. Eberty 78. Förstemann 81. Gerwien 89, 90, 355. Grafsmann 631. Grunert 96, 97. Gudermann 108. Heinen 375, 640. Hessel 116. A. Jacobi 651. C. G. J. Jacobi 390, 397, 404. Koppe 417. Kramer 419. Leithold 431. Magnus 193. Minding 199. Möbius 210, 215. Poncelet 248, 249, 250. Schällibaum 523, 524, 525. Schellbach 531. Steiner 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743. Wolff 567. Zornow 306. Ungenannte 319.

E. Analytische Geometrie.

Beyer 23. Bruun 335. Clausen 32, 34, 38, 46, 48, 49, 57. Dippe 346. Fischer 348. Förstemann 81. Frankenheim 83. Garbinsky 84. St. Germain 88. Grunert 95, 100, 356. Gudermann 108, 358, 360. Joachimsthal 673, 674, 675. Hachette 111, 112, 113. Haedenkamp 372. Heinen 114, 373, 375. Hellerung 115. Hesse 376, 377, 641, 642, 644, 647. Hessel 116. Horn 124. C. G. J. Jacobi 129, 131, 145, 390, 397, 403, 404, 405, 406, 410. Kummer 422, 681. Lehmus 168, 683. Lejeune Dirichlet 435. Littrow. 189. Lobatschewsky 445. Löwenstern 452. Luchterhandt 454, 690. Magnus 194, 195, 196. Minding 198, 199, 201, 459, 464, 465, 466, 468, 469. Möbius 206, 207, 208, 210, 215, 471, 699.

G. W. Müller 477. Olivier 222. Plana 491, 494, 495, 496, 705. Plücker 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 497, 498, 706. Poisson 243, 244. Raabe 254, 255, 256, 257, 511. v. Renthe 261. Reuschle 718. Scheerer 266. Schellbach 530, 531, 532. Scherk 533, 535. Schönemann 536. Stern 557. Strehlke 302. Fr. Strehlke 563. Tellkampf 565. Umpfenbach 757, 758, 759. Unger 304, 305. Zornow 306. Ungenannte 310, 313, 315, 317, 319, 572.

F. Von einzelnen Curven und Flächen.

Bruun 335. Clausen 337. Horn 122, 123. Lehmus 166. Möbius 471. Raabe 251.

3. Mechanik.

A. Statik und Dynamik.

Abel 6, 7. Burg 26. Clausen 42, 45. Cournot 61, 62. Crelle 64. Gaufs 86. C. G. J. Jacobi 660, 667. Kossack 161. Lamé et Clapeyron 164. Lehmann 165. Lehmus 167, 169. Lobatto 448. Meyer 692. Minding 460, 461, 462, 463. Möbius 209, 213, 472, 473. Oltmanns 231. Pagani 482, 486, 487, 489, 490. Plana 495, 496. Poncelet 246. Sohnke 277. *Rapport sur un ouvrage de Mr.* Ostrograsky 321. Steiner 544, 736. Ungenannte 571, 572. Zech 760.

B. Hydrostatik und Hydrodynamik.

Brooke 330. Eytelwein 79. Lacroix 429. Lehmus 167. Liouville 444. A. Müller 475. Oltmanns 230. Pagani 484, 488. Poisson 242, 503, 504. Plücker 500, 501. v. Steinheil 293. Svanberg 751. Theremin 303. *Prix de l'académie de St. Petersbourg année 1831,* 322.

II. Angewandte Mathematik.

A. Astronomie.

Bergius 578. Bernardi 579. Borchardt 582. Clausen 47, 51, 52, 54. Gudermann 362, 368. C. G. J. Jacobi 136, 663, 666. Littrow 189. Pagani 485. Raabe 253. Sohncke 277. *Rapport sur un ouvrage de Mr.* Ostrograsky 321. *Prix des académies de St. Petersbourg et Berlin* 322, 323.

B. Chronologie.

Jahn 158. Matzka 197. Nesselmann 701. Piper 704. Slonimsky 731.

C. Optik.

v. Forstner 349. Miller 457. Möbius 211, 212. Pagani 483.

D. Theorie der Maschinen.

Clausen 40. Crelle 63, 65. Dietlein 73, 74. M. H. Jacobi 157. Lehmus 169. G. S. Ohm 217. Poncelet 246, 247. Ungenannte 309.

E. Theorie der Wärme.

Heine 639. Lejeune Dirichlet 176. Libri 181.

Verschiedenes.

Abel 21. Joh. Bernoulli 762. Brune 334. Crelle 67. Fac-simle's 765. Lobatschewsky 689. Poisson 245. Ramus 716. Schellbach 527. Simonoff 541. Aufgaben von Ungenannten 307. Nachrichten von Büchern 308, 761, 763. Lagrange 576. Druckfehler-Verzeichnisse 577, 764.

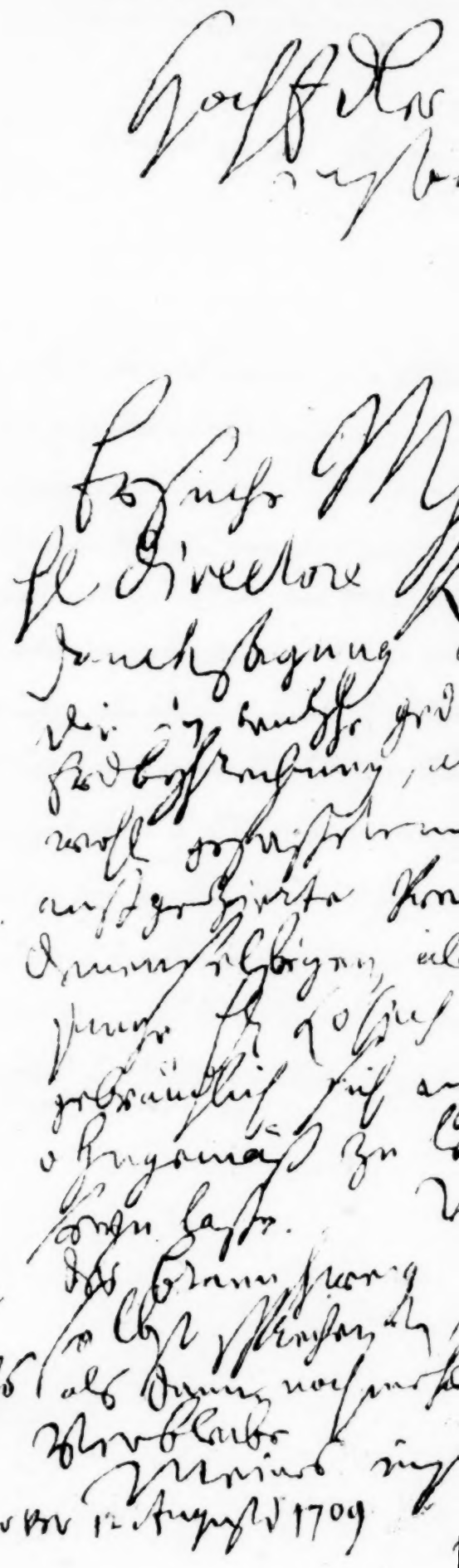
	0										1										2										3										4									
No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8	6	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7	9	0	4	8	2
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	9	6	0	3	6	9	2	5	8	1	4	8	9	0	4	8	2
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	9	0	2	0	2	4	6	8	0	2	4	7	9	6	0	3	6	9	2	5	8	1	5	8	9	0	4	8	2
4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	2	3	4	5	6	8	9	0	2	0	2	4	6	8	0	2	5	7	9	6	0	3	6	9	2	5	8	2	5	8	9	0	4	8	2
5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	2	3	4	5	7	8	9	0	2	0	2	4	6	8	0	3	5	7	9	6	0	3	6	9	2	5	9	2	5	8	9	0	4	8	2
6	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	2	3	4	6	7	8	9	0	2	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9	6	0	3	6	9	2	6	9	2	5	8	9	0	4	8	2
7	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	1	0	1	2	3	4	6	7	8	9	1	2	0	2	4	6	8	1	3	5	7	0	7	0	3	6	9	2	6	9	2	5	9	9	0	4	8	2
8	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	1	0	1	2	3	5	6	7	8	0	1	3	0	2	4	6	9	1	3	5	8	0	7	0	3	6	9	3	6	9	2	6	9	9	0	4	8	2
9	0	0	0	0	1	1	2	2	2	2	1	0	1	2	3	5	6	7	9	0	1	3	0	2	4	6	9	1	3	6	8	0	7	0	3	6	9	3	6	9	3	6	9	9	0	4	8	2
10	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	1	0	1	2	4	5	6	8	9	0	2	3	0	2	4	7	9	1	4	6	8	1	7	0	3	6	0	3	6	0	3	6	0	10	0	4	8	3
11	0	0	0	1	1	1	2	2	3	3	1	0	1	2	4	5	6	8	9	1	2	3	0	2	4	7	9	1	4	6	9	1	7	0	3	6	0	3	6	0	3	7	0	10	0	4	8	3
12	0	0	0	1	1	2	2	2	3	3	1	0	1	2	4	5	7	8	9	1	2	3	0	2	4	7	9	2	4	6	9	1	7	0	3	6	0	3	7	0	3	7	0	10	0	4	8	3
13	0	0	0	1	1	2	2	3	3	3	1	0	1	2	4	5	7	8	0	1	2	4	0	2	4	7	9	2	4	7	9	1	7	0	3	6	0	3	7	0	4	7	0	10	0	4	8	3
14	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	1	0	1	2	4	5	7	8	0	1	3	4	0	2	4	7	9	2	4	7	9	2	7	0	3	6	0	3	7	0	4	7	1	10	0	4	8	3
15	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	1	0	1	3	4	6	7	9	0	2	3	4	0	2	5	7	0	2	5	7	0	2	8	0	3	7	0	4	7	1	4	8	1	10	0	4	9	3
16	0	0	1	1	2	2	3	3	4	5	1	0	1	3	4	6	7	9	0	2	4	4	0	2	5	7	0	2	5	7	0	3	8	0	3	7	0	4	7	1	4	8	2	10	0	4	9	3
17	0	0	1	1	2	2	3	4	4	5	1	0	1	3	4	6	7	9	1	2	4	4	0	2	5	7	0	2	5	8	0	3	8	0	3	7	0	4	7	1	5	8	2	10	0	4	9	3
18	0	0	1	1	2	3	3	4	4	5	1	0	1	3	4	6	8	9	1	2	4	4	0	2	5	7	0	3	5	8	0	3	8	0	3	7	0	4	8	1	5	8	2	10	0	4	9	3
19	0	0	1	1	2	3	3	4	5	5	1	0	1	3	4	6	8	9	1	3	4	4	0	2	5	7	0	3	5	8	1	3	8	0	3	7	0	4	8	1	5	9	2	10	0	4	9	3
20	0	0	1	2	2	3	4	4	5	6	1	0	1	3	5	6	8	0	1	3	5	5	0	2	5	8	0	3	6	8	1	4	8	0	3	7	1	4	8	2	5	9	3	10	0	4	9	4
21	0	0	1	2	2	3	4	5	5	6	1	0	1	3	5	6	8	0	2	3	5	5	0	2	5	8	0	3	6	9	1	4	8	0	3	7	1	4	8	2	6	9	3	10	0	4	9	4
22	0	0	1	2	3	3	4	5	6	6	1	0	1	3	5	7	8	0	2	4	5	5	0	2	5	8	1	3	6	9	2	4	8	0	3	7	1	5	8	2	6	0	3	11	0	4	9	4
23	0	0	1	2	3	3	4	5	6	7	1	0	1	3	5	7	8	0	2	4	6	5	0	2	5	8	1	3	6	9	2	5	8	0	3	7	1	5	8	2	6	0	4	11	0	4	9	4
24	0	0	1	2	3	4	4	5	6	7	1	0	1	3	5	7	9	0	2	4	6	5	0	2	5	8	1	4	6	9	2	5	8	0	3	7	1	5	9	2	6	0	4	11	0	4	9	4
25	0	0	1	2	3	4	5	5	6	7	1	0	1	3	5	7	9	1	2	4	6	5	0	2	5	8	1	4	7	9	2	5	8	0	3	7	1	5	9	3	6	0	4	11	0	4	9	4
26	0	0	1	2	3	4	5	6	6	7	1	0	1	3	5	7	9	1	3	4	6	5	0	2	5	8	1	4	7	0	2	5	9	0	3	7	1	5	9	3	7	0	4	11	0	4	9	4
27	0	0	1	2	3	4	5	6	7	7	1	0	1	3	5	7	9	1	3	5	6	5	0	2	5	8	1	4	7	0	3	5	9	0	3	7	1	5	9	3	7	1	4	11	0	4	9	4
28	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	1	0	1	3	5	7	9	1	3	5	7	5	0	2	5	8	1	4	7	0	3	6	9	0	3	7	1	5	9	3	7	1	5	11	0	4	9	4

4											5										6										7										8									
3	4	5	6	7	8	9	No.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.	
2	6	0	4	8	2	6	12		0	5	0	5	0	5	0	5	0	5	15		0	6	2	8	4	0	6	2	8	4	18		0	7	4	1	8	5	2	9	6	3	20		0	8	6	4	2	0	8	6	4	2	24	
2	6	0	4	8	2	7	12		0	5	0	5	0	5	0	5	0	6	15		0	6	2	8	4	0	6	2	8	5	18		0	7	4	1	8	5	2	9	6	4	20		0	8	6	4	2	0	8	6	4	3	24	
2	6	0	4	8	3	7	12		0	5	0	5	0	5	0	5	1	6	15		0	6	2	8	4	0	6	2	9	5	18		0	7	4	1	8	5	2	9	7	4	20		0	8	6	4	2	0	8	6	5	3	24	
2	6	0	4	9	3	7	12		0	5	0	5	0	5	0	6	1	6	15		0	6	2	8	4	0	6	3	9	5	18		0	7	4	1	8	5	2	0	7	4	21		0	8	6	4	2	0	8	7	5	3	24	
2	6	0	5	9	3	7	12		0	5	0	5	0	5	1	6	1	6	15		0	6	2	8	4	0	7	3	9	5	18		0	7	4	1	8	5	3	0	7	4	21		0	8	6	4	2	0	9	7	5	3	24	
2	6	1	5	9	3	7	12		0	5	0	5	0	6	1	6	1	6	15		0	6	2	8	4	1	7	3	9	5	18		0	7	4	1	8	6	3	0	7	4	21		0	8	6	4	2	1	9	7	5	3	24	
2	6	1	5	9	3	8	12		0	5	0	5	0	6	1	6	1	7	15		0	6	2	8	4	1	7	3	9	6	18		0	7	4	1	8	6	3	0	7	5	21		0	8	6	4	2	1	9	7	5	4	24	
2	7	1	5	9	4	8	12		0	5	0	5	1	6	1	6	2	7	15		0	6	2	8	5	1	7	3	0	6	19		0	7	4	1	9	6	3	0	8	5	21		0	8	6	4	3	1	9	7	6	4	24	
2	7	1	5	0	4	8	13		0	5	0	5	1	6	1	7	2	7	15		0	6	2	8	5	1	7	4	0	6	19		0	7	4	1	9	6	3	1	8	5	21		0	8	6	4	3	1	9	8	6	4	24	
3	7	1	6	0	4	9	13		0	5	0	6	1	6	2	7	2	8	15		0	6	2	9	5	1	8	4	0	7	19		0	7	4	2	9	6	4	1	8	6	21		0	8	6	5	3	1	0	8	6	5	25	
3	7	1	6	0	5	9	13		0	5	0	6	1	6	2	7	3	8	15		0	6	2	9	5	1	8	4	1	7	19		0	7	4	2	9	6	4	1	9	6	21		0	8	6	5	3	1	0	8	7	5	25	
3	7	2	6	0	5	9	13		0	5	0	6	1	7	2	7	3	8	15		0	6	2	9	5	2	8	4	1	7	19		0	7	4	2	9	7	4	1	9	6	21		0	8	6	5	3	2	0	8	7	5	25	
3	7	2	6	1	5	9	13		0	5	0	6	1	7	2	8	3	8	15		0	6	2	9	5	2	8	5	1	7	19		0	7	4	2	9	7	4	2	9	6	21		0	8	6	5	3	2	0	9	7	5	25	
3	7	2	6	1	5	0	14		0	5	0	6	1	7	2	8	3	9	15		0	6	2	9	5	2	8	5	1	8	19		0	7	4	2	9	7	4	2	9	7	21		0	8	6	5	3	2	0	9	7	6	25	
3	8	2	7	1	6	0	14		0	5	1	6	2	7	3	8	4	9	15		0	6	3	9	6	2	9	5	2	8	19		0	7	5	2	0	7	5	2	0	7	22		0	8	7	5	4	2	1	9	8	6	25	
3	8	2	7	1	6	1	14		0	5	1	6	2	7	3	8	4	0	16		0	6	3	9	6	2	9	5	2	9	19		0	7	5	2	0	7	5	2	0	8	22		0	8	7	5	4	2	1	9	8	7	25	
3	8	2	7	2	6	1	14		0	5	1	6	2	7	3	9	4	0	16		0	6	3	9	6	2	9	6	2	9	19		0	7	5	2	0	7	5	3	0	8	22		0	8	7	5	4	2	1	0	8	7	26	
3	8	3	7	2	6	1	14		0	5	1	6	2	8	3	9	4	0	16		0	6	3	9	6	3	9	6	2	9	19		0	7	5	2	0	8	5	3	0	8	22		0	8	7	5	4	3	1	0	8	7	26	
3	8	3	7	2	7	1	14		0	5	1	6	2	8	3	9	5	0	16		0	6	3	9	6	3	9	6	3	9	19		0	7	5	2	0	8	5	3	1	8	22		0	8	7	5	4	3	1	0	9	7	26	
4	8	3	8	2	7	2	14		0	5	1	7	2	8	4	9	5	1	16		0	6	3	0	6	3	0	6	3	0	20		0	7	5	3	0	8	6	3	1	9	22		0	8	7	6	4	3	2	0	9	8	26	
4	8	3	8	3	7	2	14		0	5	1	7	2	8	4	0	5	1	17		0	6	3	0	6	3	0	7	3	0	20		0	7	5	3	0	8	6	4	1	9	22		0	8	7	6	4	3	2	1	9	8	26	
4	9	3	8	3	8	2	14		0	5	1	7	3	8	4	0	6	1	17		0	6	3	0	7	3	0	7	4	0	20		0	7	5	3	1	8	6	4	2	9	22		0	8	7	6	5	3	2	1	0	8	27	
4	9	3	8	3	8	3	14		0	5	1	7	3	8	4	0	6	2	17		0	6	3	0	7	3	0	7	4	1	20		0	7	5	3	1	8	6	4	2	0	23		0	8	7	6	5	3	2	1	0	9	27	
4	9	4	8	3	8	3	14		0	5	1	7	3	9	4	0	6	2	17		0	6	3	0	7	4	0	7	4	1	20		0	7	5	3	1	9	6	4	2	0	23		0	8	7	6	5	4	2	1	0	9	27	
4	9	4	9	3	8	3	14		0	5	1	7	3	9	5	0	6	2	17		0	6	3	0	7	4	1	7	4	1	20		0	7	5	3	1	9	7	4	2	0	23		0	8	7	6	5	4	3	1	0	9	27	
4	9	4	9	4	8	3	14		0	5	1	7	3	9	5	1	6	2	17		0	6	3	0	7	4	1	8	4	1	20		0	7	5	3	1	9	7	5	2	0	23		0	8	7	6	5	4	3	2	0	9	27	
4	9	4	9	4	9	3	14		0	5	1	7	3	9	5	1	7	2	17		0	6	3	0	7	4	1	8	5	1	20		0	7	5	3	1	9	7	5	3	0	23		0	8	7	6	5	4	3	2	1	9	27	
4	9	4	9	4	9	4	14		0	5	1	7	3	9	5	1	7	3	17		0	6	3	0	7	4	1	8	5	2	20		0	7	5	3	1	9	7	5	3	1	23		0	8	7	6	5	4	3	2	1	0	28	

1											2											3											4											5										
5	6	7	8	9	No.						0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.						0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.						0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.
5	6	7	8	9	1						0	2	4	6	8	0	2	4	6	8	6						0	3	6	9	2	5	8	1	4	7	9						0	4	8	2	6	0	4	8	2	6	12
5	6	7	8	0	2						0	2	4	6	8	0	2	4	6	9	6						0	3	6	9	2	5	8	1	4	8	9						0	4	8	2	6	0	4	8	2	7	12
5	6	7	9	0	2						0	2	4	6	8	0	2	4	7	9	6						0	3	6	9	2	5	8	1	5	8	9						0	4	8	2	6	0	4	8	3	7	12
5	6	8	9	0	2						0	2	4	6	8	0	2	5	7	9	6						0	3	6	9	2	5	8	2	5	8	9						0	4	8	2	6	0	4	9	3	7	12
5	7	8	9	0	2						0	2	4	6	8	0	3	5	7	9	6						0	3	6	9	2	5	9	2	5	8	9						0	4	8	2	6	0	5	9	3	7	12
6	7	8	9	0	2						0	2	4	6	8	1	3	5	7	9	6						0	3	6	9	2	6	9	2	5	8	9						0	4	8	2	6	1	5	9	3	7	12
6	7	8	9	1	2						0	2	4	6	8	1	3	5	7	0	7						0	3	6	9	2	6	9	2	5	9	9						0	4	8	2	6	1	5	9	3	8	12
6	7	8	0	1	3						0	2	4	6	9	1	3	5	8	0	7						0	3	6	9	3	6	9	2	6	9	9						0	4	8	2	7	1	5	9	4	8	12
6	7	9	0	1	3						0	2	4	6	9	1	3	6	8	0	7						0	3	6	9	3	6	9	3	6	9	9						0	4	8	2	7	1	5	0	4	8	13
6	8	9	0	2	3						0	2	4	7	9	1	4	6	8	1	7						0	3	6	0	3	6	0	3	6	0	10						0	4	8	3	7	1	6	0	4	9	13
6	8	9	1	2	3						0	2	4	7	9	1	4	6	9	1	7						0	3	6	0	3	6	0	3	7	0	10						0	4	8	3	7	1	6	0	5	9	13
7	8	9	1	2	3						0	2	4	7	9	2	4	6	9	1	7						0	3	6	0	3	7	0	3	7	0	10						0	4	8	3	7	2	6	0	5	9	13
7	8	0	1	2	4						0	2	4	7	9	2	4	7	9	1	7						0	3	6	0	3	7	0	4	7	0	10						0	4	8	3	7	2	6	1	5	9	13
7	8	0	1	3	4						0	2	4	7	9	2	4	7	9	2	7						0	3	6	0	3	7	0	4	7	1	10						0	4	8	3	7	2	6	1	5	0	14
7	9	0	2	3	4						0	2	5	7	0	2	5	7	0	2	8						0	3	7	0	4	7	1	4	8	1	10						0	4	9	3	8	2	7	1	6	0	14
7	9	0	2	4	4						0	2	5	7	0	2	5	7	0	3	8						0	3	7	0	4	7	1	4	8	2	10						0	4	9	3	8	2	7	1	6	1	14
7	9	1	2	4	4						0	2	5	7	0	2	5	8	0	3	8						0	3	7	0	4	7	1	5	8	2	10						0	4	9	3	8	2	7	2	6	1	14
8	9	1	2	4	4						0	2	5	7	0	3	5	8	0	3	8						0	3	7	0	4	8	1	5	8	2	10						0	4	9	3	8	3	7	2	6	1	14
8	9	1	3	4	4						0	2	5	7	0	3	5	8	1	3	8						0	3	7	0	4	8	1	5	9	2	10						0	4	9	3	8	3	7	2	7	1	14
8	0	1	3	5	5						0	2	5	8	0	3	6	8	1	4	8						0	3	7	1	4	8	2	5	9	3	10						0	4	9	4	8	3	8	2	7	2	14
8	0	2	3	5	5						0	2	5	8	0	3	6	9	1	4	8						0	3	7	1	4	8	2	6	9	3	10						0	4	9	4	8	3	8	3	7	2	14
8	0	2	4	5	5						0	2	5	8	1	3	6	9	2	4	8						0	3	7	1	5	8	2	6	0	3	11						0	4	9	4	9	3	8	3	8	2	14
8	0	2	4	6	5						0	2	5	8	1	3	6	9	2	5	8						0	3	7	1	5	8	2	6	0	4	11						0	4	9	4	9	3	8	3	8	3	14
9	0	2	4	6	5						0	2	5	8	1	4	6	9	2	5	8						0	3	7	1	5	8	2	6	0	4	11						0	4	9	4	9	4	8	3	8	3	14
9	1	2	4	6	5						0	2	5	8	1	4	7	9	2	5	8						0	3	7	1	5	9	3	6	0	4	11						0	4	9	4	9	4	9	3	8	3	14
9	1	3	4	6	5						0	2	5	8	1	4	7	0	2	5	9						0	3	7	1	5	9	3	7	0	4	11						0	4	9	4	9	4	8	3	8	3	14
9	1	3	5	6	5						0	2	5	8	1	4	7	0	3	5	9						0	3	7	1	5	9	3	7	1	4	11						0	4	9	4	9	4	9	3	8	3	14
9	1	3	5	7	5						0	2	5	8	1	4	7	0	3	6	9						0	3	7	1	5	9	3	7	1	5	11						0	4	9	4	9	4	9	4	8	3	14

6											7											8											9											
0.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	No.	
5	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4	18	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3	20	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2	24	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	28	**1**
5	0	6	2	8	4	0	6	2	8	5	18	0	7	4	1	8	5	2	9	6	4	20	0	8	6	4	2	0	8	6	4	3	24	0	9	8	7	6	5	4	3	2	2	28	**2**
5	0	6	2	8	4	0	6	2	9	5	18	0	7	4	1	8	5	2	9	7	4	20	0	8	6	4	2	0	8	6	5	3	24	0	9	8	7	6	5	4	3	3	2	28	**3**
5	0	6	2	8	4	0	6	3	9	5	18	0	7	4	1	8	5	2	0	7	4	21	0	8	6	4	2	0	8	7	5	3	24	0	9	8	7	6	5	4	4	3	2	28	**4**
5	0	6	2	8	4	0	7	3	9	5	18	0	7	4	1	8	5	3	0	7	4	21	0	8	6	4	2	0	9	7	5	3	24	0	9	8	7	6	5	5	4	3	2	28	**5**
5	0	6	2	8	4	1	7	3	9	5	18	0	7	4	1	8	6	3	0	7	4	21	0	8	6	4	2	1	9	7	5	3	24	0	9	8	7	6	6	5	4	3	2	28	**6**
5	0	6	2	8	4	1	7	3	9	6	18	0	7	4	1	8	6	3	0	7	5	21	0	8	6	4	2	1	9	7	5	4	24	0	9	8	7	6	6	5	4	3	3	28	**7**
5	0	6	2	8	5	1	7	3	0	6	19	0	7	4	1	9	6	3	0	8	5	21	0	8	6	4	3	1	9	7	6	4	24	0	9	8	7	7	6	5	4	4	3	28	**8**
5	0	6	2	8	5	1	7	4	0	6	19	0	7	4	1	9	6	3	1	8	5	21	0	8	6	4	3	1	9	8	6	4	24	0	9	8	7	7	6	5	5	4	3	28	**9**
5	0	6	2	9	5	1	8	4	0	7	19	0	7	4	2	9	6	4	1	8	6	21	0	8	6	5	3	1	0	8	6	5	25	0	9	8	8	7	6	6	5	4	4	28	**10**
5	0	6	2	9	5	1	8	4	1	7	19	0	7	4	2	9	6	4	1	9	6	21	0	8	6	5	3	1	0	8	7	5	25	0	9	8	8	7	6	6	5	5	4	28	**11**
5	0	6	2	9	5	2	8	4	1	7	19	0	7	4	2	9	7	4	1	9	6	21	0	8	6	5	3	2	0	8	7	5	25	0	9	8	8	7	7	6	5	5	4	28	**12**
5	0	6	2	9	5	2	8	5	1	7	19	0	7	4	2	9	7	4	2	9	6	21	0	8	6	5	3	2	0	9	7	5	25	0	9	8	8	7	7	6	6	5	4	28	**13**
5	0	6	2	9	5	2	8	5	1	8	19	0	7	4	2	9	7	4	2	9	7	21	0	8	6	5	3	2	0	9	7	6	25	0	9	8	8	7	7	6	6	5	5	28	**14**
5	0	6	3	9	6	2	9	5	2	8	19	0	7	5	2	0	7	5	2	0	7	22	0	8	7	5	4	2	1	9	8	6	25	0	9	9	8	8	7	7	6	6	5	28	**15**
5	0	6	3	9	6	2	9	5	2	9	19	0	7	5	2	0	7	5	2	0	8	22	0	8	7	5	4	2	1	9	8	7	25	0	9	9	8	8	7	7	6	6	6	28	**16**
5	0	6	3	9	6	2	9	6	2	9	19	0	7	5	2	0	7	5	3	0	8	22	0	8	7	5	4	2	1	0	8	7	26	0	9	9	8	8	7	7	7	6	6	28	**17**
6	0	6	3	9	6	3	9	6	2	9	19	0	7	5	2	0	8	5	3	0	8	22	0	8	7	5	4	3	1	0	8	7	26	0	9	9	9	8	8	7	7	6	6	28	**18**
6	0	6	3	9	6	3	9	6	3	9	19	0	7	5	2	0	8	5	3	1	8	22	0	8	7	5	4	3	1	0	9	7	26	0	9	9	9	8	8	8	7	7	6	28	**19**
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3	0	20	0	7	5	3	0	8	6	3	1	9	22	0	8	7	6	4	3	2	0	9	8	26	0	9	9	9	9	8	8	8	7	7	28	**20**
7	0	6	3	0	6	3	0	7	3	0	20	0	7	5	3	0	8	6	4	1	9	22	0	8	7	6	4	3	2	1	9	8	26	0	9	9	9	9	8	8	8	7	7	28	**21**
7	0	6	3	0	7	3	0	7	4	0	20	0	7	5	3	1	8	6	4	2	9	22	0	8	7	6	5	3	2	1	0	8	27	0	9	9	9	9	8	8	8	8	7	28	**22**
7	0	6	3	0	7	3	0	7	4	1	20	0	7	5	3	1	8	6	4	2	0	23	0	8	7	6	5	3	2	1	0	9	27	0	9	9	9	9	8	8	8	8	8	28	**23**
7	0	6	3	0	7	4	0	7	4	1	20	0	7	5	3	1	9	6	4	2	0	23	0	8	7	6	5	4	2	1	0	9	27	0	9	9	9	9	9	8	8	8	8	28	**24**
7	0	6	3	0	7	4	1	7	4	1	20	0	7	5	3	1	9	7	4	2	0	23	0	8	7	6	5	4	3	1	0	9	27	0	9	9	9	9	9	9	8	8	8	28	**25**
7	0	6	3	0	7	4	1	8	4	1	20	0	7	5	3	1	9	7	5	2	0	23	0	8	7	6	5	4	3	2	0	9	27	0	9	9	9	9	9	9	9	8	8	28	**26**
7	0	6	3	0	7	4	1	8	5	1	20	0	7	5	3	1	9	7	5	3	0	23	0	8	7	6	5	4	3	2	1	9	27	0	9	9	9	9	9	9	9	9	8	28	**27**
7	0	6	3	0	7	4	1	8	5	2	20	0	7	5	3	1	9	7	5	3	1	23	0	8	7	6	5	4	3	2	1	0	28	0	9	9	9	9	9	9	9	9	9	28	**28**

Fac-simile ein



ner Handschrift von Leibnitz

s, Wegst und Hochgelahrter
ondres Hochgeh

Ihr dienstlich bey dem
Kgl. Meinigfuldigste
abzustatten, so wohl vor
edachtniß, Wegen brachten nützliche
als vor dessen Hochgeh. so hoch
und mit Gelehrten Anmerkungen
ordigt. ich sehe so wohl aus
als allen andern, daß der
h mehr als heutzutage
angriffe, und etwas
lassen sich angelegen
Wenn ich einsmahls in
Muße, oder sonst ihn
wurde, so zweifle nicht daß
hr bemerken dürffe in ubrigen
gsonders Hochgeh.
Dienstgehorsamster
B W v Leibnitz

Crelle Journal d. Math. Bd. XXX. Heft 2.

Fac-simile einer Hand

Liège le 28 Nivose

J'avois reçu Ma chère Pamela, La lettre
je trouve que ce que desire ton mari m^r f
à Paris pour essayer de pousser à la rou
mission; mon correspondance avec le premier
peux pas me croire autorisé à lui rien demander
dans un bon moment de perconseigneur d'une m
aux champs. ainsi, Ma chère amie, je ne te
d'écrire une lettre un peu moins triste que co

fais mille compliments à ton mari, rap
Pere, dis lui que je suis enchanté du rapproc
je desire ardemment de retourner à Paris p
La liaison amicale qui existoit entre nous au
Rissant^t, et comptez sur mon tendre attach

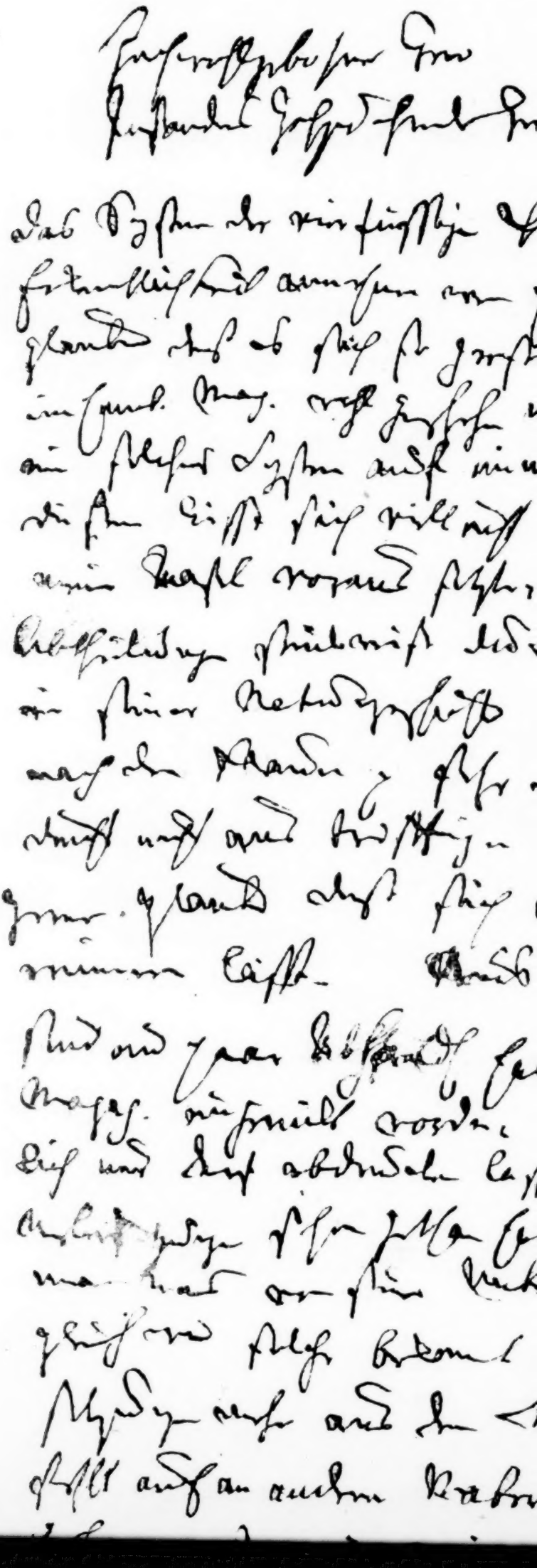
...dschrift von Monge

...e an XII.

...tre de ton mari je viens de recevoir la tienne
...fort raisonnable, et je suis bien fâché de n'être pas
...me ; mais je suis si malheureux ici dans ma
...ir Consul et si peu agréable pour lui que je ne
...nder et surtout qu'il m'est impossible de le faire
...manière utile. Chacune de mes lettres doit le rendre
...ete promets rien, à moins que je n'aie occasion
...toutes les autres, ce que je n'ose pas espérer.
...rappelles moi au souvenir du cet ayant Champy
...rachement qui s'est opéré depuis mon départ ; que
... pour avoir le plaisir de le voir et de renouer
... au Kaire. dis mille choses aimables à M. et Mme
...achement.

Monge

Fac-simile einer Hand



dschrift von Köstner.

[illegible] Professor.

[illegible] wurde mit Besonderem
[illegible] Ew. Hochwohlgeb. und selbst
[illegible] mittheilen [illegible] wie es
[illegible] müssen. Mich [illegible] man muß
[illegible] ganz übersehen können:
[illegible] abhelfen wenn man und allge-
[illegible] und alles den die Besonderen
[illegible] Gl. der Bürgerin ist
[illegible] Lunar Abthl. der Theod
[illegible] übel zufrieden aber mich
[illegible] Ursachen ob ich wohl sonst
[illegible] bey Lunar Methode [illegible]
[illegible] den französischen Memoires
[illegible] halb wieder meine Willen und
[illegible] die der Hr. v. Steinwehr frey
[illegible] lassen wo er mit ein paar andern
[illegible] die eingereicht worden ihr
[illegible] Mittel [illegible]
[illegible] wurde beschlossen und [illegible]
Memoires zu [illegible] – Es
[illegible] nicht [illegible]

Crelle Journal d. Math. Bd. XXX. Heft 4.

Fac-simile einer Hands

Mon Reverend Pe

Je suis bien aise q
vous ayent pleu, Et
eloges quel vous m

que la double Egalit
1AA − A + 1 Et 1AA

Vo
Pe

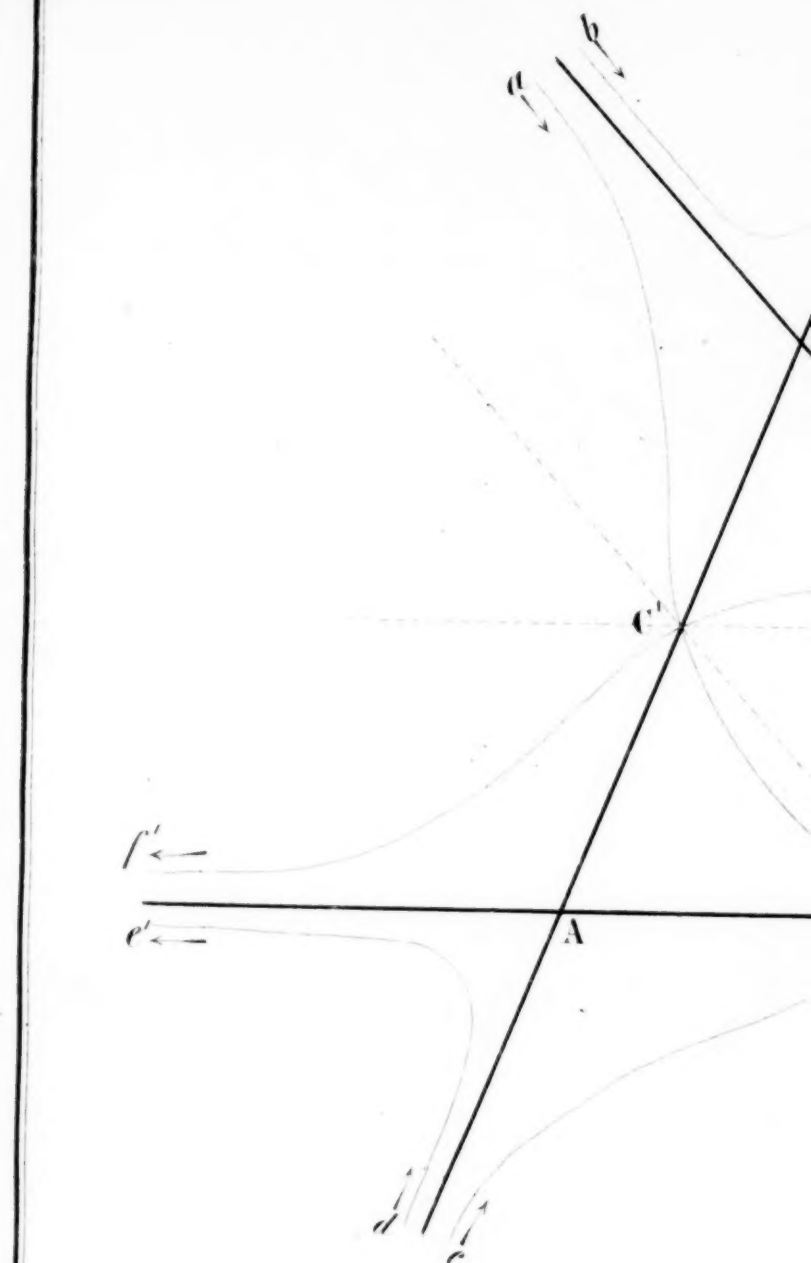
A Colozele
26. Xt. 1659.

dschrift von Fermat

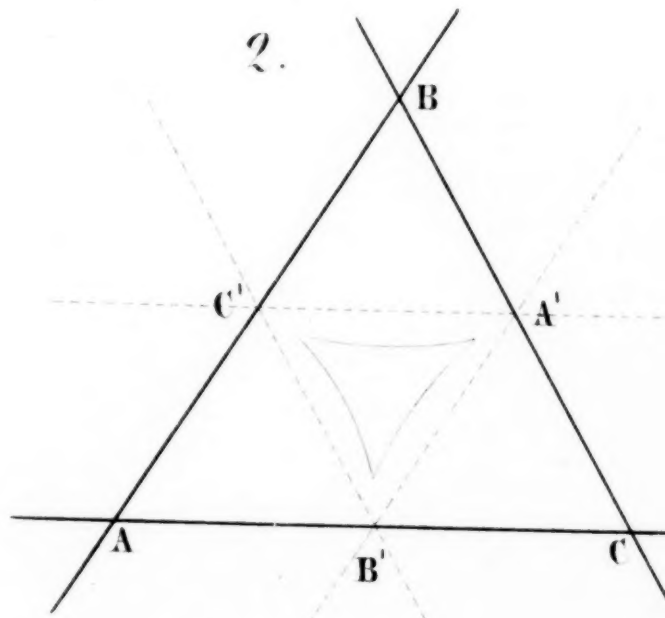
ere

que mes solutions —
ie vous remercie des
me donnes bien que ie
.....
a laquelle vous la reduisez
A — 3A + 1 garny desquels
.....

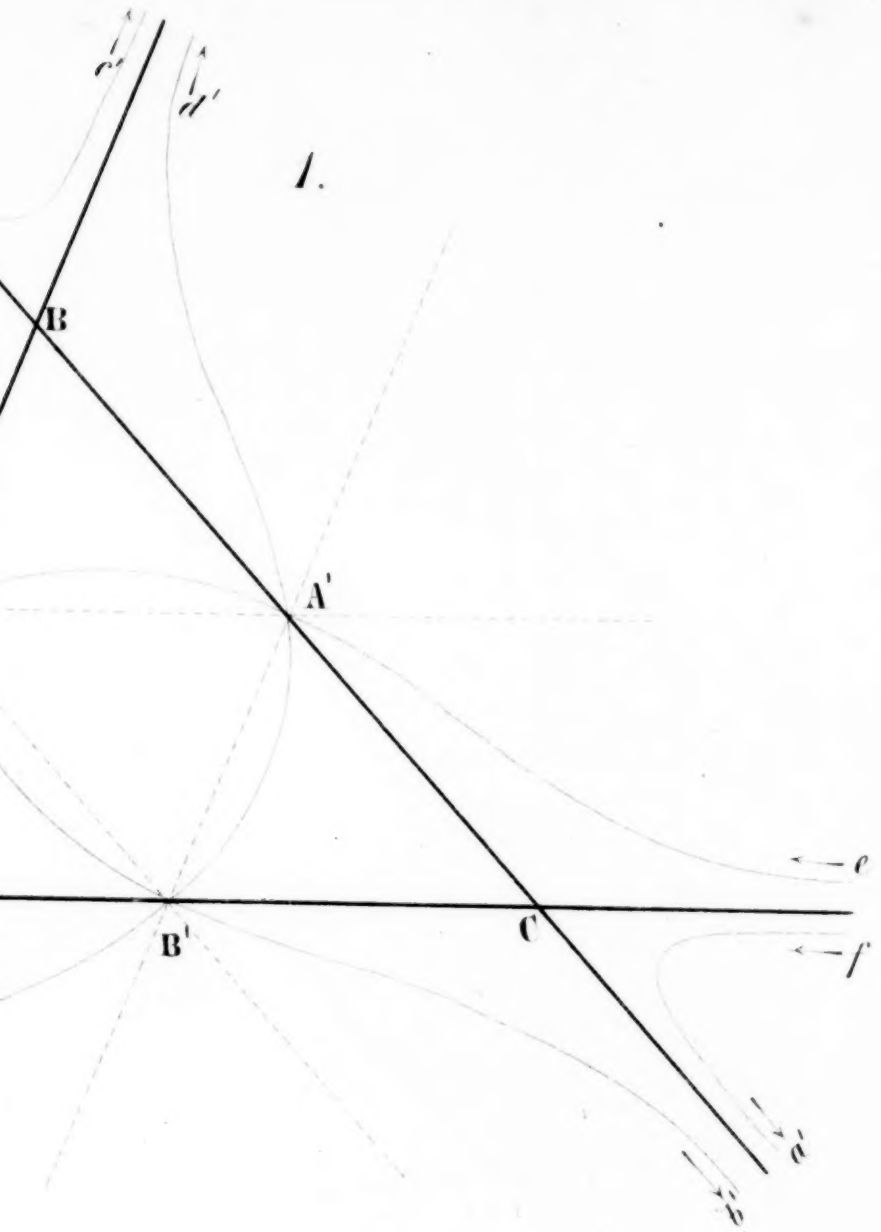
tre tres humble et
tres acquis serviteur
Fermat



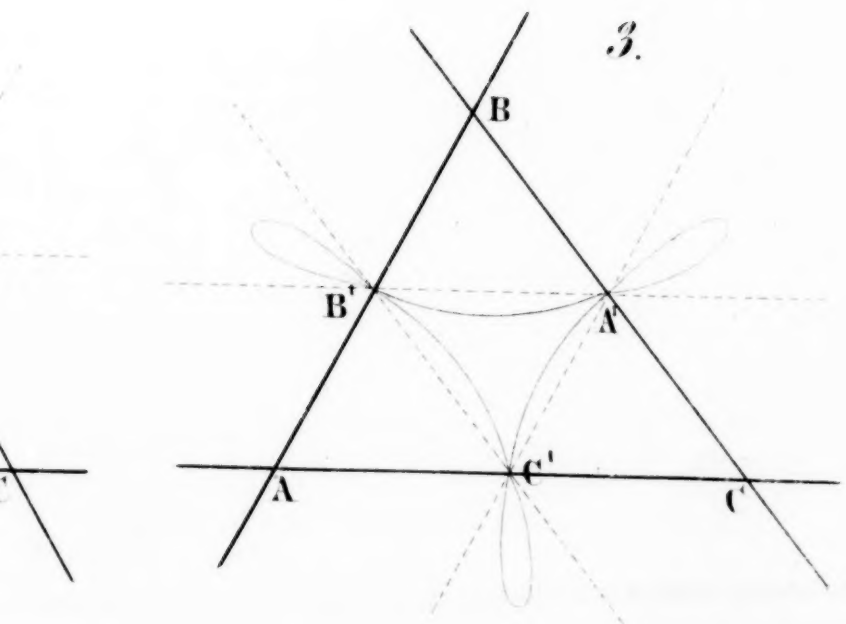
2.

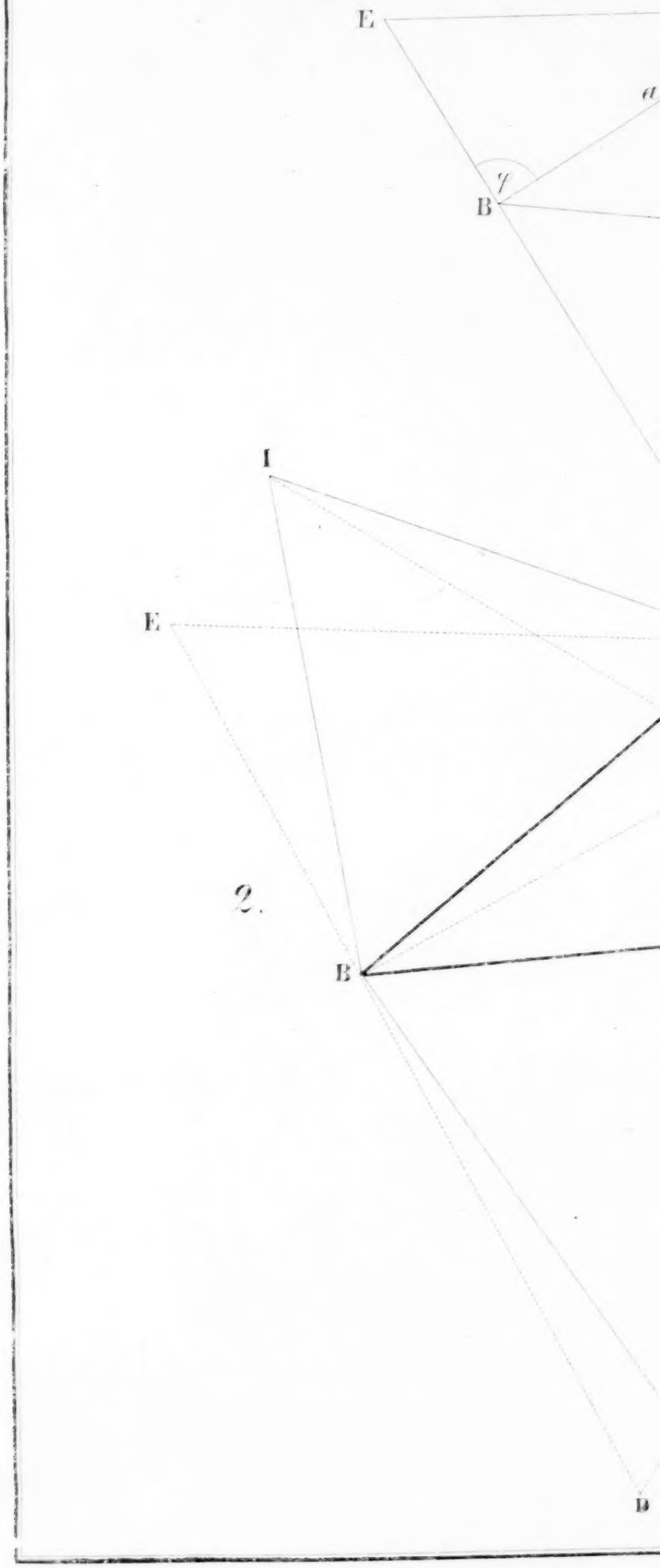


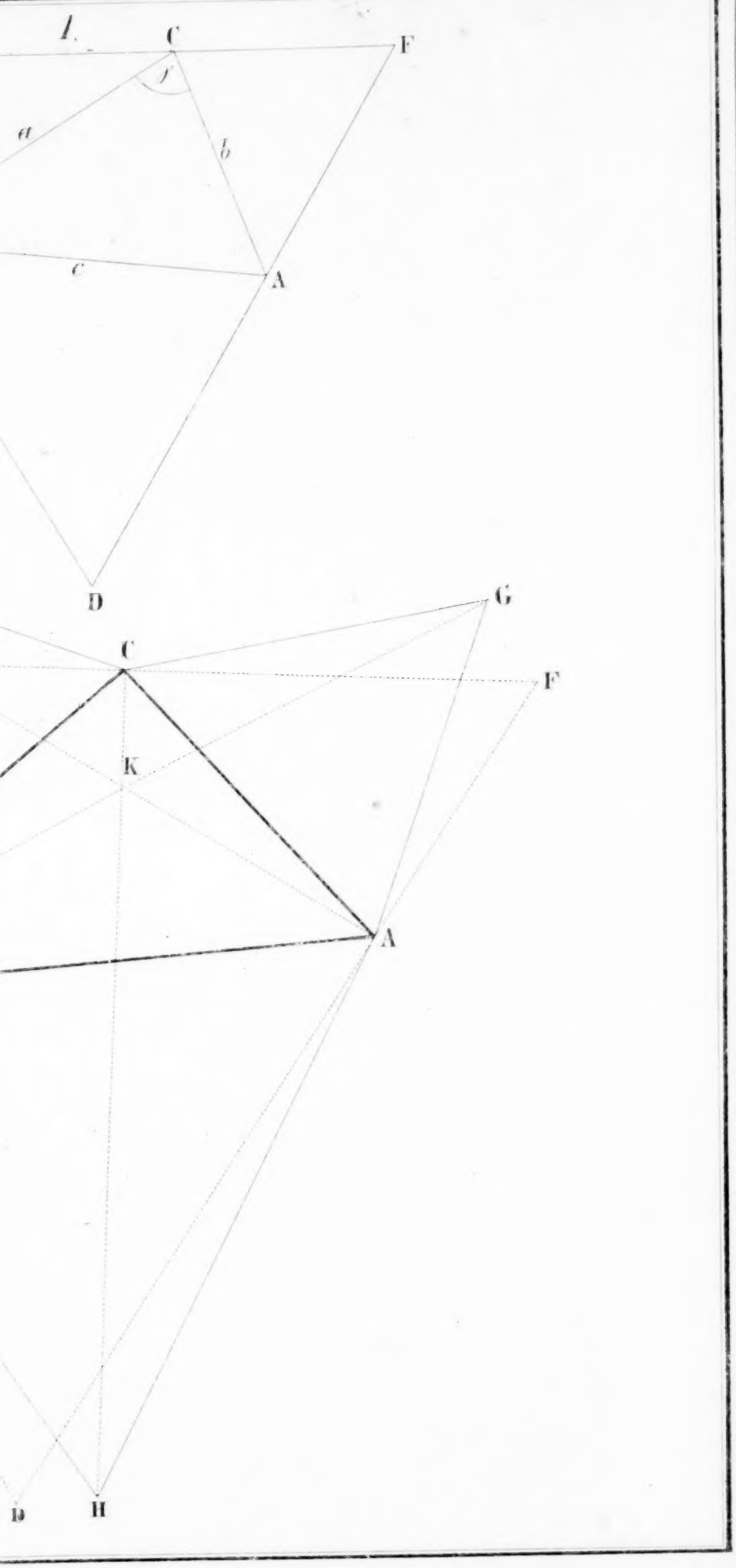
1.



3.




E
a
γ
B
I
E
2.
B
B


1.
C
F
f
a
b
c
A
D
G
C
F
K
A
D
H